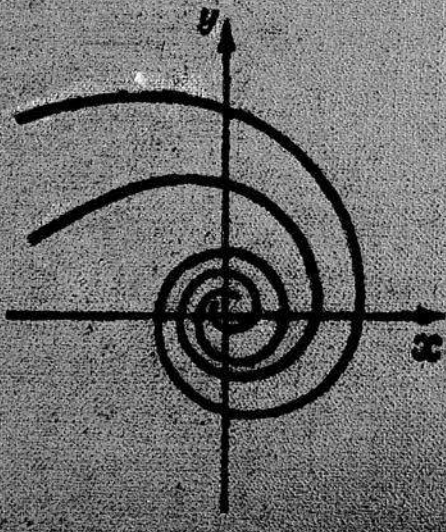
Р. МӘММӘДОВ

АЛИ РИЈАЗИЈЈАТ КУРСУ

I



МААРИФ • 1978

Р. МӘММӘДОВ
ФИЗИКА-РИЈАЗИЈЈАТ ЕЛМЛӘРИ ДОКТОРУ, ПРОФЕССОР

АЛИ РИЈАЗИЈЈАТ КУРСУ

I

ДӘРСЛИК

АЗӘРБАЈЧАН ССР АЛИ ВӘ ОРТА ИХТИСАС
ТӘҺСИЛИ НАЗИРЛИЈИ ТӘРӘФИНДӘН
ТӘСДИГ ЕДИЛМИШДИР

„МААРИФ" НӘШРИЈЈАТЫ
Бакы—1978

517—1
М 42

Али техники институтларын тәләбәләри үчүн 1974-чү илдә тәсдиг олунмуш али ријазијјат програмы әсасында јазылмыш бу дәрсликдә матрисләр, детерминантлар, векторлар чәбри, дүз хәтләр вә мүстәвиләр, хәтти фәзалар, чохлуг, функсија, функсијанын лимити, кәсилмәзлији, төрәмә вә онун һесабланмасы, диференсиал һесабынын әсас теоремләри, һәгиги дәјишәнли векториал функсијалар шәрһ олунмушдур. Тәгриби әдәд, садә тәгриби һесаблама үсуллары, тәнлијин көкләринин тәгриби һесабланма гајдалары, Лагранж вә Нјутонун интерполјасија дүстурлары, диференсиалын тәгриби һесабланмасы вә с. кими мәсәләләр дә дәрсликдә әтрафлы нәзәрдән кечирилмишдир.

Дәрсликдән дикәр али мәктәбләрин тәләбәләри дә истифадә едә биләрләр.

Дәрслијә Ч. Илдырым адына Азәрбајчан Политехник Институту рә'ј вермишдир.

2—3—1
М—652 127—76

МҮГӘДДИМӘ

Дәрслик али техники институтларын тәләбәләри үчүн ССРИ Али вә Орта Ихтисас Тәһсили Назирлији тәрәфиндән 1974-чү илдә тәсдиг олунмуш али ријазијјат програмы әсасында тәртиб олунмушдур.

Дәрслик ики һиссәдән ибарәтдир: хәтти чәбрин елементләри вә аналитик һәндәсә; бирдәјишәнли функсијаларын диференсиал һесабы.

Бу һиссәләрин һәр бирини ајрылыгда (лакин паралел олараг) вә ја икисини дә бирликдә гарышыг шәкилдә тәдрис етмәк олар.

Китабын охучулара тәгдим олунан биринчи һиссәси М. Әзизбәјов адына Азәрбајчан Нефт вә Кимја Институтунда тәләбәләр үчүн биринчи семестрдә охунан «Хәтти чәбрин елементләри вә аналитик һәндәсә» адлы мүһазирәнин мәзмунуну әһатә едир. Бурада матрисләр вә детерминантлар, хәтти тәнликләр системи вә векторлар чәбри кими һәмишә али техники институтларда кечилән бәһсләрлә јанашы, хәтти фәзалар вә хәтти чевирмәләр дә садә вә конкрет шәкилдә шәрһ едилир. Јени али ријазијјат програмында аналитик һәндәсәнин чох гыса кечилмәси нәзәрдә тутулур. Буна көрә дә VI—VIII фәсилләрдә аналитик һәндәсәдән анчаг ән'әнәви материаллар верилир.

Али техники институтларын биринчи семестриндә «Хәтти чәбрин елементләри вә аналитик һәндәсә» илә паралел олараг тәләбәләр үчүн «Ријази анализә кириш» адлы мүһазирә дә охунур. Һәмин мүһазирәнин мәзмуну китабын IX—XVIII фәсилләринә ујғундур.

Дәрсликдә верилмиш һәр бир нәзәри тәклиф мисалларла изаһ олунур вә онларын тәтбиги үчүн кифајәт гәдәр мисал вә мәсәләләр верилир. Мүһәндисләр үчүн лазым олан тәгриби әдәд, садә тәгриби һесаблама үсуллары, тәнлијин көкләринин тәгриби һесабланма гајдалары, Лагранж вә Нјутонун интерполјасија дүс-

турлары, диференсиалын тәгриби һесабланмасы, садә емпирик дүстурларын сечилмәси вә с. кими тәгриби һесаблама мәсәләләри дә дәрсликдә әтрафлы нәзәрдән кечирилмишдир.

Бу китаб али техники институтларын тәләбәләри үчүн јазылдығына бахмајараг ондан башга али мәктәбләрин вә техникумларын тәләбәләри дә истифадә едә биләрләр.

Китабдакы бир сыра гүсурлары арадан галдырмаг үчүн М. Әзизбәјов адына Азәрбајҹан Нефт вә Кимја Институтунун али ријазијјат кафедрасынын әмәкдашлары, хүсусилә дос. Ф. Һ. Нәсибов вә Һ. М. Хәлилов, һәм дә китабын редактору дос. К. Ә. Ҹәфәрли мүәллифә бир чох гијмәтли мәсләһәтләр вермишләр; мүәллиф һәмин јолдашлара өз тәшәккүрүнү билдирир.

I ҺИССӘ

ХӘТТИ ҸӘБРИН ЕЛЕМЕНТЛӘРИ ВӘ АНАЛИТИК ҺӘНДӘСӘ

I ФӘСИЛ

МАТРИСЛӘР ВӘ ДЕТЕРМИНАНТЛАР

§ 1. МАТРИС АНЛАЈЫШЫ

Тутаг ки, m вә n натурал әдәдләрдир. mn сајда әдәддән дүзбучаглы шәклиндә дүзәлдилмиш, m сајда сәтри вә n сајда сүтуну олан ҹәдвәлә $(m\times n)$*-өлчүлү матрис* дејилир. Матриси

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \qquad (1)$$

вә ја

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

шәклиндә јазырлар. Бә'зән гыса олмаг үчүн матриси бөјүк һәрфлә (A, B, C, X, $У$, ...) вә ја $\|a_{ij}\|$ ($i=1, 2, \dots m$; $j=1, 2, \dots n$) шәклиндә ишарә едирләр.

Матриси тәшкил едән a_{ij} әдәдләринә онун *елементләри* дејилир. Елементин ашағысында јазылан ики (ij) индексин биринҹиси (i) онун јерләшдији сәтрин нөмрәсини, икинҹиси (j) исә јерләшдији сүтунун нөмрәсини көстәрир.

$(m \times n)$-өлчүлү (1) матрисинин сәтир вә сүтунларынын сајы бәрабәр ($m = n$) олдугда, она *квадрат матрис* дејилир. Бу һалда n әдәдинә квадрат *матрисин тәртиби* дејилир. Мәсәлән,

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{Vmatrix} \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

матрисләринин биринчиси ики, икинчиси исә үчтәртиблидир. Бир елементдән ибарәт олан матрисә *биртәртибли матрис* дејилир. Биртәртибли матриси ону тәшкил едән јеканә әдәдлә ејниләшдирирләр: $\|a_{11}\| = a_{11}$.

Анчаг бир сәтри олан матрисә *сәтир-матрис*, анчаг бир сүтуну олан матрисә *сүтун-матрис* дејилир. Мәсәлән,

$$A = \|2,\ 7,\ 8,\ 9\|, \quad B = \|a,\ b,\ c\|$$

матрисләри сәтир-матрисләр,

$$C = \begin{Vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{Vmatrix}, \qquad D = \begin{Vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{Vmatrix}$$

матрисләри исә сүтун-матрисләрдир.

n-тәртибли квадрат

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

матрисинин сол јухары күнчүндә олан a_{11} елементи илә сағ ашағы күнчүндә олан a_{nn} елементини бирләшдирән дүз хәтт парчасы үзәриндә јерләшән $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ елементләри чохлуғу һәмин матрисин *баш диагоналы* адланыр. Анчаг баш диагоналынын елементләри сыфырдан фәргли олан квадрат матрисә *диагонал матрис* дејилир. Бүтүн елементләри ваһидә бәрабәр олан диагонал матрис *ваһид матрис* адланыр вә I_n илә ишарә олунур. Биртәртибли ваһид матрис

$$I_1 = \|1\|,$$

икитәртибли ваһид матрис

$$I_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

үчтәртибли ваһид матрис

$$I_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

вә с. олар.

Бүтүн елементләри сыфра бәрабәр олан квадрат матрисә *сыфыр матрис* дејилир вә O илә ишарә олунур. Мәсәлән,

$$O = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

матрисләри ујғун олараг икитәртибли вә үчтәртибли сыфыр матрисләрдир.

Верилмиш A матрисинин бүтүн сәтир вә сүтунларынын јеринин дәјишилмәсинә (нөмрәсини сахламагла) һәмин матрисин *чеврилмәси (транспонирә едилмәси)* дејилир вә A^* илә ишарә олунур. Мәсәлән,

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 7 \end{Vmatrix}^* = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 7 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -7 \end{Vmatrix}^* = \begin{Vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -7 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{Vmatrix}^* = \|-3\ \ 0\ \ -1\|.$$

Ајдындыр ки, $(A^*)^* = A$ олар. $A = A^*$ олдугда A матрисинә *симметрик матрис* дејилир. (2) матрисинин симметрик олмасы шәртини $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ кими јазмаг олар.

$a_{ij} = -a_{ji}$ олдугда A матрисинә *чәпсимметрик матрис* дејилир.

Бүтүн елементләри һәгиги әдәдләр олан *матрисә һәгиги*, һеч олмаса бир елементи комплекс әдәд олан матрисә исә *комплекс матрис* дејилир. Биз бурада һәгиги матрисләрә бахырыг.

Ејни өлчүлү вә бүтүн ујғун елементләри бәрабәр олан матрисләрә *бәрабәр матрисләр* дејилир.

§ 2. МАТРИСЛӘР ҮЗӘРИНДӘ ӘМӘЛЛӘР

Матрисләрин чәминдән (фәргиндән), әдәдә вә башга матрисә һасилләриндән данышмаг олар.

Ејни $(m \times n)$-өлчүлү $A = \|a_{ij}\|$ вә $B = \|b_{ij}\|$ $(i = 1, 2, \dots, m;$ $j = 1, 2, \dots, n)$ матрисләринин чәми һәмин өлчүлү вә һәдләри

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \ \ j = 1, 2, \dots, n) \tag{1}$$

кими тә'јин олунан $C=\|c_{ij}\|$ $(i=1, 2, ..., m;\ j=1, 2, ..., n)$ матрисинә дејилир вә $C=A+B$ илә ишарә олунур. Хүсуси һалда,

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{Vmatrix}.$$

Тә'рифдән ајдындыр ки, матрисләрин топланмасы јердәјишмә вә груплашдырма хассәләринә маликдир, јә'ни ејниөлчүлү A, B вә C матрисләри үчүн

$$A+B=B+A,$$
$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

мүнасибәтләри доғрудур.

Ејниөлчүлү A матриси вә O (сыфыр) матриси үчүн һәмишә

$$A+O=A$$

мүнасибәти доғрудур.

Ејниөлчүлү A вә B матрисләринин фәрги һәмин өлчүлү елә C матрисинә дејилир ки, ону B илә топладыгда A-ја бәрабәр олсун: $A=C+B$. A вә B матрисләринин фәргини

$$A-B=C$$

илә ишарә едирләр. Ајдындыр ки, һәмишә:

$$A-A=O.$$

Верилмиш $A=\|a_{ij}\|$ $(i=1, 2, ..., m;\ j=1, 2, ..., n)$ матрисинин һәгиги λ әдәдинә һасили, һәдләри

$$b_{ij}=\lambda a_{ij}\quad (i=1, 2, ..., m;\ j=1, 2, ..., n)$$

кими тә'јин олунан $B=\|b_{ij}\|$ $(i=1, 2, ..., m;\ j=1, 2, ..., n)$ матрисинә дејилир вә $B=\lambda A$ (вә ја $B=A\lambda$) илә ишарә олунур. Ајдындыр ки, ихтијари A, B матрисләри вә һәгиги λ, μ әдәдләри үчүн

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A),\qquad \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B,$$
$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$$

хассәләри доғрудур.

Гејд едәк ки, A вә B матрисләринин фәргини

$$A-B=A+(-1)\cdot B$$

кими дә јазмаг олар. Бундан башга

$$(A+B)^*=A^*+B^* \quad \text{вә} \quad (\lambda A)^*=\lambda A^* \tag{2}$$

садә хассәләри дә доғрудур.

Инди ики матрисин һасилини тә'јин едәк. $(m\times n)$-өлчүлү $A=\|a_{ij}\|$ $(i=1, 2, ..., m;\ j=1, 2, ..., n)$ матрисинин $(n\times p)$-өлчүлү $B=\|b_{ij}\|$ $(i=1, 2, ..., n;\ j=1, 2, ..., p)$ матрисинә һасили һәдләри

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\quad (i=1, 2, ..., m;\ j=1, 2, ..., p) \tag{3}$$

кими тә'јин олунан $(m\times p)$-өлчүлү $C=\|c_{ij}\|$ $(i=1, 2, ..., m;$ $j=1, 2, ..., p)$ матрисинә дејилир вә $C=AB$ илә ишарә олунур.

Тә'рифдән ајдындыр ки, истәнилән өлчүлү ики матриси вурмаг олмаз. A матрисини о заман B матрисинә вурмаг олар ки, A-нын сүтунларынын сајы B-нин сәтирләринин сајына бәрабәр олсун. Хүсуси һалда,

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & (a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{Vmatrix}.$$

Демәли, AB вә BA һасилләринин икисинин дә ејни заманда тә'јин олунмасы үчүн A-нын сүтунларынын сајы B-нин сәтирләринин сајына вә A-нын сәтирләринин сајы B-нин сүтунларынын сајына бәрабәр олмалыдыр. A вә B матрисләри ејнитәртибли квадрат матрисләр олдугда AB вә BA һасилләри дә ејнитәртибли квадрат матрисләр олар.

Хүсуси һалда, һәр бир квадрат A матрисини өзү-өзүнә вурмаг олар. Бу һалда һәмин матрисин квадраты, кубу вә с. алыныр:

$$A\cdot A=A^2,\qquad A\cdot A\cdot A=A\cdot A^2=A^3, ...$$

Бундан башга,

$$\begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{Vmatrix} \cdot \|x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\| = \begin{Vmatrix} a_1x_1 & a_1x_2 & ... & a_1x_n \\ a_2x_1 & a_2x_2 & ... & a_2x_n \\ . & . & . & . \\ a_nx_1 & a_nx_2 & ... & a_nx_n \end{Vmatrix},$$

$$AX=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} =$$

$$=\begin{Vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \\ a_{22}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n \end{Vmatrix}.$$

Гејд едәк ки, ејнитәртибли ики A вә B квадрат матрисләринин һасили үчүн јердәјишмә хассәси доғру олмаја да биләр. Доғрудан да,

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{вә} \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

матрисләри үчүн

$$AB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{вә} \quad BA = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

јә'ни $AB \neq BA$. Бурадан ајдындыр ки, матрисләри вураркән опларын јерини дәјишмәк олмаз.

Лакин истәнилән квадрат A матриси илә ејнитәртибли олан I ваһид вә O сыфыр матрисләринин һасили үчүн һәмишә јердәјишмә хассәси доғрудур:

$$IA = AI = A. \tag{4}$$

$$OA = AO = O. \tag{5}$$

(4) бәрабәрлији көстәрир ки, ваһид I матрисинин һәгиги ваһид әдәдинин ујғун хассәсинә охшар хассәси вардыр.

Матрисләр һасилинин бир сыра башга хассәләри дә вардыр. Мәсәлән, ихтијари A, B, C матрисләри (лазым олан өлчүлү) вә һәгиги λ әдәди үчүн

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB),$$
$$(A+B)C = AC+BC,$$
$$C(A+B) = CA+CB,$$
$$A(BC) = (AB)\cdot C$$

бәрабәрликләри доғрудур. Ејни заманда,

$$(AB)^* = B^* \cdot A^*. \tag{6}$$

§ 3. ДЕТЕРМИНАНТЫН ТӘ'РИФИ

Әввәлчә икитәртибли

$$A_2 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

матрисинә бахаг. Бу матрисин елементләриндән дүзәлдилмиш

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

фәргинә (1) *матрисинин детерминанты* (вә ја садәчә олараг *икитәртибли детерминант*) дејилир вә

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{2}$$

кими ишарә олунур. (1) матрисинин (2) детерминантыны $\Delta(A_2)$ вә ја $\det A_2$ илә ишарә едирләр.

Үчтәртибли

$$A_3 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{3}$$

матрисинин елементләриндән дүзәлдилмиш

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{4}$$

ифадәсинә һәмин матрисин детерминанты (вә ја *үчтәртибли детерминант*) дејилир вә

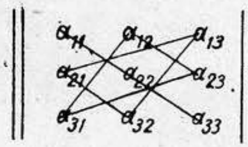
$$\Delta(A_3) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{5}$$

илә ишарә олунур. Беләликлә,

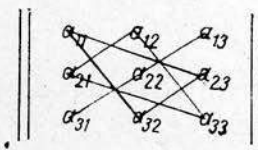
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки (4) ифадәсинә (5) *детерминантынын ачылышы* (вә ја *гиј̇мәти*) дејилир. Верилмиш детерминантын гијмәтини тапмаг үчүн онун бәрабәр олдуғу (4) ифадәсини һесабламаг лазымдыр.

Үчтәртибли детерминантын (4) ифадәси мүрәккәб көрүнсә дә онун дүзәлдилмә гануну чох садәдир. Бу ифадәдә олан алты һәддән үчү мүсбәт ишарә илә (бу һәдләрин алынмасы 1-чи схемдә көстәрилир), үчү исә мәнфи ишарә илә (бу һәдләрин алынмасы исә 2-чи схемдә көстәрилир) көтүрүлмүшдүр.



1-чи схем.



2-чи схем.

Матрисләр кими детерминантлар да сәтир вә сүтунлардан ибарәтдир. Икитәртибли детерминантын ики сәтри вә ики сүтуну, үчтәртибли детерминантын исә үч сәтри вә үч сүтуну вардыр. Детерминанты тәшкил едән a_{ij} әдәдләри онун *елементләри* адланыр.

Детерминантын һәр һансы елементинин олдуғу сәтир вә сүтун үзәриндән дүз хәтләр чәкдикдә јердә галан елементләр (нисби

вәзијјәтләрини дәјишмәдән) бир детерминант (тәртиби верилмиш детерминантын тәртибиндән бир ваһид аз олан) әмәлә кәтирир. Бу детерминанта һәмин елементин *минору* дејилир. a_{ij} елементинин минoруну M_{ij} илә ишарә едирләр. M_{ij} минорунун $(-1)^{i+j}$ вуруғу илә һасилинә a_{ij} елементинин чәбри *тамамлајычысы* дејилир вә

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

илә ишарә олунур.

Икитәртибли (2) детерминантынын a_{11} елементинин минору $M_{11} = a_{22}$, чәбри тамамлајычысы исә $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = a_{22}$; үчтәртибли (5) детерминантынын a_{13} вә a_{23} елементләринин минору ујғун олараг

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{вә} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

чәбри тамамлајычылары исә

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \text{вә} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Теорем 1. ***Һәр бир детерминант һәр-һансы бир сәтир вә ја сүтун елементләринин өз чәбри тамамлајычылары илә һасилләринин чәминә бәрабәрдир.***

Теоремин икитәртибли вә үчтәртибли детерминантлар үчүн исбаты чох асандыр. Мәсәлән, үчтәртибли (5) детерминантынын 1-чи сәтир елементләринин өз чәбри тамамлајычылары илә һасилләринин чәминә бәрабәр олдуғуну көстәрәк. Бу мәгсәдлә (5) детерминантынын (4) ифадәсини

$$\Delta(A_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

шәклиндә јазаг. Бурадан тәләб олунан

$$\Delta(A_3) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{6}$$

ајрылышыны аларыг. Бундан башга үчтәртибли (5) детерминанты үчүн ашағыдакы беш мүнасибәти аларыг:

$$\begin{aligned} \Delta(A_3) &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \\ \Delta(A_3) &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}, \\ \Delta(A_3) &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \\ \Delta(A_3) &= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \\ \Delta(A_3) &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}. \end{aligned} \tag{7}$$

(6) вә (7) бәрабәрликләринә үчтәртибли детерминантын ујғун сәтир вә ја сүтун елементләринә көрә ајрылышы дејилир. (6) бәрабәрлији (5) детерминантынын биринчи сәтир елементләринә көрә ајрылышыдыр.

Икитәртибли

$$\Delta(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

детерминантынын биринчи вә икинчи сәтир елементләринә көрә ајрылышы:

$$\Delta(A_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}((-1)^{1+1} a_{22} + a_{12}(-1)^{1+3} a_{21} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} \tag{8}$$

вә

$$\Delta(A_2) = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22}. \tag{9}$$

Исбат етдијимиз теорем үчтәртибли детерминанты икитәртибли детерминантлар васитәсилә, икитәртибли детерминанты исә биртәртибли детерминантлар васитәсилә тә'јин етмәјә имкан верир. Бу гајда илә дөрд, беш вә с. тәртибли детерминантлары да ардычыл олараг тә'јин етмәк олар.

Мәсәлән, дөрдтәртибли

$$A_4 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Vmatrix}$$

матрисинин $\Delta(A_4)$ детерминантыны (дөрдтәртибли детерминанты)

$$\Delta(A_4) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} \tag{10}$$

кими тә'јин етмәк олар. Бурада A_{11}, A_{12}, A_{13} вә A_{14} кәмијјәтләри дөрдтәртибли

$$\Delta(A_4) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{11}$$

детерминантынын 1-чи сәтр елементләринин үчтәртибли детерминантлар васитәсилә ифадә олунан ујғун чәбри тамамлајычыларыдыр. (11) детерминантыны башга сәтир вә ја сүтун елементләри үзрә ајрылышлар васитәсилә дә тә'јин етмәк мүмкүндүр.

Бу мүлаһизәләрә әсасән n-тәртибли детерминанта ашағыдакы кими тә'риф вермәк олар.

Тә'риф. *n* (> *1*)-*тәртибли*

$$A_n = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрисинин

$$\Delta(A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминанты (*n-тәртибли детерминант*)

$$\Delta(A_n) = \sum_{\kappa=1}^{n} (-1)^{\kappa+1} a_{1\kappa} M_{1\kappa}$$

вә ја

$$\Delta(A_n) = \sum_{\kappa=1}^{n} a_{1\kappa} A_{1\kappa}$$

әдәдинә дејилир. Бурада $M_{1\kappa}$ *илә* A_n ***матрисинин 1-чи сәтрини вә к-чы сүтунуну позмагла алынан (n—1)-тәртибли матрисин детерминанты*** *ишарә олунмушдур.*

Јухарыда исбат олунан теорем көстәрир ки, ики вә үчтәртибли детерминантлара әввәлчә вердијимиз тә'рифләр бу тә'рифлә $n=2$ вә $n=3$ олдугда еквивалентдир. Һәмин теорем *n*-тәртибли детерминантлар үчүн дә доғрудур:

Теорем 2. ***n-тәртибли*** $\Delta(A_n)$ ***детерминанты вә истәнилән*** $i(1 \leqslant i \leqslant n)$ *вә* $j(1 \leqslant j \leqslant n)$ ***үчүн***

$$\Delta(A_n) = \sum_{\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} A_{i\kappa} \tag{12}$$

вә

$$\Delta(A_n) = \sum_{\kappa=1}^{n} (-1)^{\kappa+j} a_{\kappa j} M_{\kappa j} \tag{13}$$

бәрабәрликләри доғрудур.

(12) бәрабәрлијинә $\Delta(A_n)$ детерминантынын *i*-чи сәтир елементләри үзрә ајрылышы, (13) бәрабәрлијинә исә онун *j*-чу сүтун елементләри үзрә *ајрылышы* дејилир.

Мисал. Ваһид матрисин детерминанты ваһидә бәрабәрдир.

Доғрудан да,

$$I_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{олдугда} \quad \Delta(I_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$I_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{олдугда} \quad \Delta(I_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$I_n = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

олдугда $\Delta(I_n) = \Delta(I_{n-1}) = \Delta(I_{n-2}) = \dots = \Delta(I_2) = 1$

§ 4. ДЕТЕРМИНАНТЫН ӘСАС ХАССӘЛӘРИ

Детерминантын тәртиби артдыгча онун елементләринин вә һәдләринин сајы артыр.

Икитәртибли детерминантын 4 елементи вә 2 һәдди, үчтәртибли детерминантын 9 елементи вә 6 һәдди, дөрдтәртибли детерминантын 16 елементи вә 24 һәдди, бештәртибли детерминантын 25 елементи вә 120 һәдди вә с. вар. *n*-тәртибли детерминантын n^2 сајда елементи вә $n!$ (1-дән *n*-ә гәдәр натурал әдәдләрин һасили олуб *n факториал* адланыр: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$) сајда һәдди вар. Буна көрә дә јүксәк тәртибли детерминантлары һесабламаг үчүн бөјүк һесаблама иши апармаг лазым кәлир. Бә'зән бу һесабламалары апармаг практик чәһәтдән чох чәтин олур.

Детерминантларын һесабланмасыны асанлашдыран бир сыра хассәләри вардыр. Истәнилән тәртибли детерминантлара аид олан бу хассәләри биз анчаг үчтәртибли детерминантлар үчүн бурада сөјләмәклә кифајәтләнирик.

Хассә 1. *Детерминантын бүтүн сәтирләри илә сүтунларынын ујғун олараг јерини дәјишдикдә онун гијмәти дәјишмәз:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1}$$

Бу бәрабәрлијин доғрулуғуну исбат етмәк үчүн сол тәрәфдәки детерминанты Δ илә, сағ тәрәфдәки детерминанты исә Δ^* илә ишарә едәк. Δ детерминантынын биринчи сәтир елементләри үзрә ајрылышыны вә Δ^* детерминантынын биринчи сүтун елементләри үзрә ајрылышыны (§ 3) јазаг:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$$\Delta^* = a_{11}A_{11}^* + a_{12}A_{12}^* + a_{13}A_{13}^*.$$

$A_{11}=A^*_{11}$, $A_{12}=A^*_{12}$ вә $A_{13}=A^*_{13}$ олдуғундан $\Delta=\Delta^*$.

Детерминантын бүтүн сәтирләри илә сүтунларынын ујғун олараг јерини дәјишмәсинә онун *чеврилмәси* вә ја *транспонирә едилмәси* дејилир. Исбат етдијимиз хассә көстәрир ки, детерминантын чеврилмәси заманы онун гијмәти дәјишмир, јә'ни A матриси илә онун A^* чеврилмәсинин детерминантлары һәмишә бәрабәрдир:

$$\Delta(A)=\Delta(A^*). \qquad (2)$$

Нәтичә. *Һәр бир детерминантын сәтирләри илә сүтунлары ејни һүгуглудур.* Буна көрә дә детерминантын бундан сонракы хассәләрини анчаг сәтирләри вә ја анчаг сүтунлары үчүн сөјләмәк кифајәтдир.

Хассә 2. *Детерминантын ики сәтринин (вә ја сүтунунун) бир-бири илә јерини дәјишдикдә детерминантын анчаг ишарәси дәјишәр:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Доғрудан да, сол тәрәфдәки детерминантын биринчи сәтир елементләри үзрә ајрылышыны:

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

вә сағ тәрәфдәки детерминантын икинчи сәтир елементләри үзрә ајрылышыны:

$$\Delta'=a_{11}A'_{11}+a_{12}A'_{12}+a_{13}A'_{13}$$

јазыб, $A_{11}=-A'_{11}$, $A_{12}=-A'_{12}$, $A_{13}=-A'_{13}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда (3) бәрабәрлијинин доғрулуғу ајдын олар.

Хассә 3. *Ики сәтри ејни олан детерминант сыфра бәрабәрдир:*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0.$$

Доғрудан да, Δ детерминантында биринчи вә икинчи сәтирләрин бир-бири илә јерини дәјишсәк, онда $\Delta=-\Delta$. Бурадан $2\Delta=0$, $\Delta=0$.

Бу хассәдән истифадә едәрәк, бир сыра мараглы мүнасибәтләр алмаг олар. Әкәр

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

детерминантында вә ја онун биринчи сәтир елементләри үзрә

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} \qquad (4)$$

ајрылышында a_{11}, a_{12} вә a_{13} әдәдләрини (биринчи сәтир елементләрини) ујғун олараг a_{21}, a_{22} вә a_{23} әдәдләри илә (икинчи сәтир елементләри илә) әвәз етсәк, онда биринчи вә икинчи сәтир елементләри ејни олан детерминант аларыг. Бу детерминант исә III хассәјә көрә сыфра бәрабәрдир, јә'ни

$$a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0. \qquad (5)$$

Биринчи сәтир елементләрини ујғун олараг үчүнчү сәтир елементләри илә әвәз етдикдә исә

$$a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=0 \qquad (6)$$

бәрабәрлији алыныр. Беләликлә, Δ детерминантынын һәр бир сәтир вә сүтун елементләри үзрә ајрылышындан (5) вә (6) бәрабәрликләринә ујғун ики мүнасибәт алыныр:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}&=0,\\ a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}&=0,\\ a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}&=0,\\ a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}&=0 \end{aligned} \qquad (7)$$

вә с.

Хассә 4. *Детерминантын һәр һансы бир сәтир елементләринин ортаг вуруғу оларса, онда һәмин вуруғу детерминантын харичинә чыхармаг олар:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Бу бәрабәрлијин сол тәрәфиндәки детерминанты Δ_1, сағ тәрәфиндәки детерминанты Δ илә ишарә едәк. Әкәр Δ_1 детерминантынын икинчи сәтир елементләри үзрә ајрылышыны јазсаг:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \lambda a_{21}A_{21}+\lambda a_{22}A_{22}+\lambda a_{23}A_{23} = \\ &= \lambda(a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}) = \lambda\Delta. \end{aligned}$$

Нәтичә 1. Детерминантын һәр һансы бир сәтринин бүтүн елементләри сыфыр олдуғда детерминант сыфра бәрабәр олар.

Нәтичәнин доғрулуғуна инанмаг үчүн (8) бәрабәрлијиндә $\lambda=0$ көтүрмәк кифајәтдир.

Нәтичә 2. Детерминанты бир әдәдә вурмаг үчүн детерминантын һәр һансы бир сәтрини һәмин әдәдә вурмаг кифајәтдир.

Бу нәтичәнин доғрулуғуна инанмаг үчүн (8) бәрабәрлијини сағдан сола охумаг кифајәтдир.

Хассә 5. *Детерминантын һәр һансы бир сәтринин бүтүн елементләри ики әдәдин чәми кими верилдикдә, һәмин детерминант*

1349—2

ики детерминантын чәминә бәрабәр олар, бу детерминантларын бириндә һәмин сәтир елементләри оларaг биринчи топлананлар, о бириндә исә һәмин сәтир елементләри оларaг икинчи топлананлар көтүрүлүр:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} & a_{13}+a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

Доғрудан да, бәрабәрлијин сол тәрәфиндәки детерминанты Δ_1, сағ тәрәфдәки детерминантлары исә ујғун оларaг Δ вә Δ' илә ишарә едәрәк, Δ_1 детерминантыны биринчи сәтир елементләри үзрә ајырсаг:

$$\Delta_1 = (a_{11}+a'_{11})A_{11} + (a_{12}+a'_{12})A_{12} + (a_{13}+a'_{13})A_{13} =$$
$$= (a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + (a'_{11}A_{11} + a'_{12}A_{12} + a'_{13}A_{13}) =$$
$$= \Delta + \Delta'$$

вә ја тәләб олунан

$$\Delta_1 = \Delta + \Delta'$$

бәрабәрлијини аларыг.

Хассә 6. *Детерминантын һәр һансы сәтринин бүтүн елементләрини бир әдәдә вуруб онун башга бир сәтринин ујғун елементләри үзәринә әлавә етсәк, детерминант дәјишмәз:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{21} & a_{12}+\lambda a_{22} & a_{13}+\lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Бу тәклифин доғрулуғу III, IV вә V хассәләрдән ајдындыр.

§ 5. СӘТИР ВӘ СҮТУНЛАРЫН ХӘТТИ АСЫЛЫЛЫҒЫ

Тутаг ки, n-тәртибли

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

матриси вә ја

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминанты верилмишдир. Бу матрисин (детерминантын) сәтирләрини

$$B_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \quad B_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots,$$
$$B_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}) \quad (1)$$

илә ишарә едәк. *Тутаг ки, һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан елә $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләри вар ки,*

$$\lambda_1 a_{1к} + \lambda_2 a_{2к} + \dots + \lambda_n a_{nк} = 0 \quad (к = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

мүнасибәтләри өдәнилир. Онда дејирләр ки, (1) сәтирләри хәтти асылыдыр.

Сајы n олан (2) бәрабәрлијини бир

$$\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \dots + \lambda_n B_n = O \quad (3)$$

бәрабәрлији шәклиндә јазаг; бурада $O = (0, 0, \dots, 0)$.

Әкәр (3) бәрабәрлији (вә ја (2) бәрабәрликләри) јалныз $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ олдугда өдәнилирсә, онда (1) сәтирләринә *хәтти асылы олмајан сәтирләр* дејилир. $\lambda_m \neq 0$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ олдуғуну гәбул етсәк, (2) бәрабәрликләрини

$$a_{mк} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} a_{1к} - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} a_{(m-1)к} -$$
$$-\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} a_{(m+1)к} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_m} a_{nк}$$

вә ја

$$\mu_к = -\frac{\lambda_к}{\lambda_m} \quad \text{гәбул етсәк,}$$

$$a_{mк} = \mu_1 a_{1к} + \dots + \mu_{m-1} a_{(m-1)к} + \mu_{m+1} a_{(m+1)к} +$$
$$+ \dots + \mu_n a_{nк} \quad (4)$$
$$(к = 1, 2, \dots, n)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу бәрабәрликләри

$$B_m = \mu_1 B_1 + \dots + \mu_{m-1} B_{m-1} + \mu_{m+1} B_{m+1} + \dots + \lambda_n B_n \quad (5)$$

кими јазаг. *Әкәр (5) бәрабәрлији (вә ја (4) бәрабәрликләри) өдәниләрсә, онда дејирләр ки, B_m сәтри $B_1, \dots, B_{m-1}, B_{m+1}, \dots, B_n$ сәтирләринин хәтти комбинасијасыдыр.*

Теорем 1. ***$B_1, B_2, \dots, B_n$ сәтирләринин хәтти асылы олмасы үчүн онларын һеч олмаса биринин јердә галанларынын хәтти комбинасијасы олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Шәртин зәрурилији. (1) сәтирләри хәтти асылыдырса, онда (3) бәрабәрлији өдәниләр вә $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ әдәдләринин һеч олмаса бири, мәсәлән λ_m сыфырдан фәргли олар. Бу һалда, јухарыда

(3) бәрабәрлијиндән (5) бәрабәрлијинин алынмасыны көстәрдик, бу да B_m сәтринин јердә галан сәтирләрин хәтти комбинасијасы олдуғуну көстәрир.

Шәртин кафилији. Тутаг ки, B_m сәтри јердә галан сәтирләрин хәтти комбинасијасыдыр, јә'ни (5) бәрабәрлији доғрудур. Онда һәмин бәрабәрлији

$$\mu_1 B_1 + \ldots + \mu_{m-1} B_{m-1} + (-1)\cdot B_m + \mu_{m+1} B_{m+1} + \ldots + \mu_n B_n = 0$$

шәклиндә јазмаг олар, бу да (1) сәтирләринин хәтти асылы олмасыны көстәрир.

A матрисинин вә ја $\Delta(A)$ детерминантынын сәтирләринин хәтти асылы олмасы вә ја олмамасы һаггында дедикләримизин һамысыны онларын сүтунлары һаггында да демәк олар.

Теорем 2. ***Икитәртибли***

$$\Delta(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

детерминантынын сәтирләринин (сүтунларынын) хәтти асылы олмасы үчүн онун сыфра бәрабәр олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, $\Delta(A_2)$ детерминантынын сәтирләри хәтти асылыдыр. Онда онун бирини, мәсәлән, икинчи сәтринин елементләрини

$$a_{21} = \lambda a_{11}, \qquad a_{22} = \lambda a_{12}$$

кими көстәрмәк олар. Бу һалда

$$\Delta(A_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Шәртин кафилији. Тутаг ки, $\Delta(A_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Әкәр $\Delta(A_2)$ детерминантынын бүтүн елементләри сыфра бәрабәрдирсә, онда сәтирләрин хәтти асылы олмасы ашкардыр. Буна көрә дә фәрз едәк ки, елементләрин бири, мәсәлән, a_{11} сыфырдан фәрглидир: $a_{11} \neq 0$. Шәртә әсасән алынан

$$a_{22} = \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}$$

бәрабәрлијиндә $\frac{a_{21}}{a_{11}} = \lambda$ ишарәсини гәбул етсәк,

$$a_{22} = \lambda a_{12} \quad \text{вә} \quad a_{21} = \lambda a_{11}$$

бәрабәрликләрини аларыг, бу да $\Delta(A_2)$ детерминанты сәтирләринин хәтти асылы олдуғуну көстәрир.

Јүксәк тәртибли детерминантлар үчүн бу теореми ашағыдакы шәкилдә сөјләмәк олар.

Теорем 3. ***n-тәртибли $\Delta(A)$ детерминантынын сәтирләринин (сүтунларынын) хәтти асылы олмасы үчүн онун сыфра бәрабәр олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Бу теорем 2-чи теорем кими исбат едилир.

§ 6. ИКИ МАТРИС ҺАСИЛИНИН ДЕТЕРМИНАНТЫ

Тутаг ки, A вә B ејни тәртибли квадрат матрисләр, $\Delta(A)$ вә $\Delta(B)$ исә онларын детерминантларыдыр.

Теорем. ***А вә В матрисләри һасилинин детерминаты онларын детерминантлары һасилинә бәрабәрдир:***

$$\Delta(AB) = \Delta(A)\cdot\Delta(B). \tag{1}$$

Теореми икитәртибли квадрат

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \quad \text{вә} \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}$$

матрисләринин һасили үчүн исбат едәк. Онларын һасили

$$AB = \begin{Vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{Vmatrix}$$

олдуғундан

$$\Delta(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11}b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} +$$

$$+ b_{21}b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21}b_{22} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Сағ тәрәфә дахил олан биринчи вә ахырынчы детерминантлар сыфра бәрабәрдир (сүтунлары ејни олдуғу үчүн). Јердә галан детерминантлардан икинчисинин сүтунларынын јерини дәјишсәк:

$$\Delta(AB) = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}) \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta(A)\cdot\Delta(B)$$

вә јахуд тәләб олунан

$$\Delta(AB) = \Delta(A)\cdot\Delta(B)$$

бәрабәрлијини аларыг.

Јүксәк тәртибли матрисләр үчүн теоремин исбаты ејни гајда илә апарылыр.

Н ә т и ҹ ә. *Ејни тәртибли A вә B квадрат матрисләри үчүн һәмишә*

$$\Delta(AB) = \Delta(BA).$$

Буну нәзәрә алмаг лазымдыр ки, AB матриси BA матрисинә бәрабәр олмаја да биләр (§ 2).

§ 7. ТӘРС МАТРИС

Тутаг ки, A һәр һансы тәртибли квадрат матрис вә I һәмин тәртибли ваһид матрисдир. Бу һалда

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \tag{1}$$

бәрабәрлијини өдәјән A^{-1} матрисинә A матрисинин тәрси дејилир. (1) бәрабәрлији көстәрир ки, A^{-1} матриси A матрисинин тәрсидирсә, онда A матриси дә A^{-1} матрисинин тәрсидир:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \tag{2}$$

јә'ни A вә A^{-1} *матрисләри гаршылыглы тәрс матрисләрдир.*

A матрисинин тәрси варса, бу анҹаг јеканә ола биләр. Доғрудан да, A матрисинин A_1^{-1} вә A_2^{-1} кими ики тәрс матриси оларса, онда

$$A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = I - I = 0.$$

Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини солдан A_1^{-1} матрисинә вурсаг:

$$A_1^{-1}A(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = I(A_1^{-1} - A_2^{-1}) = A_1^{-1} - A_2^{-1} = 0$$

вә јахуд

$$A_1^{-1} = A_2^{-1}.$$

A матрисинин детерминанты $\Delta(A)$ олсун. $\Delta(I)=1$ олдуғундан (1) бәрабәрлијинә әсасән

$$\Delta(AA^{-1}) = \Delta(A)\cdot\Delta(A^{-1}) = 1$$

вә јахуд

$$\Delta(A)\cdot\Delta(A^{-1}) = 1,\quad \Delta(A^{-1}) = \frac{1}{\Delta(A)} \tag{3}$$

мүнасибәти доғрудур (§ 6). Бурадан ајдындыр ки, верилмиш A матрисинин A^{-1} тәрси олмасы үчүн $\Delta(A)\neq 0$ олмалыдыр. Бу тәклифин тәрси дә доғрудур. Демәли, *верилмиш A матрисинин тәрс*

A^{-1} матриси олмасы үчүн онун $\Delta(A)$ детерминантынын сыфырдан фәргли олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Детерминанты сыфра бәрабәр, јә'ни $\Delta(A)=0$ олан квадрат A матрисинә *чырлашмыш (вә ја мәхсуси) матрис* дејилир. Детерминанты сыфра бәрабәр олмајан квадрат A матрисинә *исә чырлашмамыш (вә ја гејри-мәхсуси) матрис* дејилир. Дедикләримиздән ајдындыр ки, чырлашмамыш матрисин тәрси вардыр.

Верилмиш матрисин тәрсини неҹә тапмаг олар?

Тутаг ки, икитәртибли чырлашмамыш

$$A_2 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$$

матриси верилмишдир. Бу матрисин тәрси:

$$A_2^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{A_{11}}{\Delta(A_2)} & \dfrac{A_{21}}{\Delta(A_2)} \\ \dfrac{A_{12}}{\Delta(A_2)} & \dfrac{A_{22}}{\Delta(A_2)} \end{Vmatrix} \text{ вә ја } A_2^{-1} = \frac{1}{\Delta(A_2)}\begin{Vmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{Vmatrix}$$

Бунун доғрулуғуна инанмаг үчүн $A_2A_2^{-1} = I$ олдуғуну јохламаг кифајәтдир.

Инди үчтәртибли чырлашмамыш $(\Delta(A_3)\neq 0)$

$$A_3 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

матрисини көтүрәк. Бу матрисин тәрси:

$$A_3^{-1} = \frac{1}{\Delta(A_3)}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Доғрудан да, бурада A_{ik} илә a_{ik} елементинин ҹәбри тамамлајычысы ишарә олундуғуну вә детерминантларын хассәсини нәзәрә алсаг:

$$A_3^{-1}A_3 = \frac{1}{\Delta(A_3)}\begin{Vmatrix} \Delta(A_3) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta(A_3) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta(A_3) \end{Vmatrix}$$

вә јахуд тәләб олунан

$$A_3^{-1}A_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = I_3$$

бәрабәрлијини аларыг.

Үчтәртибли (4) квадрат матрисинин (5) тәрсинин гурулма схеми чох садәдир: (4) матрисинин a_{ik} елементи онун ујғун A_{ik} чәбри тамамлајычысынын $\Delta(A_3)$ әдәдинә нисбәти илә әвәз олунур. Алынан матрисин чеврилмәси (баш диагонала нәзәрән чеврилмәси) (5) матрисинә бәрабәрдир. Һәмин гајда илә n-тәртибли чырлашмајан квадрат

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \quad (\Delta(A) \neq 0)$$

матрисинин

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

тәрс матрисини гурмаг олар.

Мисал.

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}, \qquad \Delta(A) = -15$$

матрисинин тәрс матриси:

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{Vmatrix} 10 & -5 & -5 \\ 1 & -5 & 7 \\ -4 & 5 & 2 \end{Vmatrix}.$$

§ 8. МАТРИСИН РАНГЫ

Тутаг ки, $(m \times n)$-өлчүлү

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

матриси верилмишдир. Бу матрисин ихтијари k сајда сәтринин ихтијари k сајда сүтуну илә кәсишдији елементләр k-тәртибли бир квадрат матрис тәшкил едир. Бу k-тәртибли матрисин детерминантына A матрисинин *k-тәртибли минору* дејилир. Бурада k әдәди m вә n әдәдләринин кичијиндән бөјүк ола билмәз.

A матрисинин һеч олмаса бир елементи сыфырдан фәргли-дирсә, онда онун сыфырдан фәргли минорлары ичәрисиндә елә

бириси вардыр ки, онун тәртиби ән бөјүкдүр. A матрисинин сыфырдан фәргли минорлары тәртибләринин ән бөјүјүнә һәмин *матрисин рангы* дејилир.

A матрисинин рангыны $r(A)$ илә ишарә етсәк, онун үчүн

$$0 \leqslant r(A) \leqslant \min(m, n) \tag{1}$$

бәрабәрсизлији доғру олар. Ајдындыр ки, A матрисинин рангы r оларса, онда онун сыфырдан фәргли r-тәртибли минору вардыр вә тәртиби r-дән бөјүк олан бүтүн минорлары сыфра бәрабәрдир.

Рангы r олан A матрисинин сыфырдан фәргли олан r-тәртибли миноруна онун *базис минору* дејилир. A матрисинин сыфырдан фәргли бир нечә r-тәртибли минору ола биләр. Бу һалда, һәмин минорларын һәр бири һәмин матрисин базис минору олур.

A матрисинин, кәсишмәләриндә базис минорун елементләри јерләшән сәтир вә сүтунларына *базис сәтирләри* вә *базис сүтунлары* дејилир. Базис минору, базис сәтир вә сүтунлары һаггында ашағыдакы кими тәклиф вардыр:

Теорем *(базис минору һаггында теорем). Базис сәтирләри (сүтунлары) хәтти асылы дејилдир. А матрисинин истәнилән сәтри (сүтуну) онун базис сәтирләринин (сүтунларынын) хәтти комбинасијасыдыр.*

Бу теоремдән истифадә едәрәк көстәрмәк олар ки, A матрисинин хәтти асылы олмајан сәтирләринин сајы (әлбәттә, максимал сајы) онун рангына бәрабәрдир.

Мисал 1.

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$$

матрисинин детерминанты $\Delta(A) = -15 \neq 0$ олдуғундан онун рангы: $r(A) = 3$.

Мисал 2.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{Vmatrix}$$

матрисинин бүтүн үчтәртибли минорлары сыфра бәрабәрдир:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

Лакин онун икитәртибли

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

минору сыфырдан фәрглидир. Демәли, матрисин рангы: $r(A)=2$.

II ФӘСИЛ

ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИ

§ 1. ИКИМӘЧҺУЛЛУ ИКИ ХӘТТИ ТӘНЛИК СИСТЕМИ

I. Тутаг ки, икимәчһуллу ики хәтти тәнлик системи верилмишдир:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Тәнликләрин сағ тәрәфи олан b_1 вә b_2 әдәдләринин икиси дә сыфра бәрабәр, јә'ни $b_1 = b_2 = 0$ оларса, онда һәмин системә *бирчинсли хәтти тәнликләр системи* дејилир. b_1 вә b_2 әдәдләринин һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олдугда (1) системинә *бирчинсли олмајан хәтти тәнликләр системи* дејилир. Системә дахил олан тәнликләрин һәр бирини өдәјән $x = x_0$, $y = y_0$ гијмәтләр чохлуғуна һәмин *системин һәлли* дејилир.

Верилмиш системин һәлли ола да биләр, олмаја да биләр; системин һәлли варса, она *ујушан* вә ја *биркә систем*, әкс һалда исә *ујушмајан* вә ја *биркә олмајан систем* дејилир. Тәнликләр системи ујушан олдугда онун бир вә ја бирдән чох һәлли ола биләр.

Орта мәктәбин ријазијјат курсундан мә'лумдур ки, верилмиш тәнликләр системи әвәзетмә үсулуну, мәчһулларын јох едилмәси үсулуну, хәтти чевирмә үсулуну вә с. тәтбиг етмәклә һәлл олунур. Бу заман верилмиш тәнликләр системи онунла ејникүчлү (вә ја еквивалент) олан садә тәнликләр системинә кәтирилир вә сонра да һәмин системи һәлл етмәклә верилмиш тәнликләр системинин һәлли тапылыр.

Тәнликләр системини хәтти чевирмә үсулу илә һәлл едәркән бә'зән сәһв мүһакимә апарылдығындан һәмин үсул һаггында әввәлчә әлавә мә'лумат верməји лазым билирик.

II. Тутаг ки,

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

системинин тәнликләрини верилмиш λ_1, λ_2, μ_1 вә μ_2 әдәдләринә нөвбә илә вуруб топламагла

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y) = 0, \\ \mu_1 f_1(x, y + \mu_2 f_2(x, y) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

тәнликләр системи алынмышдыр. Бу һалда дејирләр ки, (3) системи (2) тәнликләр системиндән хәтти чевирмә васитәсилә алынмышдыр.

$$d = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2$$

әдәдинә һәмин хәтти чевирмәнин детерминанты дејилир.

Тәбии бир суал гаршыја чыхыр: (2) вә (3) системләри ејникүчлүдүрмү?

Теорем.

$$d = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (4)$$

оларса, онда (2) системи (3) системи илә ејникүчлүдүр.

Исбаты. (2) системинин һәлли (x_0, y_0) олсун. Онда

$$f_1(x_0, y_0) = 0, \quad f_2(x_0, y_0) = 0$$

доғру әдәди бәрабәрликләрдир. Бурадан, ихтијари λ_1, λ_2, μ_1 вә μ_2 әдәдләри үчүн доғру олан

$$\lambda_1 f_1(x_0, y_0) + \lambda_2 f_2(x_0, y_0) = 0,$$
$$\mu_1 f_1(x_0, y_0) + \lambda_2 f_2(x_0, y_0) = 0$$

бәрабәрликләри алынар ки, бу да (x_0, y_0) әдәдләри чүтүнүн (3) системинин һәлли олдуғуну көстәрир.

Ејни гајда илә дә (4) шәрти өдәнилдикдә (3) системинин һәр бир (x_0, y_0) һәлли (2) системинин дә һәлли олдуғуну исбат етмәк олар.

Аналожи теорем n мәчһуллу n тәнлик системи һаггында да доғрудур.

Гејд. (4) шәрти өдәнилмәдикдә (2) вә (3) системләри ејникүчлү олмаја да биләр. Мәсәлән,

$$\left.\begin{aligned} x + 3y - 10 = 0, \\ 2x - y + 1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

тәнликләр системи, ондан детерминанты

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

олан хәтти чевирмә илә алынан

$$\left.\begin{aligned} 5x + y - 8 = 0, \\ 10x + 2y - 16 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

тәнликләр системи илә ејникүчлү дејилдир. (5) системинин јеканә (1, 3) һәлли (6) системинин дә һәллидир. Лакин (6) системинин (2, —2), (3, —7) вә с. кими чох (сонсуз сајда) һәлләри вар ки, онлар (5) системинин һәлли дејилдир.

III. (1) системини $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ олдугда һәлл етмәк үчүн онун биринчи тәнлијинин һәр ики тәрәфини a_{22}, икинчи тәнлијинин һәр ики тәрәфини исә $(-a_{12})$ әдәдинә вуруб топламаг, сонра да биринчи тәнлијин һәр ики тәрәфини $(-a_{21})$, икинчи тәнлијин исә һәр ики тәрәфини a_{11} әдәдинә вуруб топламаг лазымдыр. Онда

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x &= b_1a_{22} - b_2a_{12},\\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x &= a_{11}b_2 - b_1a_{21}\end{aligned}\right\}$$

вә јахуд

$$\left.\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} x &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} y &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}$$

системини аларыг. Бурадакы икитәртибли детерминантлары

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$$

илә ишарә етсәк, сонунчу системи

$$\left.\begin{aligned}\Delta\cdot x &= \Delta_1\\ \Delta\cdot y &= \Delta_2\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

кими јазмаг олар. $\Delta \neq 0$ олдуғундан (1) вә (7) системләри еквивалентдир. Буна көрә дә (7) системинин јеканә

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} \tag{8}$$

һәлли (1) системинин дә јеканә һәлли олур.

(8) дүстурларына *Крамер*[1] *дүстурлары*, Δ детерминантына исә *(1) системинин детерминанты* дејилир.

Беләликлә, исбат етмиш олуруг ки, (1) системинин Δ детерминанты сыфырдан фәргли олдугда һәмин системин јеканә һәлли вар вә бу һәлл (8) Крамер дүстурлары васитәсилә тапылыр. Буна *Крамер гајдасы* дејилир.

IV. Инди (1) системинин Δ детерминанты сыфыр олан һала бахаг.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix} = 0$$

олдугда мә'лум теоремә (I, § 5) көрә:

$$a_{21} = \lambda a_{11}, \quad a_{22} = \lambda a_{12}. \tag{9}$$

[1] Габријел Крамер (1704—1752) исвечрә ријазијјатчысыдыр.

Онда (1) системинин икинчи тәнлијинин сол тәрәфи биринчи тәнлијин сол тәрәфини λ әдәдинә вурмагла алынар:

$$a_{21}x + a_{22}y = \lambda(a_{11}x + a_{12}y). \tag{10}$$

Бурадан ашағыдакы кими нәтичәләр алырыг:

1. *Әкәр (1) системинин сағ тәрәфиндәки b_1 вә b_2 әдәдләри (9) мүнасибәтинә ујғун*

$$b_2 = \lambda b_1 \tag{11}$$

мүнасибәтини өдәјәрсә, онда (1) системинин икинчи тәнлији биринчи тәнлијиндән λ әдәдинә вурулмагла алынар. Бу һалда системин биринчи тәнлијинин һәр бир һәлли икинчи тәнлијинин вә буна көрә дә (1) системинин һәлли олар.

Системин биринчи

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1 \tag{12}$$

тәнлијинин исә сонсуз сајда һәлли вар: дәјишәнин биринә ихтијари гијмәтләр верәрәк (12) тәнлијиндән икинчи дәјишәнин гијмәтләрини тапсаг, онда тапылан әдәдләр (12) тәнлијинин һәлли олар.

Демәли, бу һалда (1) системинин сонсуз сајда һәлли вар.

2. *Әкәр b_1 вә b_2 әдәдләри (11) мүнасибәтини өдәмәзсә, јә'ни $b_2 \neq \lambda b_1$ оларса, онда (1) системинин һәлли олмаз.* Чүнки, бу һалда, системин биринчи

$$a_{11}x + a_{12}y \equiv b_1$$

тәнлијини өдәјән һеч бир $x = x_0$ вә $y = y_0$ әдәдләри икинчи тәнлијини өдәјә билмәз:

$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 \equiv \lambda b_1 \neq b_2.$$

Дедикләримизә әсасән белә бир нәтичә алырыг: (1) системинин детерминанты сыфырдан фәргли ($\Delta \neq 0$) олдугда һәмин системин јеканә һәлли вар, системин детерминанты сыфыр олдугда исә һәмин системин ја сонсуз сајда һәлли вар, ја да һеч бир һәлли јохдур.

Нәтичә. $\Delta \neq 0$ *олдугда*

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y &= 0,\\ a_{21}x + a_{22}y &= 0\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

бирчинсли хәтти тәнликләр системинин јеканә $x = 0$, $y = 0$ һәлли (сыфыр һәлли) вар. $\Delta = 0$ олдугда исә (13) системинин сонсуз сајда сыфыр олмајан һәлли олар.

§ 2. ҮЧМӘЧҺУЛЛУ ҮЧ ХӘТТИ ТӘНЛИК СИСТЕМИ

Үчмәчһуллу үч хәтти тәнлик системи

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1,\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2,\\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

шәклиндә јазыла биләр. $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ олдугда (1) системиндән *бирҹинсли хәтти тәнликләр системи* алыныр. b_1, b_2, b_3 әдәдләринин һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олдугда (1) системинә *бирҹинсли олмајан хәтти тәнликләр системи* дејилир.

(1) системинин һәр бир тәнлијини доғру әдәди бәрабәрлијә (ејнилијә) чевирән $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ гијмәтләр чохлуғу һәмин *системин һәлли* адланыр. Системин һәлли варса, она *ујушан*, һеч бир һәлли олмадыгда исә она *ујушмајан (ујушан олмајан) систем* дејилир.

Верилмиш (1) системини һәлл етмәк үчүн һәмин системин детерминантыны:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

илә, детерминантын a_{ik} елементинин ҹәбри тамамлајычысыны исә A_{ik} илә ишарә едәк. (1) системинин биринҹи тәнлијини A_{11}-ә икинҹи тәнлијини A_{21}-ә, үчүнҹү тәнлијини A_{31}-ә вуруб, алынан бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топласаг

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) \cdot x + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) \cdot y + \\ + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) \cdot z = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} \quad (2)$$

бәрабәрлијини аларыг. Детерминантларын сәтир вә сүтун елементләри үзрә ајрылмасы хассәсинә (I, §§ 3, 4) көрә:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$
$$0 = a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31},$$
$$0 = a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}.$$

Онда (2) бәрабәрлији

$$\Delta \cdot x = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}$$

шәклиндә јазылар.

Ејни гајда илә дә (1) системинин тәнликләрини әввәлҹә ујғун олараг A_{12}, A_{22}, A_{32} әдәдләринә, сонра да A_{13}, A_{23}, A_{33} әдәдләрини вуруб алынан бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә топласаг

$$\Delta \cdot y = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}$$

вә

$$\Delta \cdot z = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}$$

бәрабәрликләрини аларыг. Беләликлә, (1) системи әвәзинә

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}, \\ \Delta y &= b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}, \\ \Delta z &= b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

системи алыныр.

$\Delta \neq 0$ олдугда (1) вә (3) системләри еквивалентдир. (3) системинин сағ тәрәфиндәки әдәдләр Δ детерминантынын биринҹи сүтун елементләрини ујғун олараг b_1, b_2, b_3 әдәдләри илә, сонра исә икинҹи сүтун елементләрини b_1, b_2, b_3 әдәдләри илә вә нәһајәт, үчүнҹү сүтун елементләрини јенә дә һәмин әдәдләрлә әвәз етмәклә алындығындан:

$$\Delta_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Онда (3) системи

$$\left.\begin{aligned} \Delta \cdot x &= \Delta_1, \\ \Delta \cdot y &= \Delta_2, \\ \Delta \cdot z &= \Delta_3 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

кими јазылар. $\Delta \neq 0$ олдугда бу системин јеканә һәлли вар:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad (5)$$

Демәли, $\Delta \neq 0$ олдугда (1) системинин јеканә һәлли вар вә бу һәлл (5) дүстурлары васитәсилә тапылыр. (5) дүстурларына *Крамер дүстурлары* дејилир.

Инди дә $\Delta = 0$ олдугда (1) системинин һәллинин варлығы мәсәләсини тәдгиг едәк. Тутаг ки, $\Delta = 0$ вә онун икитәртибли минорларындан һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир. Онда Δ детерминантынын сәтирләриндән бири, мәсәлән, үчүнҹүсү јердә галан ики сәтринин хәтти комбинасијасы олар (I, § 5). Бу һалда (1) системинин үчүнҹү тәнлијинин сол тәрәфи дә биринҹи вә икинҹи тәнликләрин сол тәрәфләринин хәтти комбинасијасына бәрабәр олар:

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = \lambda_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + \\ + \lambda_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z). \quad (6)$$

Әкәр (1) системинин сағ тәрәфләри дә буна охшар ујғун мүнасибәти, јә'ни

$$b_3 = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 \quad (7)$$

мүнасибәтини өдәјәрсә, онда (1) системинин хәтти асылы олмајан ики тәнлији олар, үчүнчү тәнлији исә бу ики тәнлијин нәтичәси кими алынар. Бу һалда (1) системинин һәлли үчмәчһуллу ики хәтти

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1,\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{array}\right\} \qquad (8)$$

тәнликләр системинин һәллинә кәтирилмиш олар. (8) системинин исә сонсуз сајда һәлли вар. Бу һәлләри тапмаг үчүн (8) системиндә мәчһулун бирини сағ тәрәфә кечириб она ихтијари гијмәтләр вермәк вә алынан системләрдән јердә галан ики дәјишәнин гијмәтләрини тапмаг лазымдыр.

Бу һалда Δ детерминанты илә бирликдә Δ_1, Δ_2 вә Δ_3 детерминантлары да сыфра бәрабәр олар.

Әкәр (1) системи тәнликләринин сол тәрәфләри (6) мүнасибәтини өдәјәркән сағ тәрәфләри (7) мүнасибәтини өдәмәзсә, јә'ни

$$b_3 \neq \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

оларса, онда һәмин системин һеч бир һәлли олмаз. Бу һалда Δ_1, Δ_2 вә Δ_3 детерминантларынын һеч олмаса бири сыфырдан фәрглидир.

Системин Δ детерминанты сыфыр олдугда онун бүтүн икитәртибли минорлары сыфыр олуб, сыфырдан фәргли һеч олмаса бир елементи оларса, онда јенә дә (1) системинин ја сонсуз сајда һәлли олар, ја да һеч бир һәлли олмаз.

Дедикләримизә әсасән бирчинсли хәтти

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0,\\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0,\\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{array}\right\} \qquad (9)$$

тәнликләр системинин һәлли һаггында да мүәјјән нәтичәләр алыныр. (9) системинин Δ детерминанты сыфырдан фәргли оларса, онда Крамер гајдасына көрә һәмин системин јеканә ($x=0$, $y=0$, $z=0$) сыфыр һәлли олар. Системин детерминанты сыфра бәрабәр олдугда исә (9) тәнликләринин сол вә сағ тәрәфләри ујғун олараг (6) вә (7) мүнасибәтләрини өдәјәр. Буна көрә дә һәмин системин сонсуз сајда һәлли, о чүмләдән сыфырдан фәргли һәлли олар.

Беләликлә, ашағыдакы нәтичәни алмыш оларыг: *бирчинсли системин сыфырдан фәргли һәллинин олмасы үчүн һәмин системин Δ детерминантынын сыфра бәрабәр олмасы зәрури вә кафи шәртдир.*

§ 3. ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИНИН МАТРИС ШӘКЛИНДӘ ЈАЗЫЛМАСЫ

Тутаг ки, A вә B верилмиш матрисләрдир вә матрисләрлә јазылмыш

$$AX = B \qquad (1)$$

тәнлијиндән X матрисини тапмаг тәләб олунур.

(1) тәнлијинә *матрис тәнлик* дејилир. A матрисинин детерминанты $\Delta(A) \neq 0$ оларса, онда онун A^{-1} тәрс матриси вар. Бу һалда (1) тәнлијинин һәр ики тәрәфини солдан A^{-1} матрисинә вурсаг, X матрисини тапарыг:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad IX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Хәтти тәнликләр системини дә (1) матрис тәнлији шәклиндә јазыб һәлл етмәк олар. Тутаг ки, n мәчһуллу n хәтти тәнликләр системи верилмишдир:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Бу системи матрис шәклиндә јазаг:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{Vmatrix}. \qquad (2)$$

Әкәр мәчһулларын әмсалларындан дүзәлмиш матриси A, сағ тәрәфдәки мә'лум әдәдләрдән дүзәлмиш сүтун-матриси B, ахтарылан мәчһуллардан дүзәлмиш сүтун-матриси X илә ишарә етсәк, јә'ни

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{Vmatrix};$$

онда (2) системини

$$AX = B \qquad (3)$$

матрис тәнлик шәклиндә јаза биләрик. $\Delta(A) \neq 0$ олдугда (3) матрис тәнлијинин һәллини јухарыда тапмышдыг:

$$X = A^{-1}B. \qquad (4)$$

Мә'лумдур ки, $\Delta(A) \neq 0$ олдугда (1) системинин A матрисинин тәрси

1349—3

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

матрисидир (I, § 7). Онда бу матриси B матрисинә солдан вурмагла (4) бәрабәрлијинә әсасән X матрисини тапмаг олар:

$$X=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{Vmatrix} A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n \end{Vmatrix} \qquad (5)$$

Бу бәрабәрлијин сол вә сағ тәрәфләри ејни өлчүлү сүтун-матрисләр олдуғундан онларын ујғун елементләри бәрабәрдир:

$$x_1=\frac{A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n}{\Delta(A)}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$x_2=\frac{A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n}{\Delta(A)}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (6)$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$x_n=\frac{A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\dots+A_{nn}b_n}{\Delta(A)}=\frac{1}{\Delta(A)}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(n-1)} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2(n-1)} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{n(n-1)} & b_n \end{vmatrix}.$$

Бу дүстурлар Крамер дүстурларыдыр. Беләликлә, биз исбат етдик ки, (1) системинин $\Delta(A)$ детерминанты сыфырдан фәргли олдугда һәмин системин јеканә һәлли вар вә бу һәлл (6) Крамер дүстурлары васитәсилә тапылыр.

$n=2$ олдугда (6) дүстурлары 1-чи параграфда икимәчһуллу ики хәтти тәнлик системинин һәлли үчүн тапдығымыз (8) Крамер дүстурлары илә, $n=3$ олдугда исә үчмәчһуллу үч хәтти тәнлик системинин һәлли үчүн § 2-дә алдығымыз (5) Крамер дүстурлары илә үст-үстә дүшүр. $b_1=b_2=\dots=b_n=0$ олдугда (1) хәтти тәнликләр системи

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n&=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n&=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

бирчинсли хәтти тәнликләр системинә чевриләр.

Үчмәчһуллу үч хәтти тәнлијин бирчинсли системинин һәлли һаггында әввәлки параграфда алдығымыз нәтичәләр ујғун шәкилдә (7) системинин һәлли һаггында да доғрудур. Хүсуси һалда, (7) системинин сыфырдан фәргли һәллинин варлығы һаггында ашағыдакы тәклифи сөјләмәк олар: ***(7) бирчинсли системинин сыфырдан фәргли һәллинин олмасы үчүн һәмин системин Δ детерминантынын сыфра бәрабәр олмасы зәрури вә кафидир.***

Мисал. Үчмәчһуллу үч хәтти тәнлик системини Крамер дүстурлары илә һәлл един:

$$\left.\begin{aligned} x_1-x_2+x_3&=5, \\ 2x_1+x_2+x_3&=6, \\ x_1+x_2+2x_3&=4. \end{aligned}\right\}$$

Системин детерминанты

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=5\neq 0$$

олдуғундан (6) дүстурларыны тәтбиг етмәк олар ($n=3$). Бу һалда,

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=15, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-5$$

вә

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=5$$

олдуғундан:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=3, \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-1, \quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=1$$

§ 4. МАТРИСЛӘРИН МӘХСУСИ ӘДӘДЛӘРИ ВӘ МӘХСУСИ ВЕКТОРЛАРЫ

Тутаг ки, n-тәртибли квадрат

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

матриси верилмишдир вә

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right\|$$

намә'лум сүтун-матрисдир. Бу матрисләр дахил олан

$$AX = \lambda X \qquad (1)$$

тәнлијинә бахаг. Бу тәнлијин λ әдәдинин истәнилән гијмәтиндә $X=0$ (сыфыр сүтун-матрис) матриси өдәјир. Бизи (1) тәнлијинин белә һәлли, јә'ни сыфыр вә ја тривиал һәлли марагландырмыр.

Елә λ әдәдләри тапаг ки, (1) тәнлијинин сыфыр олмајан һәлли олсун. λ әдәдинин бу гијмәтләринә *А матрисинин мәхсуси* вә ја *характеристик әдәдләри* дејилир. λ әдәди A матрисинин мәхсуси әдәди олдугда (1) тәнлијинин һәлли олан X матриси A матрисинин *мәхсуси вектору* адланыр.

Верилмиш A матрисинин мәхсуси әдәдләри вә мәхсуси векторларыны тапмаг үчүн ваһид I матрисиндән истифадә едәрәк, (1) тәнлијини

$$AX = \lambda IX$$

вә јахуд

$$(A-\lambda I)X = 0 \qquad (2)$$

шәклиндә јазаг. Матрис шәклиндә јазылмыш (2) системини ачыг шәкилдә ашағыдакы кими јаза биләрик:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,\\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Мә'лумдур ки, n мәчһуллу n хәтти тәнлијин (3) бирчинсли системинин сыфырдан фәргли һәллинин олмасы үчүн һәмин системин $\Delta(A-\lambda I)$ детерминантынын сыфра бәрабәр олмасы зәрури вә кафи шәртдир:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Бу тәнлијә A матрисинин *характеристик тәнлији* дејилир. (4) характеристик тәнлијинин сол тәрәфи A матрисинин *характеристик чохһәдлиси* адланыр вә

$$D_n(\lambda) = \Delta(A-\lambda I)$$

илә ишарә олунур. Характеристик чохһәдли λ кәмијјәтинә нәзәрән n-дәрәчәли чәбри чохһәдлидир. Онун n сајда (һәгиги вә ја комплекс) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ көкү (k дәфә тәкрарланан көк k сајда көк һесаб олунур) олар.

Демәли, n-тәртибли квадрат A матрисинин n сајда мәхсуси әдәди вардыр. Матрисин бүтүн мәхсуси әдәдләри чохлуғуна һәмин *матрисин спектри* дејилир.

Верилмиш A матриси үчтәртибли олдугда онун характеристик тәнлији

$$D_3(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

кими олар. Бу исә λ кәмијјәтинә нәзәрән үчдәрәчәли чәбри тәнликдир. Онун $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ кими үч көкү олар.

$D_3(\lambda)$ характеристик чохһәдлисини һесабласаг:

$$D_3(\lambda) = -\lambda^3 + P_1\lambda^2 + P_2\lambda + P_3,$$

бурада $P_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $P_2 = (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) + (a_{13}a_{33} - - a_{11}a_{33}) + (a_{23}a_{32} - a_{22}a_{33})$

вә

$$P_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Матрисин баш диагонал елементләринин чәминә һәмин *матрисин изи* дејилир вә

$$\operatorname{Sp} A = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

илә ишарә олунур. Үчтәртибли A матриси үчүн

$$\operatorname{Sp} A = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Симметрик матрисләрин бүтүн мәхсуси әдәдләри һәгигидир. Буну икитәртибли симметрик

$$A_2 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{matrix} \right\|$$

матриси үчүн исбат едәк. Бу матрисин характеристик тәнлији

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

вә ја

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \qquad (6)$$

олачагдыр. (6) квадрат тәнлијинин көкләрини тапаг:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2 - a_{11}a_{22} + a_{12}^2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11}-a_{22})^2}{4} + a_{12}^2}.$$

Бурадан көкләрин һәгиги әдәдләр олмасы ашкардыр.

§ 5. ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИНИН ГАУСС ҮСУЛУ ИЛӘ ҺӘЛЛИ

Тутаг ки, хәтти тәнликләр системи верилмишдир:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Бу системин детерминанты сыфырдан фәргли олдугда ону Крамер гајдасы илә (§ 3) һәлл етмәк олар. Лакин бу һалда $n+1$ сајда n-тәртибли детерминант һесабламаг лазым кәлир ки, бу да бөјүк һесаблама иши тәләб едир.

Верилмиш хәтти тәнликләр системиндә мәчһулларын сајы тәнликләрин сајына бәрабәр олмадыгда, јә'ни систем

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

шәклиндә олдугда исә онун һәллинә Крамер гајдасыны билаваситә тәтбиг етмәк олмур.

Буна көрә дә, (2) (вә һәм дә (1)) шәклиндә хәтти тәнликләр системини чох заман мәчһулларын ардычыл јох едилмәси үсулу вә ја Гаусс үсулу илә һәлл едирләр. Бу үсулун мәзмуну беләдир: тутаг ки, $a_{11} \neq 0$. Онда системин биринчи тәнлијинин һәр ики тәрәфини $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ әдәдинә вурараг, алынан

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1m}\cdot a_{21}}{a_{11}}x_m = b_1\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

тәнлијини системин икинчи тәнлијиндән тәрәф-тәрәфә чыхырыг. Алдығымыз тәнликдә x_1 мәчһулу иштирак етмир:

[1] Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) мәшһур алман ријазијјатчысыдыр. Мүасирләри Гаусса «Ријазијјатын шаһы» адыны вермишдиләр.

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2m}x_m = b'_2.$$

Сонра системин биринчи тәнлијинин һәр ики тәрәфини $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ әдәдинә вурараг алынан тәнлији системин үчүнчү тәнлијиндән тәрәф-тәрәфә чыхырыг. Бу мүһакимәни ардычыл тәтбиг етмәклә (2) системини

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2m}x_m &= b'_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a'_{n2}x_2 + \ldots + a'_{nm}x_m &= b'_n \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

шәклиндә системә кәтирмәк олар. Алдығымыз јени системин 2-чи, 3-чү вә с. тәнликләриндән истифадә етмәклә јухарыда көстәрдијимиз үсулла x_2 мәчһулуну да јох етмәк олур. Бу мүһакимәни ардычыл олараг тәтбиг етмәклә (2) системини она еквивалент олан

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a''_{22}x_2 + a''_{23}x_3 + \ldots + a''_{2m}x_m &= b''_2, \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3m}x_m &= b''_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

шәклиндә системә кәтирмәк мүмкүндүр.

(4) системинә *пилләвары* (вә ја *пилләләр шәклиндә) систем*, a_{11}, a''_{22}, a''_{33} вә с. әмсалларына исә системин *баш елементләри* дејилир. Ајдындыр ки, системә Гаусс үсулунун тәтбиг олуна билмәси үчүн системин баш елементләринин сыфырдан фәргли олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Гејд едәк ки, (2) системинин чеврилмәси нәтичәсиндә алынан (4) системи ујушан вә ја ујушмајан ола биләр. Биринчи һалда (4) системини һәлл едәрәк (2) системинин ахтарылан һәлләри тапылыр. (4) системи ујушмајан олдугда (мәсәлән, системдә сол тәрәфдәки бүтүн әмсаллары сыфыр олан, лакин сағ тәрәфи сыфыр олмајан $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_m = b$, $(b \neq 0)$ шәклиндә тәнлик алындыгда) (2) системи дә ујушмајан олар.

Гејд едәк ки, (4) системи ујушан олдугда ики һалдан анчаг бири мүмкүндүр: һәмин системин ја јеканә һәлли вар, ја да сонсуз сајда һәлли вар. Һесаблама заманы һеч бир јуварлаглашдырма апарылмајыбса, онда Гаусс үсулу илә тапылмыш һәлл дәгиг олур.

(2) системини Гаусс үсулу илә һәлл едәркән тәнликләр үзәриндә апарылан әмәлләри бә'зән онларын әмсалларындан дүзәлмиш

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{matrix} \right\|$$

матриси үзәриндә апармаг даһа мүнасиб олур.

Гаусс үсулуну тәтбиг етмәклә ашағыдакы тәнликләр системини һәлл едәк:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Системин биринчи тәнлијинин һәр ики тәрәфини 2-јә вурараг алынан бәрабәрлији ујғун олараг икинчи вә дөрдүнчү тәнликдән тәрәф-тәрәфә чыхаг; сонра да биринчи тәнлијин һәр ики тәрәфини 3-ә вурараг алынан тәнлији 3-чү тәнликдән тәрәф-тәрәфә чыхаг; нәтичәдә (5) системинә еквивалент олан

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 1, \\ -5x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= 0, \\ -4x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= -8, \\ -7x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 9 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

тәнликләр системини аларыг. Бу системин икинчи тәнлијиндән үчүнчү тәнлијини тәрәф-тәрәфә чыхсаг вә алынан бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини —1-ә вурсаг, нәтичәдә (6) системини

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= -8, \\ -4x_2 + 8x_3 - 4x_4 &= -8, \\ -7x_2 + 8x_3 - 3x_4 &= 9 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

тәнликләр системи илә әвәз етмиш олуруг. (7) системинин икинчи тәнлијинин һәр ики тәрәфини әввәлчә (+4)-ә, сонра да (+7)-јә вуруб алынан бәрабәрликләри ујғун олараг үчүнчү вә дөрдүнчү тәнликләрлә топласаг

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= -8, \\ 24x_3 + 8x_4 &= -40, \\ 36x_3 + 18x_4 &= -47 \end{aligned}\right\}$$

тәнликләр системини аларыг. Һәмин үсулла бу системи дә

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= -8, \\ 24x_3 + 8x_4 &= -40, \\ 6x_4 &= 13 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

шәклинә кәтирмәк олар.

Ајдындыр ки, (5) хәтти тәнликләр системи илә (8) пилләвары хәтти тәнликләр системи еквивалентдир. (8) системини һәлл едәрәк, системин јеканә

$$x_1 = -\frac{11}{18}, \quad x_2 = -\frac{89}{18}, \quad x_3 = -\frac{43}{18}, \quad x_4 = \frac{13}{6}$$

һәллини (әввәлчә ахырынчы тәнликдән x_4, сонра үчүнчү тәнликдән x_3 вә с. тапылыр) тапарыг.

Гејд едәк ки, (5) системини Крамер гајдасы илә һәлл етмәк үчүн дөрдтәртибли 5 детерминант һесабламаг лазым иди.

III ФӘСИЛ

ВЕКТОРЛАР ЧӘБРИ

§ 1. СКАЛЈАР ВӘ ВЕКТОРИАЛ КӘМИЈЈӘТЛӘР

Физикада, ријазијјатда вә башга елмләрдә бахылан кәмијјәтләр ики нөв олур. Биринчи нөв кәмијјәтләр анчаг бир әдәдлә тамамилә тә'јин олунан кәмијјәтләрдир. Белә кәмијјәтләрә *скалјар кәмијјәтләр* вә ја садәчә олараг *скалјарлар* дејилир. Узунлуг, саһә, заман, һәчм, күтлә вә с. скалјар кәмијјәтләрә мисал ола биләр. Скалјар кәмијјәт, өз нөвүндән олан өлчү ваһиди илә мүгајисәсиндән алынан бир әдәдлә (әдәди гијмәти илә) тамамилә тә'јин олунур. Ријазијјатда өјрәнилән адсыз (мүчәррәд) әдәдләр дә скалјар кәмијјәтдир.

Икинчи нөв кәмијјәтләрин тамамилә тә'јин олунмасы үчүн бир әдәдин верилмәси кифајәт дејилдир. Белә кәмијјәтләрин тә'јин олунмасы үчүн әдәди гијмәтләриндән башга онларын истигамәтләри дә көстәрилмәлидир. Бу нөв кәмијјәтләрә *векториал кәмијјәтләр* вә јахуд садәчә олараг *векторлар* дејилир. Сүр'әт, гүввә, тә'чил, чисмин чәкиси вә с. векториал кәмијјәтләрә мисал ола биләр.

Бүтүн векториал кәмијјәтләрә мәхсус олан үмуми хассәләри өјрәнмәк үчүн ријазијјатда мүчәррәд векторлара, ријази векторлара бахылыр. Белә векторларын мәнфи олмајан әдәдләрлә ифадә олунан гијмәти (вә ја модулу) вә истигамәти вардыр. Ријази векторлары һәндәси олараг истигамәтләнмиш дүз хәтт парчасы илә көстәрмәк олар.

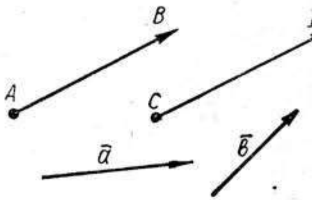
Һәр бир дүз хәтт парчасы ики нөгтә илә (уч нөгтәләри илә) тә'јин олунур. Бу парчанын истигамәтли олмасы үчүн һансы нөгтәнин башланғыч нөгтәси (садәчә башланғычы), һансынын исә уч нөгтәси вә ја гуртарачаг нөгтәси (садәчә сону) олдуғу көстәрилмәлидир.

Һәр бир вектор бир һәрфлә (үстүндә хәтт јазмагла) $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ вә с. кими, јахуд да ики бөјүк һәрфлә (үстүндә хәтт јазмагла) $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ вә с. кими ишарә олунур (1-чи шәкил). Вектор ики һәрфлә ишарә олундугда биринчи һәрф онун башланғычыны, икинчи һәрф исә

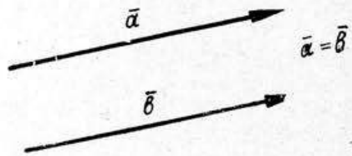
сонуну көстәрир. AB векторунун башланғычы A, сону исә B нөгтәсидир. Векторун башланғыч нөгтәсинә онун *тәтбиг нөгтәси* дә дејилир. Башланғыч вә сон нөгтәләри үст-үстә дүшән вектора *сыфыр вектор* дејилир. Сыфыр вектору $\bar{O}$ илә ишарә едәчәјик.

$\overline{AB}$ векторунун узунлуғу (вә ја $\overline{AB}$ дүз хәтт парчасынын узунлуғу) һәмин *векторун модулу* адланыр вә $|\overline{AB}|$ кими вә ја вектор бир һәрфлә ишарә олундугда $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$ вә с. кими ишарә олунур. Сыфыр векторун модулу сыфра бәрабәрдир.

Дедикләримиздән ајдындыр ки, векторун мә'лум олмасы үчүн онун модулу вә фәзада истигамәти верилмәлидир. Һәр бир вектору өзүнә паралел олараг истәнилән јерә көчүрмәк олар. Буна көрә дә, модуллары бәрабәр, бир-биринә паралел вә истигамәтләри ејни олан ики вектора *бәрабәр векторлар* дејилир (2-чи шәкил).



Шәкил 1.



Шәкил 2.

Бир дүз хәтт вә ја паралел дүз хәтләр үзәриндә јерләшән векторлара коллинеар векторлар дејилир. Бәрабәр векторлар коллинеар векторлардыр. Лакин коллинеар олан ики вектор бәрабәр олмаја да биләр. Сыфыр вектору истәнилән вектора коллинеар һесаб етмәк олар, чүнки сыфыр векторун модулу сыфырдыр, истигамәти исә гејри-мүәјјәндир.

Гејд. Бә'зән сәрбәст, сүрүшән вә бағлы векторлара бахылыр. Анчаг модулу вә истигамәти илә тә'јин олунан векторлара *сәрбәст векторлар* дејилир. Белә векторларын башланғыч вә ја тәтбиг нөгтәләри фәзанын истәнилән нөгтәсиндә ола биләр. Јухарыда бахдығымыз векторлар сәрбәст векторлардыр.

Векторун модулу вә истигамәтиндән башга онун үзәриндә јерләшдији дүз хәтт дә көстәрилдикдә һәмин вектора *сүрүшән вектор* дејилир. Белә векторун башланғычы анчаг һәмин дүз хәтт үзәриндә ола биләр.

Векторун тамамилә тә'јин олунмасы үчүн онун модулу вә истигамәтиндән башга тәтбиг нөгтәси дә көстәрилдикдә һәмин вектора *бағлы вектор* дејилир.

Биз бу китабда анчаг сәрбәст векторлара бахачағыг.

Бир мүстәви вә ја паралел мүстәвиләр үзәриндә јерләшән векторлара *компланар векторлар* дејилир.

§ 2. ВЕКТОРЛАР ҮЗӘРИНДӘ ӘМӘЛЛӘР

Верилмиш векторларын чәминдән, фәргиндән вә һәгиги әдәдә һасилиндән данышмаг олар.

Тә'риф. *Тутаг ки, $\bar{a} = \overline{AB}$ вә $\bar{b} = \overline{CD}$ векторлары верилмишдир. Бу векторлар үзәриндә ашағыда көстәрилән гајда илә гу-*

рулмуш $\bar{c} = \overline{AE}$ векторуна һәмин векторларын чәми дејилир вә $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ илә ишарә олунур.

$\overline{AE}$ векторуну гурмаг үчүн $\overline{CD}$ векторуна бәрабәр олан $\overline{BE}$ векторуну гурмаг вә сонра да A вә E нөгтәләрини бирләшдирмәк лазымдыр (3-чү шәкил).

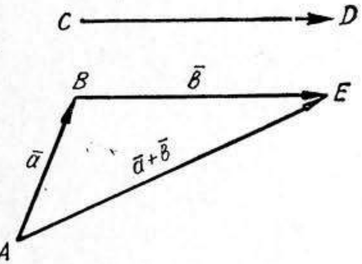
$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ вектору үзәринә јени $\bar{d}$ векторуну әлавә етмәк үчүн башланғычы E нөгтәси илә үст-үстә дүшән вә $\bar{d}$ векторуна бәрабәр олан јени вектор гуруб, A нөгтәсини һәмин векторун сон уч нөгтәси илә бирләшдирмәк лазымдыр. Алынан вектор $\bar{a}+\bar{b}+\bar{d}$ олар. Бу гајда илә истәнилән сајда векторларын чәмини тапмаг олар.

Векторларын чәми үчүн

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a},$$

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$$

вә с. хассәләри доғрудур. Истәнилән $\bar{a}$ вектору үзәринә $\bar{O}$ сыфыр векторуну әлавә етсәк, $\bar{a}$ вектору дәјишмәз.



Шәкил 3.

Тә'риф. *$\bar{a}$ векторунун һәгиги (скаләр) λ әдәдинә $\bar{a}\lambda = \lambda\bar{a}$ һасили ашағыдакы кими тә'јин олунан $\bar{b}$ векторуна дејилир:*

1) *$\bar{b}$ векторунун узунлуғу $|\bar{b}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$ олсун.*

2) *$\lambda > 0$ олдугда $\bar{b}$ векторунун истигамәти $\bar{a}$ вектору истигамәтинин ејни, $\lambda < 0$ олдугда исә $\bar{b}$ векторунун истигамәти $\bar{a}$ вектору истигамәтинин әксинә олсун.*

$\bar{b} = (-1)\bar{a}$ вектору $\bar{a}$ векторуна *гаршылыглы әкс олан вектор* адланыр вә $-\bar{a}$ илә ишарә олунур.

Векторларын һәгиги λ, μ вә с. әдәдләринә һасили үчүн

$$(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a},$$

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b},$$

$$\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a},$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)\bar{a} = \frac{\bar{a}}{\lambda} \quad (\lambda \neq 0),$$

$n\bar{a} = \bar{a} + \bar{a} + \dots + \bar{a}$ ($n > 0$ там әдәддир) хассәләри доғрудур.

Теорем. ***Коллинеар олан $\bar{a}$ ($\neq \bar{0}$) вә $\bar{b}$ векторлары үчүн елә јеканә λ әдәди вар ки,***

$$\bar{b} = \lambda\bar{a} \qquad (1)$$

мүнасибәти өдәнилир.

Доғрудан да, $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ ejни истигамәтли векторлар олдугда $\lambda = |\bar{b}| / |\bar{a}|$, мүхтәлиф истигамәтли олдугда исә $\lambda = -|\bar{b}|/|\bar{a}|$ көтүрмәк лазымдыр. $\bar{b} = 0$ олдугда $\lambda = 0$.

(1) бәрабәрлиjини өдәjән λ әдәдинин jеканәлиjи ашкардыр.

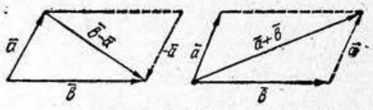
Тә'риф. *$\bar{b}$ вә $-\bar{a}$ векторларынын чәминә $\bar{b}$ вә $\bar{a}$ векторларынын фәрги деjилир вә $\bar{b}-\bar{a}$ илә ишарә олунур.* **Бурадан аjдындыр** ки, истәнилән $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ векторлары үчүн:

$$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{a} - \bar{a} = \bar{0}$$

вә

$$\bar{b} + (\bar{a}-\bar{b}) = \bar{b} + [\bar{a} + (-\bar{b})] = \bar{a} + [\bar{b} + (-\bar{b})] = \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}.$$

Верилмиш $\bar{b}$ вә $\bar{a}$ векторларынын фәргини (вә һәм дә чәмини) һәндәси олараг паралелограм гаjдасы илә 4-чү шәкилдәки кими тапмаг олар.



Шәкил 4.

Геjд едәк ки, векторлары мүгаjисә етмәк, онларын арасында $>$ вә $<$ ишарәсини jазмаг олмаз.

Векторларын анчаг узунлугларыны (модулларыны) мүгаjисә етмәк олар. Еләчә дә, мүсбәт вә мәнфи векторлар jохдур. Скалjар әдәдлә вектору топламаг мүмкүн деjилдир.

§ 3. ВЕКТОРЛАРЫН ХӘТТИ АСЫЛЫЛЫҒЫ

Тутаг ки, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ векторлары верилмишдир. Онда һәгиги $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ әдәдләри васитәсилә дүзәлмиш

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_n\bar{a}_n$$

ифадәсинә һәмин векторларын *хәтти комбинасиjасы* деjилир. Әкәр

$$\bar{b} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_n\bar{a}_n \qquad (1)$$

оларса, онда деjирләр ки, $\bar{b}$ вектору $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ векторларынын хәтти комбинасиjасыдыр.

Инди дә векторларын хәтти асылы олмасыны изаһ едәк.

Тә'риф. *Тутаг ки, һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан елә $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ һәгиги әдәдләри вар ки,*

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0} \qquad (2)$$

мүнасибәти өдәнилир. Онда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ векторларына хәтти асылы векторлар деjилир.

Верилмиш $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ векторларынын бири сыфыр вектор оларса, онда онлар хәтти асылыдыр.

(2) бәрабәрлиjи jалныз $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ олдугда өдәнилирсә, онда $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ векторларына *хәтти асылы олмаjан векторлар* деjилир. Бурадан аjдындыр ки, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ хәтти асылы олмаjан векторлардырса, онда (2) мүнасибәтинин өдәнилмәсиндән $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ бәрабәрликләри алыныр.

Теорем 1. ***$\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ векторларынын хәтти асылы олмасы үчүн онлардан биринин jердә галанларын хәтти комбинасиjасы олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Шәртин зәрурилиjи. $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ векторлары хәтти асылы олдугда (2) мүнасибәти, һеч олмаса бири (мәсәлән, λ_n) сыфырдан фәргли олан $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ әдәдләри үчүн өдәниләр. Бурадан

$$\lambda_n\bar{a}_n = -\lambda_1\bar{a}_1 - \lambda_2\bar{a}_2 - ... - \lambda_{n-1}\bar{a}_{n-1},$$

$$\bar{a}_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\bar{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n}\bar{a}_2 - ... - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\bar{a}_{n-1}$$

вә jахуд

$$\bar{a}_n = \mu_1\bar{a}_1 + \mu_2\bar{a}_2 + ... + \mu_n\bar{a}_{n-1}, \quad \mu_к = -\frac{\lambda_к}{\lambda_n} \ (к = \overline{1, n-1}).$$

Бу да $\bar{a}_n$ векторунун jердә галан $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_{n-1}$ векторларынын хәтти комбинасиjасы олдуғуну көстәрир.

Шәртин кафилиjи. Тутаг ки, $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ векторларынын бири, мәсәлән $\bar{a}_1$, jердә галанларынын хәтти комбинасиjасыдыр:

$$\bar{a}_1 = \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 + ... + \lambda_n\bar{a}_n.$$

Бурадан:

$$(-1)\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0}$$

вә jа

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + ... + \lambda_n\bar{a}_n = \bar{0} \quad (\lambda_1 = -1 \neq 0),$$

jә'ни $\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n$ векторлары хәтти асылыдыр.

Нәтиҹә. $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ векторларынын хәтти асылы олмасы онларын коллинеар олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртдир.

Нәтиҹәнин доғрулуғуна инанмаг үчүн коллинеар $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ векторлары арасында $\bar{a} = \lambda\bar{b}$ вә jа $\bar{b} = \mu\bar{a}$ мүнасибәтинин (§ 2) олдуғуну нәзәрә алмаг лазымдыр.

Теорем 2. ***$\bar{a}$, $\bar{b}$ вә $\bar{c}$ векторларынын хәтти асылы олмасы онларын компланар олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртдир.***

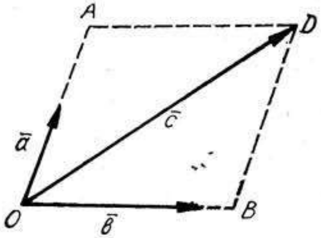
Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, $\bar{a}$, $\bar{b}$ вә $\bar{c}$ векторлары компланардыр. Бу векторларын һәр һансы икиси, мәсәлән, $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ коллинеар оларса, онда әввәлки нәтиҹәјә көрә онлар хәтти асылыдыр:

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} = \bar{O}.$$

Бурадан исә $\bar{a}$, $\bar{b}$ вә $\bar{c}$ векторларынын хәтти асылы олмасы алынар:

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \bar{O}\cdot\bar{c} = \bar{O}.$$

Инди фәрз едәк ки, $\bar{a}$, $\bar{b}$ вә $\bar{c}$ векторлары ҹүт-ҹүт коллинеар дејилдир. Бу векторларын үчүнүн дә башланғычыны бир O нөгтәсинә көчүрәк (5-чи шәкил). Шәкилдән ајдындыр ки, $\bar{a}$ илә $\overline{OA}$ векторлары вә $\bar{b}$ илә $\overline{OB}$ векторлары коллинеардыр. Онда елә λ вә μ әдәдләри тапмаг олар ки, $\overline{OA} = \lambda\bar{a}$ вә $\overline{OB} = \mu\bar{b}$ олсун (§ 2).



Шәкил 5.

Бундан башга

$$\bar{c} = \overline{OA} + \overline{OB}$$

олдуғундан

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}.$$

Ахырынҹы бәрабәрлији

$$(-1)\bar{c} + \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} = \bar{O}$$

вә ја

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{O} \quad (\gamma = -1 \neq 0)$$

кими јазсаг, $\bar{a}$, $\bar{b}$ вә $\bar{c}$ векторларынын хәтти асылы олмасы ајдын олар.

Шәртин кафилији. Тутаг ки, $\bar{a}$, $\bar{b}$ вә $\bar{c}$ векторлары хәтти асылыдыр. Онда елә λ, μ вә γ әдәдләри (мәсәлән, $\gamma \neq 0$) вар ки,

$$\lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \gamma\bar{c} = \bar{O}.$$

Бурадан

$$\bar{c} = \left(-\frac{\lambda}{\gamma}\right)\bar{a} + \left(-\frac{\mu}{\gamma}\right)\bar{b}$$

вә ја

$$\bar{c} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} \qquad \left(\lambda_1 = -\frac{\lambda}{\gamma}, \quad \lambda_2 = -\frac{\lambda}{\gamma}\right).$$

Сонунҹу мүнасибәт, $\bar{c}$ векторунун $\lambda_1\bar{a}$ вә $\lambda_2\bar{b}$ векторлары илә вә буна көрә дә $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ векторлары илә компланар олдуғуну көстәрир (бир мүстәви үзәриндә јерләшән ики векторун ҹәми дә һәмин мүстәви үзәриндә јерләшир).

§ 4. ВЕКТОРЛАРЫН БАЗИС ҮЗРӘ АЈРЫЛЫШЫ

$\bar{a}$ вектору $\bar{e}_1, \bar{e}_2, ..., \bar{e}_n$ векторларынын хәтти комбинасијасы, јә'ни

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + ... + \lambda_n\bar{e}_n \tag{1}$$

олдугда дејирләр ки, $\bar{a}$ вектору һәмин векторлар үзрә ајрылмышдыр. $n = 2$ олдугда $\bar{a}$ векторунун ики $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ вектору үзрә ајрылышы:

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2,$$

$n=3$ олдугда исә $\bar{a}$ векторунун үч e_1, e_2 вә e_3 векторлары үзрә ајрылышы:

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3.$$

Верилмиш вектору һансы векторлар үзрә ајырмаг олар?

Т ә' р и ф 1. *Мүстәви үзәриндә јерләшән, коллинеар олмајан вә мүәјјән ардыҹыллыгла көтүрүлмүш ики $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ векторуна һәмин мүстәви үзәриндә базис дејилир.*

Т е о р е м 1. ***Мүстәви үзәриндә јерләшән һәр бир $\bar{a}$ векторуну һәмин мүстәви үзәриндәки $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ базиси үзрә ајырмаг олар:***

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 \tag{2}$$

вә бу ајрылыш јеканәдир.

И с б а т ы. $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ базиси коллинеар векторлар олмадығындан онларын һеч бири сыфыр вектор ола билмәз, чүнки сыфыр вектор истәнилән векторла коллинеардыр. Инди $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ вә $\bar{a}$ векторларынын үчүнүн дә башланғычыны бир O нөгтәсинә көчүрәк (6-чы шәкил). $\bar{a}$ векторунун сонундан $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ векторларына паралел хәтләр чәксәк $\overline{OE}_1$ вә $\overline{OE}_2$ векторларыны аларыг. $\overline{OE}_1$ илә $\bar{e}_1$ вектору вә $\overline{OE}_2$ илә $\bar{e}_2$ вектору коллинеар олдуғундан елә λ_1 вә λ_2 әдәдләри вар ки, $\overline{OE}_1 = \lambda_1\bar{e}_1$ вә $\overline{OE}_2 = \lambda_2\bar{e}_2$ мүнасибәтләри өдәнилир (§ 2). Онда

$$\bar{a} = \overline{OE}_1 + \overline{OE}_2$$

олдуғундан

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2.$$

(2) ајрылышынын јеканә олдуғуну исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк. Тутаг ки, $\bar{a}$ векторунун $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ базиси үзрә башга

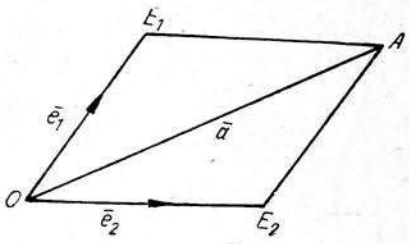
$$\bar{a} = \mu_1\bar{e}_1 + \mu_2\bar{e}_2$$

ајрылышы да вар. Онда:

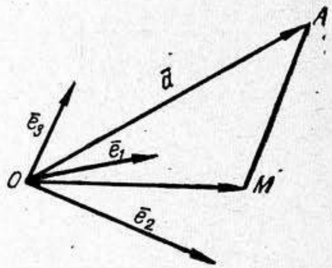
$$(\mu_1 - \lambda_1)\bar{e}_1 + (\mu_2 - \lambda_2)\bar{e}_2 = \bar{O},$$

бу да $\mu_1 - \lambda_1$ вә $\mu_2 - \lambda_2$ әмсалларынын һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олдугда $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ векторларынын хәтти асылы олдуғуну көстәрир. Бу исә $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ векторларынын коллинеар олмасы (§ 3,

нәтичә) демәкдир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, $\mu_1 - \lambda_1 = 0$, $\mu_2 - \lambda_2 = 0$ вә ја $\mu_1 = \lambda_1$, $\mu_2 = \lambda_2$ олмалыдыр, јә'ни (2) ајрылышы јеканәдир.



Шәкил 6.



Шәкил 7.

***Т ә'р и ф* 2.** *Компланар олмајан вә мүәјјән ардычыллыгла көтүрүлмүш үч $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ вә $\bar{e}_3$ векторуна фәзада базис дејилир.*

Т е о р е м 2. ***Истәнилән $\bar{a}$ векторунун $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ вә $\bar{e}_3$ базиси үзрә јеканә***

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 \tag{3}$$

ајрылышы вардыр.

Доғрудан да, $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ вә $\bar{a}$ векторларынын һамысынын башланғычыны бир O нөгтәсинә көчүрсәк вә $\bar{a}$ векторунун A уч нөгтәсиндән $\bar{e}_3$ векторуна паралел дүз хәтт чәксәк, бу хәтт $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ векторлары мүстәвисини бир M нөгтәсиндә кәсәр (7-чи шәкил). $\overline{MA}$ вектору $\bar{e}_3$ вектору илә коллинеар олдуғундан (§ 2) елә λ_3 әдәди тапмаг олар ки,

$$\overline{MA} = \lambda_3\bar{e}_3$$

мүнасибәти өдәнилсин. $\overline{OM}$ векторунун исә 1-чи теоремә көрә $\bar{e}_1$ вә $\bar{e}_2$ векторлары үзрә мүәјјән

$$\overline{OM} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2$$

ајрылышы вардыр. Беләликлә,

$$\bar{a} = \overline{OM} + \overline{MA}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3$$

ајрылышыны аларыг.

(3) ајрылышынын јеканәлији (2) ајрылышынын јеканәлији кими исбат олунур. Бу заман әввәлки параграфда исбат етдијимиз 2-чи теоремдән, јә'ни үч векторун компланар олмасы үчүн онларын хәтти асылылығынын зәрури вә кафи шәрт олмасындан истифадә етмәк лазымдыр.

Н ә т и ч ә. Фәзада истәнилән дөрд $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ вә $\bar{d}$ вектору һәмишә хәтти асылыдыр.

Доғрудан да, бу векторларын һәр һансы үчү, мәсәлән, $\bar{a}$, $\bar{b}$ вә $\bar{c}$ ја компланар, ја да компланар олмајан векторлардыр. Бу векторлар компланар олдугда хәтти асылы олур (§ 3, теорем 2):

$$\mu_1\bar{a} + \mu_2\bar{b} + \mu_3\bar{c} = \bar{O}.$$

Бурадан ајдындыр ки, верилмиш дөрд вектор хәтти асылыдыр:

$$\mu_1\bar{a} + \mu_2\bar{b} + \mu_3\bar{c} + \mu_4\bar{d} = \bar{O} \quad (\mu_4 = 0).$$

$\bar{a}$, $\bar{b}$ вә $\bar{c}$ векторлары компланар олмадыгда исә 2-чи теоремә көрә дөрдүнчү $\bar{d}$ векторуну һәмин векторлар үзрә ајырмаг олар:

$$\bar{d} = \mu_1\bar{a} + \mu_2\bar{b} + \mu_3\bar{c}.$$

Бу бәрабәрлији

$$\mu_1\bar{a} + \mu_2\bar{b} + \mu_3\bar{c} + \mu_4\bar{d} = \bar{O} \quad (\mu_4 = -1 \neq 0)$$

кими јазсаг, векторларын хәтти асылы олмасы ајдын олар.

Исбат етдијимиз 1-чи теоремдән ајдындыр ки, мүстәви үзәриндә $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ базиси верилдикдә һәмин мүстәви үзәриндә јерләшән истәнилән $\bar{a}$ векторунун бу базис үзрә јеканә

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 \tag{2}$$

ајрылышы вардыр. Бу ајрылыш васитәсилә һәр бир $\bar{a}$ векторуна јеканә бир низамлы (λ_1, λ_2) һәгиги әдәдләр чүтү ујғун гојулур. Тәрсинә, верилмиш һәр бир низамлы (λ_1, λ_2) әдәдләр чүтүнә һәмин базис васитәсилә тапылмыш јеканә

$$\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2$$

вектору ујғундур. Еләчә дә, фәзада $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ базиси верилдикдә истәнилән $\bar{a}$ векторунун бу базис үзрә

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3$$

ајрылышы васитәсилә һәмин вектора јеканә бир низамлы $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ һәгиги әдәдләр үчлүјү ујғун гојмаг олар. Һәр низамлы $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ үчлүјүнә исә бир јеканә вектор ујғундур.

Т ә'р и ф 3. *Әкәр $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ мүстәви үзәриндә базисдирсә вә*

$$\bar{a} = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 \tag{2}$$

мүнасибәти доғрудурса, онда λ_1, λ_2 әдәдләринә $\bar{a}$ векторунун һәмин базисә нәзәрән координатлары дејилир вә $\bar{a}$ (λ_1, λ_2) кими јазылыр.

1349—4

Әкәр $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ *фәзада базисдирсә вә*

$$\bar a = \lambda_1\bar e_1 + \lambda_2\bar e_2 + \lambda_3\bar e_3 \qquad (3)$$

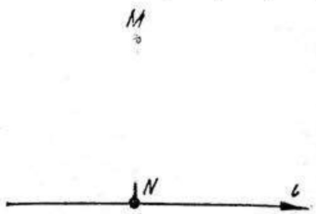
ајрылышы доғрудурса, онда $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ әдәдләринә $\bar a$ векторунун һәмин базисә нәзәрән координатлары дејилир вә $\bar a\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *кими јазылыр.*

(3) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки $\bar a_1 = \lambda_1\bar e_1$, $\bar a_2 = \lambda_2\bar e_2$ вә $\bar a_3 = \lambda_3\bar e_3$ векторларына *$\bar a$ векторунун верилмиш базис үзрә компонентләри* (топлананлары, тәшкиледичи векторлары вә с.) дејилир. Беләликлә, мүстәви үзәриндә $\bar e_1, \bar e_2$ базиси верилдикдә һәр бир векторун ики координаты (λ_1, λ_2) вә ики компоненти $(\lambda_1\bar e_1, \lambda_2\bar e_2)$ олар. Фәзада исә һәр бир векторун (верилмиш $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ базисинә нәзәрән) үч координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ вә үч компоненти $(\lambda_1\bar e_1, \lambda_2\bar e_2, \lambda_3\bar e_3)$ вардыр.

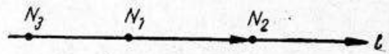
§ 5. ВЕКТОРУН ОХ ҮЗӘРИНДӘ ПРОЈЕКСИЈАСЫ

Мүстәви үзәриндә һәр һансы дүз хәтт көтүрәк. Бу дүз хәтт үзәриндә бир-биринә экс олан ики истигамәт мөвҹуддур. Үзәриндә мүәјјән истигамәт тә'јин олунмуш дүз хәттә *ох* дејилир. Фәзада бир охун верилмәси бир истигамәтин верилмәси демәкдир. Верилмиш охун истигамәтини онунла ејни истигамәтли олан бир ваһид вектор (узунлуғу ваһидә бәрабәр олан вектор) да ифадә едә биләр.

Инди ихтијари l оху вә онун харичиндә бир M нөгтәси көтүрәк (8-чи шәкил). M нөгтәсиндән l охуна перпендикулјар ендирәк вә бу перпендикулјарын l охуну кәсдији нөгтәни N илә ишарә едәк. N нөгтәсинә M нөгтәсинин l оху үзәриндә *пројексијасы* (ортогонал пројексијасы) дејилир.



Шәкил 8.



Шәкил 9.

Инди l оху үзәриндә $\overline{N_1N_2}$ векторуну көтүрәк (9-чу шәкил). Бу векторун истигамәти охун истигамәтинин ејни вә ја онун әксинә ола биләр. Мәсәлән, 9-чу шәкилдә $\overline{N_1N_2}$ векторунун истигамәти l оху истигамәтинин ејни, $\overline{N_1N_3}$ векторунун истигамәти исә l оху истигамәтинин әксинәдир. Узунлуғу $d = |\overline{N_1N_2}|$ олан $\overline{N_1N_2}$ векторунун гијмәти ашағыдакы кими тә'јин олунур: $\overline{N_1N_2}$ векторунун истигамәти охун истигамәтинин ејни олдугда $+d$, $\overline{N_1N_2}$-нин

истигамәти охун истигамәтинин әксинә олдугда исә $-d$ әдәди һәмин векторун гијмәти һесаб олунур. Сыфыр векторун гијмәти сыфырдыр.

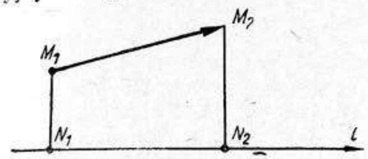
$\overline{N_1N_2}$ векторунун гијмәти N_1N_2 (үстүндә хәтт јазылмыр) илә ишарә олунур. Тә'рифдән ајдындыр ки,

$$N_1N_2 = -N_2N_1;$$

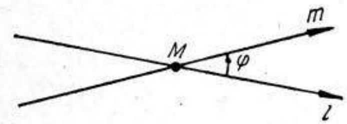
$\overline{N_1N_2}$ векторунун узунлуғу ашағыдакы кими һесабланыр:

$$d = |N_1N_2| = |N_2N_1|.$$

Мүстәви үзәриндә јерләшән $\bar a = \overline{M_1M_2}$ векторунун M_1 вә M_2 нөгтәләриндән l охуна ендирилмиш перпендикулјарлар бу оху ујғун олараг N_1 вә N_2 нөгтәләриндә кәсәр (10-чу шәкил).



Шәкил 10.



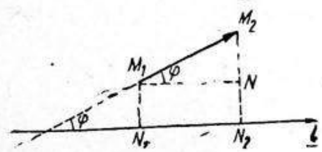
Шәкил 11.

$\overline{N_1N_2}$ векторунун гијмәтинә $\overline{M_1M_2}$ векторунун l оху үзәриндә пројексијасы дејилир вә символик олараг

$$N_1N_2 = \text{Пр}_l\,\overline{M_1M_2} = \text{Пр}_l\,\bar a$$

кими ишарә олунур. Тә'рифдән ајдындыр ки, векторун ох үзәриндә пројексијасы һәгиги әдәддир. Вектор пројексија охуна перпендикулјар олдугда, онун һәмин ох үзәриндә пројексијасы сыфыра бәрабәрдир.

Мүстәви үзәриндә јерләшән вә һәр һансы M нөгтәсиндә кәсишән ики l (биринчи) вә m (икинчи) оху көтүрәк (11-чи шәкил). l охуну m оху үзәринә кәтирмәк (истигамәтләри үст-үстә дүшмәк шәртилә) үчүн ону мүәјјән φ бучағы гәдәр фырлатмаг лазымдыр. Һәмин бучаға l вә m охлары арасындакы бучаг дејилир. Бир-биринә паралел вә истигамәтләри ејни олан охлар арасындакы бучаг сыфра (вә ја $2k\pi$-јә), бир-биринә паралел вә истигамәтләри әкс олан охлар арасындакы бучаг исә π-јә (вә ја $(2k+1)\pi$-јә) бәрабәрдир.



Шәкил 12.

l охуну m оху үзәринә кәтирмәк үчүн ону саат әгрәби һәрәкәтинин әкси истигамәтиндә фырлатдыгда алынан бучаг мүсбәт, әкс һалда исә мәнфи һесаб олунур.

l оху илә $\bar a = \overline{M_1M_2}$ вектору арасындакы бучаг һәмин охла M_1 вә M_2 нөгтәләриндән кечән (вә истигамәти M_1-дән M_2-јә тәрәф олан) ох арасындакы бучаг баша дүшүлүр (12-чи шәкил). l оху илә $\overline{M_1M_2}$ вектору арасындакы бучаға һәмин векторун l охуна *мејл бучағы* дејилир.

Теорем. ***Узунлуғу d вә l охуна мејл бучағы φ олан $\bar a=\overline{M_1M_2}$ векторунун һәмин ох үзәриндә пројексијасы***

$$Пр_l \bar a = d\cos\varphi \qquad (1)$$

дүстуру илә һесабланыр.

(1) дүстурунун доғрулуғу 12-чи шәкилдәки дүзбучаглы NM_1M_2 үчбучағындан ајдындыр.

Ашағыдакы хассәләрин доғрулуғуну векторун ох үзәриндә пројексијасынын тә'рифинә вә исбат етдијимиз теоремә әсасән јохламаг олар:

1. *Вектор өзүнә паралел олараг башга јерә көчүрүлдүкдә онун ох үзәриндә пројексијасы дәјишмәз.*
2. *Сабит (һәгиги) әдәди пројексија ишарәси харичинә чыхармаг олар:*

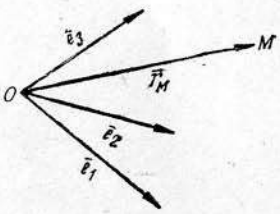
$$Пр_l(\lambda\bar a)=\lambda\,Пр_l\,\bar a.$$

3. *Векторлар чәминин пројексијасы топлананларын пројексијалары чәминә бәрабәрдир:*

$$Пр_l(\bar a+\bar b)=Пр_l\,\bar a+Пр_l\,\bar b.$$

§ 6. ДЕКАРТ КООРДИНАТ СИСТЕМЛӘРИ

Тутаг ки, фәзада $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ базиси верилмишдир. Фәзада гејд олунмуш бир O нөгтәси көтүрәк вә һәмин базис векторларынын башланғычларыны бу нөгтәјә көчүрәк (13-чү шәкил). Бу һалда фәзанын истәнилән M нөгтәсинин вәзијјәтини O нөгтәсинә нәзәрән тә'јин етмәк олар. Бу мәгсәдлә O илә M нөгтәсини бирләшдирән $\overline{OM}$ векторуну $\bar r_M$ илә ишарә едәк вә ону M нөгтәсинин *радиус-вектору* адландыраг. Ајдындыр ки, фәзада јерләшән һәр бир M нөгтәсинә бир $\bar r_M=\overline{OM}$ вектору вә һәр бир $\overline{OM}$ векторуна (башланғычы O нөгтәсиндә олан) исә бир M нөгтәси ујғундур. Беләликлә, һәр бир M нөгтәсинин вәзијјәти онун $\bar r_M$ радиус-вектору илә биргијмәтли тә'јин олунур. $\bar r_M$ векторунун исә верилмиш $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ базисинә нәзәрән $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ координатлары вардыр: $\bar r_M=\lambda_1\bar e_1+\lambda_2\bar e_2+\lambda_3\bar e_3$ вә ја $\bar r_M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.



Шәкил 13.

$\bar r_M=\overline{OM}$ радиус-векторунун бу $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ координатлары васитәсилә M нөгтәси биргијмәтли тә'јин олунур.

Тә'риф. *O нөгтәси вә $\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3$ базиси бирликдә фәзада аффин вә ја Декарт* координат системи адланыр вә $O\bar e_1\bar e_2\bar e_3$ илә ишарә олунур. M нөгтәсинин $\bar r_M=\overline{OM}$ радиус-векторунун $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ координатларына M нөгтәсинин һәмин координат системиндә аффин координатлары дејилир вә $M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ илә ишарә олунур.*

O нөгтәсинә координат башланғычы вә бу нөгтәдән базис векторлары истигамәтиндә кечән дүз хәтләрә *координат охлары* дејилир. Бу координат охларынын биринчисинә ($\bar e_1$ истигамәтиндә олана) *абсис оху*, икинчисинә ($\bar e_2$ истигамәтиндә олана) *ординат оху*, үчүнчүсүнә исә *аппликат оху* дејилир. Буна ујғун олараг $M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ нөгтәсинин биринчи λ_1 координатына онун *абсиси*, икинчи λ_2 координатына онун *ординаты* вә үчүнчү λ_3 координатына исә *аппликаты* дејилир. Координат охларындан кечән мүстәвиләр *координат мүстәвиләри* адланыр.

Ејни гајда илә дә мүстәви үзәриндә аффин (Декарт) координат системи тә'јин олунур. Бу координат системи O нөгтәси вә мүстәви үзәриндәки $\bar e_1, \bar e_2$ базиси илә тә'јин олунур вә $O\bar e_1\bar e_2$ кими ишарә едилир. O нөгтәси *координат башланғычы* вә бу нөгтәдән базис векторлары истигамәтиндә кечән дүз хәтләрә исә *координат охлары* дејилир. Јенә дә $\bar e_1$ истигамәтиндә олан биринчи ох *абсис*, $\bar e_2$ истигамәтиндә олан икинчи ох исә *ординат оху* адланыр. Мүстәви үзәриндәки һәр бир M нөгтәсинин аффин координат системиндә ики координаты вар: $M(\lambda_1, \lambda_2)$. Бунлардан биринчиси λ_1 нөгтәнин абсиси, икинчиси λ_2 исә нөгтәнин ординаты адланыр.

Дүз хәтт үзәриндә координат системи $O\bar e_1$ олар. Ајдындыр ки, верилмиш дүз хәтт үзәриндә координат системи тә'јин едилдикдә һәмин дүз хәтт истигамәтләнмиш олур. (Белә дүз хәттә исә *ох* вә ја *истигамәтләнмиш дүз хәтт* дејилир). Дүз хәтт үзәриндәки һәр бир M нөгтәсинин $O\bar e_1$ аффин координат системинә көрә бир координаты вар: $M(\lambda_1)$.

Бир чох мәсәләләрин һәллиндә елә координат системинә бахмаг лазым кәлир ки, онун базисини тәшкил едән векторларын узунлуғу ваһидә бәрабәр олмагла, гаршылыглы перпендикулјар олсун, јә'ни координат системинин базиси ортонормал олсун. Белә координат системинә *Евклид* вә ја *дүзбучаглы Декарт координат системи* дејилир.

Мүстәви үзәриндә дүзбучаглы координат системи

Мүстәви үзәриндә дүзбучаглы Декарт координат системинин ортонормал базисини $\bar i, \bar j$ илә, ихтијари M нөгтәсинин һәмин координат системиндә координатларыны исә ујғун олараг x, y илә

* XVII әсрдә биринчи дәфә координат системини тәклиф едән франсыз алими Р е н е Д е к а р т ы н (1596—1650) шәрәфинә олараг.

ишарə едирлəр: $M(x, y)$. Бу һалда $\bar{i}$ истигамəтиндə олан абсис оху үфүги көтүрүлүр вə «Ox» илə ишарə олунур. Ординат оху адланан вə $\bar{j}$ истигамəтиндə олан икинчи ох исə шагули көтүрүлүр вə «Oy» илə ишарə олунур. Буна ујғун оларaг мүстəви үзəриндə дүзбучаглы координат системини (Oxy) илə ишарə едирлəр.

Абсис оху мүстəвини ики һиссəјə — јухары вə ашағы јарыммүстəвилəрə бөлүр. Ординат оху исə мүстəвини ики һиссəјə — сол вə сағ јарыммүстəвилəрə бөлүр.

Ајдындыр ки, мүстəви үзəриндə тə'јин олунмуш дүзбучаглы координат системинин көмəји илə мүстəвинин бүтүн нөгтəлəри чохлуғу илə һəгиги əдəдлəрдəн дүзəлмиш вə һəмин нөгтəлəрин координатлары олан бүтүн (x, y) низамлы чүтлəри чохлуғу арасында гаршылыглы биргијмəтли ујғунлуг јарадылыр. Буну изаһ етмəк үчүн һəр бир $\bar{a}$ векторуну онунла ејни истигамəтдə вə узунлуғу ваһидə бəрабəр олан (белə вектора *ваһид вектор* вə ја *орт* дејилир) $\bar{a}_0$ вектору илə

$$\bar{a} = |\bar{a}|\bar{a}_0 \qquad (|\bar{a}_0| = 1)$$

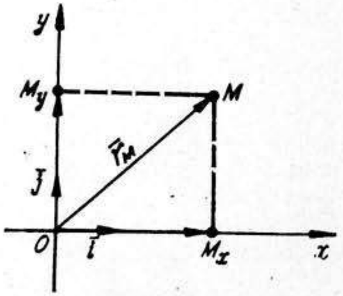
кими көстəрмəк мүмкүн олдуғундан истифадə едəк. Мүстəви үзəриндə јерлəшəн истəнилəн M нөгтəсинин $\bar{r}_M = \bar{OM}$ радиус-векторуну

$$\bar{r}_M = \bar{OM}_x + \bar{OM}_y$$

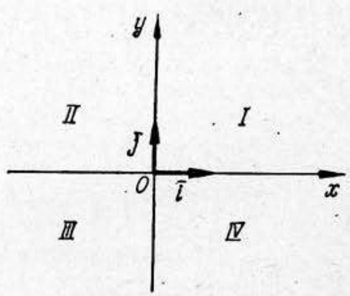
кими көстəрмəк олар (14-чү шəкил). $\bar{OM}$ векторунун координат охлары үзəриндə проjексиjалары $x = OM_x$ вə $y = OM_y$ оларса, онда

$$\bar{r}_M = x\bar{i} + y\bar{j}.$$

$\bar{OM}$ векторунун координат охлары үзəриндə x вə y проjексиjалары M нөгтəсинин ујғун координатларыдыр: $M(x, y)$. Тəрсинə, M нөгтəсинин координатлары $\bar{OM}$ векторунун ујғун координат охлары үзəриндə проjексиjаларыдыр.



Шəкил 14.



Шəкил 15.

Абсис оху үзəриндə јерлəшəн нөгтəлəрин ординаты, ординат оху үзəриндə јерлəшəн нөгтəлəрин исə абсиси сыфра бəрабəрдир. Демəли, абсис оху үзəриндə јерлəшəн нөгтəлəр $(x, 0)$ кими, ординат оху үзəриндə јерлəшəн нөгтəлəр исə $(0, y)$ кими əдəдлəр чүтү васитəсилə тə'јин олунур.

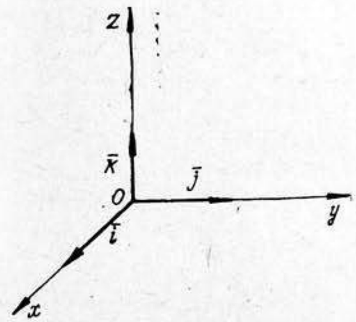
Координат охлары мүстəвини дөрд рүбə (координат бучағына вə ја квадранта) бөлүр (15-чи шəкил). Бу квадрантлар 15-чи шəкилдəки кими нөмрəлəнир. Биринчи квадрантда јерлəшəн бүтүн нөгтəлəрин координатларынын икиси дə мүсбəт, икинчи квадрантда јерлəшəн нөгтəлəрин абсиси мəнфи, ординаты исə мүсбəт, үчүнчү квадрантда јерлəшəн нөгтəлəрин координатларынын икиси дə мəнфи, дөрдүнчү квадрантда јерлəшəн нөгтəлəрин абсиси мүсбəт, ординаты исə мəнфидир. Јə'ни, I квадрантда $x>0$, $y>0$; II квадрантда $x<0$, $y>0$; III квадрантда $x<0$, $y<0$; IV квадрантда $x>0$, $y<0$.

Фəзада дүзбучаглы координат системи

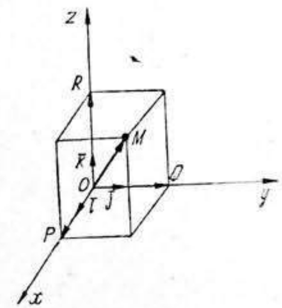
Фəзада дүзбучаглы координат системинин ортонормал базисини $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ илə ишарə едирлəр. Бу һалда, фəзада тə'јин олунмуш дүзбучаглы координат системинин көмəји илə фəзанын бүтүн нөгтəлəри чохлуғу илə һəгиги əдəдлəрдəн дүзəлмиш бүтүн (x, y, z) низамлы үчлүклəр чохлуғу арасында гаршылыглы биргијмəтли ујғунлуг јаратмаг олар.

Дүзбучаглы Декарт координат системиндə абсис оху истигамəтиндə олан базис вектору (вə ја ваһид вектору) $\bar{i}$, ординат оху истигамəтиндə олан базис вектору $\bar{j}$ вə аппликат оху истигамəтиндə олан базис вектору исə $\bar{k}$ олар (16-чы шəкил).

Фəзада истəнилəн M нөгтəси көтүрəк вə $\bar{OM}$ радиус-векторунун координат охлары үзəриндə проjексиjасыны ујғун оларaг $x = OP$, $y = OQ$ вə $z = OR$ илə ишарə едəк (17-чи шəкил). Онда ајдындыр ки, $\bar{OP} = x\bar{i}$, $\bar{OQ} = y\bar{j}$ вə $\bar{OR} = z\bar{k}$.



Шəкил 16.



Шəкил 17.

Бу һалда

$$\bar{OM} = \bar{OP} + \bar{OQ} + \bar{OR}$$

олдуғундан

$$\bar{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

вә јахуд

$$\bar{r}_{M} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Демәли, $\overline{OM}$ векторунун координат охлары үзәриндә x, y вә z пројексијалары M нөгтәсинин ујғун координатларыдыр: $M(x, y, z)$. Тәрсинә, M нөгтәсинин координатлары $\overline{OM}$ векторунун ујғун координат охлары үзәриндә пројексијалары олар.

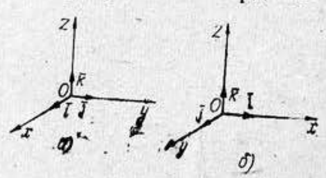
Беләликлә, фәзанын бүтүн M нөгтәләри чохлуғу илә һәгиги әдәдләрдән дүзәлмиш бүтүн (x, y, z) низамлы үчлүкләр чохлуғу арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг јарадылмыш олур.

Мүстәви үзәриндә олдуғу кими фәзада да ваһид $\bar{i}$ вектору истигамәтиндә олан абсис охуна «Ox» оху, $\bar{j}$ истигамәтиндә олан ординат охуна «Oy» оху вә $\bar{k}$ истигамәтиндә олан апликат охуна исә «Oz» оху дејилир. Буна ујғун олараг да фәзада дүзбучаглы координат системини $(Oxyz)$ илә ишарә едирләр.

Ики координат охундан кечән мүстәвијә *координат мүстәвиси* дејилир. Фәзада дүзбучаглы координат системинин Oxy, Oxz вә Oyz кими үч координат мүстәвиси вардыр. Бу координат мүстәвиләри фәзаны октантлар адланан сәккиз јерә бөлүр. Октантлар координатларын ишарәләринә ујғун ашағыдакы кими нөмрәләнир:

Координатлар / Октантлар	x	y	z
I	+	+	+
II	−	+	+
III	−	−	+
IV	+	−	+
V	+	+	−
VI	−	+	−
VII	−	−	−
VIII	+	−	−

Координат охларынын бир-биринә нәзәрән јерләшмә истигамәтиндән асылы олараг фәзада ики нөв дүзбучаглы координат системи көтүрмәк олар. Бунлара ујғун олараг дүзбучаглы *сағ Декарт координант системи* (18-чи шәкил, а) вә дүзбучаглы *сол Декарт координан. системи* (18-чи шәкил, б) дејилир.



Шәкил 18.

Фәзада дүзбучаглы координат системиндән истифадә едәрәк, истәнилән $\bar{a}$ векторунун координатлары илә онун ујғун координат охлары үзәриндә пројексијалары арасында да ејни әлагә јаратмаг олар. $\bar{a}$ векторунун ујғун координат охлары үзәриндә пројексијалары a_x, a_y вә a_z оларса, $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ базиси үзрә

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

ајрылышы доғру олар. Бурадан көрүнүр ки, $\bar{a}$ векторунун координатлары a_x, a_y вә a_z әдәдләридир. Мә'лумдур ки, вектор өз координатлары илә

$$\bar{a}(a_x, a_y, a_z) \qquad \text{вә ја} \qquad \bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$$

кими јазылыр. Бу һалда $\bar{a}$ векторунун компонентләри ујғун олараг

$$a_x\bar{i}, \quad a_y\bar{j}, \quad a_z\bar{k}$$

векторлары олар.

Векторларын өз координатлары илә верилмәсинин әһәмијјәти ондан ибарәтдир ки, векторлар һаггында бир сыра мәсәләләри онларын координатлары олан һәгиги әдәдләр үзәриндә лазыми әмәлләри апармагла һәлл етмәк мүмкүн олур.

Биз бу фәсилдә, әсасән дүзбучаглы Декарт координат системиндән вә векторларын $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ базисинә көрә ајрылышындан истифадә едәҹәјик.

§ 7. ПОЛЈАР КООРДИНАТ СИСТЕМИ

Мүстәви үзәриндә бир чох мәсәләләрин һәлли үчүн полјар координат системиндән истифадә олунур.

Мүстәви үзәриндә полјар координат системини тә'јин етмәк үчүн мүәјјән ориjентасија, полјус адланан бир O нөгтәси, полјар ох адланан вә һәмин нөгтәдән чыхан OP шүасы вә өлчү ваһиди верилмәлидир (19-чу шәкил). Бу координат системинә көрә истәнилән M нөгтәси вә ја онун вәзијјәтини тә'јин едән $\bar{r}_M = \overline{OM}$ радиус-вектору ики һәгиги әдәдлә-полјар координатларла биргијмәтли тә'јин олунур. Бу әдәдләрин биринчиси M нөгтәсинин $\bar{r}_M = \overline{OM}$ радиус-векторунун

$$\rho = |\bar{r}_M| = |\overline{OM}|$$

узунлуғудур. Икинчиси исә $\bar{r}_M = OM$ векторунун $\overline{OP}$ полјар оху илә әмәлә кәтирдији φ бучағыдыр. ρ әдәдинә M нөгтәсинин *биринчи координаты* вә ја *полјар радиусу*, φ-ја исә M-ин *икинчи координаты* вә ја *полјар бучағы* (бә'зән *амплитуда* вә ја *фазасы*) дејилир вә $M(\rho, \varphi)$ кими ишарә олунур.

Бурадан ајдындыр ки, M нөгтәсинин полјар радиусу һәмишә мәнфи олмајан әдәддир: $0 \leqslant \rho < +\infty$.

φ полјар бучағы исә ишарәси нәзәрә алынмагла $2k\pi$ һәддинә гәдәр (k истәнилән там әдәддир) дәгигликлә көтүрүлүр. Бу о демәкдир ки, мүстәви үзәриндәки ихтијари M нөгтәсинә анчаг бир чүт (ρ, φ) полјар координаты дејил, сонсуз сајда $(\rho, \varphi + 2k\pi)$

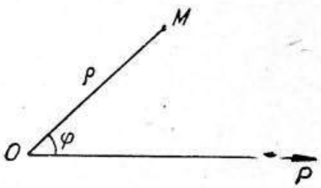
(k истәнилән там әдәддир) координатлары ујғундур. Бунун тәрсинә олан ујғунлуг исә биргијмәтлидир. Һәр бир (ρ, φ) әдәдләр чүтүнә мүстәви үзәриндә јеканә нөгтә ујғундур.

M нөгтәси O полјусу илә үст-үстә дүшдүкдә онун полјар радиусу $\rho = 0$, полјар бучағы исә гејри-мүәјјән олур. Бу һалда M нөгтәсинин полјар бучағы олараг истәнилән φ әдәдини көтүрмәк олар.

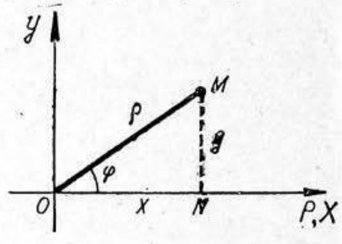
Мүстәвинин полјусдан фәргли бүтүн нөгтәләри чохлуғу илә полјар координатлары чүтләри чохлуғу арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг јаратмаг үчүн ρ вә φ әдәдләри

$$0 \leqslant \rho < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \qquad (\text{вә ја } -\pi \leqslant \varphi < \pi)$$

шәртләри дахилиндә көтүрүлүр. Бу һалда φ-нин $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ (вә ја $-\pi \leqslant \varphi < \pi$) гијмәтләринә онун *баш гијмәтләри* дејилир.



Шәкил 19.



Шәкил 20.

Радианла өлчүлән полјар бучаг полјар охдан саат әгрәби һәрәкәтинин тәрсинә (фырланмагла) һесабландыгда мүсбәт, әкс истигамәтдә һесабландыгда исә мәнфи һесаб олунур.

Инди истәнилән нөгтәнин дүзбучаглы (x, y) вә полјар (ρ, φ) координатлары арасындакы әлагәни мүәјјән едәк.

Фәрз едәк ки, мүстәви үзәриндә полјар координат системи тә'јин олунмушдур (20-чи шәкил). Абсис оху полјар охла вә координат башланғычы полјусла үст-үстә дүшән дүзбучаглы Декарт координат системи гураг. Мүстәви үзәриндә олан истәнилән M нөгтәсинин полјар координатлары (ρ, φ), Декарт координатлары исә (x, y) олсун.

Онда дүзбучаглы MON үчбучағындан: $\frac{x}{\rho} = \cos\varphi$, $\frac{y}{\rho} = \sin\varphi$

вә ја

$$\left.\begin{aligned} y &= \rho \sin\varphi, \\ x &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Бу дүстурлардан истифадә едәрәк, ρ вә φ координатларыны да x вә y илә ифадә етмәк олар:

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (2)$$

Беләликлә, (1) бәрабәрликләриндән:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (3)$$

Мисал 1. Полјар координатлары мә'лум олан $M\left(2; \frac{\pi}{6}\right)$ нөгтәсинин Декарт координатларыны тапмалы.

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{вә} \quad y = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Демәли, $M(\sqrt{3}; 1)$.

Мисал 2. Дүзбучаглы Декарт координатлары мә'лум олан $M(1; 1)$ нөгтәсинин полјар координатларыны тапмалы.

(2) вә (3) бәрабәрликләринә көрә:

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

вә ја

$$M\left(\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right).$$

Нәһајәт, гејд едәк ки, мүстәви үзәриндә координат системләринә бахмағын бөјүк әһәмијјәти вардыр. Координат системләринин көмәјилә мүстәвинин бүтүн нөгтәләри чохлуғу илә һәгиги әдәдләрин бүтүн (x, y) низамлы (јә'ни һансы әдәдин биринчи вә һансы әдәдин икинчи јердә јазылмасы мә'лум олан) чүтләри чохлуғу арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг јарадылмасы, мүстәви үзәриндәки һәндәси фигурлары (нөгтәләр чохлуғуну) һәгиги әдәдләрдән дүзәлмиш чүтләр васитәсилә өјрәнмәјә имкан верир. Бунунла да һәндәси објектләрин тәдгигинә аналитик (чәбри) методлар тәтбиг олунур.

Бундан башга, көстәрилән ујғунлуг ријази анализин бир сыра мәсәләләрини дә һәндәси олараг шәрһ етмәјә имкан верир.

§ 8. КООРДИНАТЛАРЫ ИЛӘ ВЕРИЛМИШ ВЕКТОРЛАР ҺАГГЫНДА САДӘ МӘСӘЛӘЛӘР

1. Тутаг ки, $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ вә ја

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$$
$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$$

векторлары верилмишдир. Векторларын ох үзәриндә пројексијасынын 2 вә 3-чү хассәләринә (§ 5) көрә:

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_x)\bar{i} + (\lambda a_y)\bar{j} + (\lambda a_z)\bar{k}$$

вә

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x)\bar{i} + (a_y \pm b_y)\bar{j} + (a_z \pm b_z)\bar{k}.$$

2. Верилмиш $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ векторлары бәрабәрдирсә ($\bar{a}=\bar{b}$), онда онларын ујғун координатлары да бәрабәрдир:

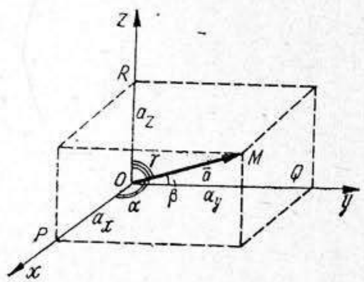
$$a_x=b_x,\quad a_y=b_y,\quad a_z=b_z. \tag{1}$$

Бу тәклифин тәрси дә доғрудур.

3. Координатлары илә верилмиш

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$$

векторунун модулуну (узунлуғуну) һесаблајаг. Бу мәгсәдлә $\bar{a}$ векторунун башланғычыны координат башланғычына көчүрәк вә онун координат охлары үзәриндә $a_x=OP$, $a_y=OQ$ вә $a_z=OR$ пројексијаларыны тапаг (21-чи шәкил). OP, OQ вә OR парчалары үзәриндә дүзбучаглы паралелепипед гурсаг, онун диагоналы $OM=|\bar{a}|$ олар. Бурадан:



Шәкил 21.

$$|\bar{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$

вә ја

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{2}$$

4. Тутаг ки, $\bar{a}$ векторунун координат охларынын мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдији бучаглар α, β вә γ-дыр (21-чи шәкил). Бу бучаглара $\bar{a}$ векторунун *јөнәлдичи бучаглары* дејилир. $\bar{a}$ векторунун координат охлары үзәриндәки a_x, a_y вә a_z пројексијаларыны (§ 5)

$$a_x=|\bar{a}|\cos\alpha,\quad a_y=|\bar{a}|\cos\beta,\quad a_z=|\bar{a}|\cos\gamma$$

кими тапмаг олар.

Бурадан:

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\bar{a}|},\quad \cos\beta=\frac{a_y}{|\bar{a}|},\quad \cos\gamma=\frac{a_z}{|\bar{a}|} \tag{3}$$

вә ја

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}, \tag{4}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

(3) бәрабәрликләрини квадрата јүксәлдиб тәрәф-тәрәфә топласаг вә (2) бәрабәрлијини нәзәрә алсаг:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{5}$$

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ вә $\cos\gamma$ кәмијјәтләринә $\bar{a}$ векторунун *јөнәлдичи косинуслары* дејилир. $\bar{a}$ вектору ваһид вектор оларса, онда

$$a_x=\cos\alpha,\quad a_y=\cos\beta,\quad a_z=\cos\gamma,$$

јә'ни ваһид векторун јөнәлдичи косинуслары онун ујғун координатларыдыр.

5. Тутаг ки, $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ вә $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ векторлары коллинеардыр. Онда елә λ әдәди тапмаг олар ки, $\bar{a}=\lambda\bar{b}$ олсун. Бу һалда ики векторун (1) бәрабәрлик шәртләринә әсасән:

$$a_x=\lambda b_x,\quad a_y=\lambda b_y,\quad a_z=\lambda b_z.$$

Бурадан $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ векторларынын

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \tag{6}$$

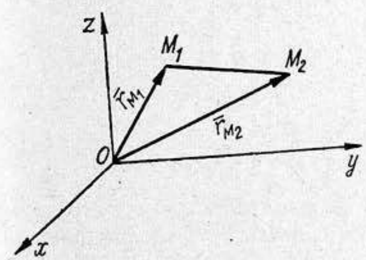
кими коллинеарлыг шәртини тапарыг.

6. Тутаг ки, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ вә $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нөгтәләри верилмишдир (22-чи шәкил). Онда:

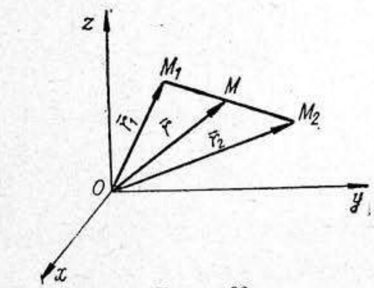
$$\bar{r}_{M_1}=x_1\bar{i}+y_1\bar{j}+z_1\bar{k}$$

вә

$$\bar{r}_{M_2}=x_2\bar{i}+y_2\bar{j}+z_2\bar{k}.$$



Шәкил 22.



Шәкил 23.

Шәкилдән ајдындыр ки,

$$\overline{M_1M_2}=\bar{r}_{M_2}-\bar{r}_{M_1}$$

вә ја

$$\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1)\bar{i}+(y_2-y_1)\bar{j}+(z_2-z_1)\bar{k}. \tag{7}$$

Векторун узунлуғу үчүн тапдығымыз (2) дүстуруна әсасән:

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Демәли, верилмиш $M_1(x_1, y_1, z_1)$ вә $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нөгтәләри арасындакы мәсафә

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{8}$$

дүстуру илә һесабланар.

7. Тутаг ки, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ вә $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нөгтәләри верилмишдир. M_1M_2 парчасыны λ нисбәтиндә бөлән M нөгтәсинин, јә'ни $\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda$ шәртини $(\lambda\neq-1)$ өдәјән $M(x, y, z)$ нөгтәсинин координатларыны тапмалы (23-чү шәкил).

$\overline{M_1M}$ вә $\overline{MM_2}$ векторлары коллинеар олдуғундан:

$$\overline{M_1M}=\lambda\,\overline{MM_2}. \tag{9}$$

(7) дүстуруна әсасән

$\overline{M_1M}(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$ вә $\overline{MM_2}(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$

олдуғундан (9) бәрабәрлијини координатларла

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y),\quad z-z_1=\lambda(z_2-z)$$

кими јаза биләрик. Бурадан:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \tag{10}$$

Хүсуси һалда, $\lambda=1$ оларса, $\overline{M_1M_2}$ парчасыны јарыја бөлән M нөгтәсинин

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

координатларыны тапарыг.

§ 9. ВЕКТОРЛАРЫН СКАЛЈАР ҺАСИЛИ

Тә'риф. *$\bar a$ вә $\bar b$ векторларынын узунлуглары илә араларындакы бучағын косинусу һасилинә онларын скалјар һасили дејилир вә $\bar a\cdot\bar b$, $\bar a\bar b$ вә ја $(\bar a, \bar b)$ илә ишарә олунур. $\varphi=(\widehat{\bar a, \bar b})$ олдугда тә'рифә әсасән:*

$$(\bar a, \bar b)=|\bar a|\cdot|\bar b|\cos\varphi$$

вә ја

$$\bar a\cdot\bar b=|\bar a|\cdot|\bar b|\cos\varphi. \tag{1}$$

(1) бәрабәрлијиндән ајдындыр ки, ики векторун скалјар һасили һәгиги әдәддир (скалјардыр).

Ики векторун скалјар һасилинин (1) ифадәсини башга шәкилдә дә јазмаг олар. Бу мәгсәдлә $\bar a$ векторунун $\bar b$ вектору үзәриндә пројексијасынын

$$\text{Пр}_{\bar b}\,\bar a=|\bar a|\cos\varphi,\quad \varphi=(\widehat{\bar a, \bar b})$$

олдуғуну (§ 5) нәзәрә алмаг лазымдыр. Онда (1) бәрабәрлијини

$$(\bar a, \bar b)=|\bar b|\,\text{Пр}_{\bar b}\,\bar a \tag{2}$$

вә

$$(\bar a, \bar b)=|\bar a|\,\text{Пр}_{\bar a}\,\bar b \tag{3}$$

кими јазмаг олар.

Тә'рифдән ајдындыр ки, $\bar a$ вә $\bar b$ векторларынын һеч олмаса бири сыфыр олдугда вә ја онлар бир-биринә перпендикулјар (ортогонал) олдугда $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$, һәмин векторларын скалјар һасили сыфра бәрабәр олар. Бунун тәрси дә доғрудур. $\bar a$ вә $\bar b$ векторларынын скалјар һасили сыфра бәрабәрдирсә, онда бу векторларын һеч олмаса бири сыфыр вектордур вә ја һәмин векторлар гаршылыглы перпендикулјардыр.

Хүсуси һалда, $\bar a=\bar b$ олдугда $\varphi=0$ вә $\cos\varphi=1$ олар вә (1) мүнасибәти

$$\bar a\cdot\bar a=\bar a^2=|\bar a|^2 \tag{4}$$

шәклиндә јазылар. Демәли, бир векторун скалјар квадраты (өз-өзүнә скалјар һасили) һәмин векторун узунлуғунун квадратына бәрабәрдир. (4) бәрабәрлијиндән $\bar a$ векторунун узунлуғу үчүн

$$|\bar a|=\sqrt{(\bar a)^2} \tag{5}$$

дүстуруну аларыг.

Векторларын скалјар һасилинин ашағыдакы хассәләри дә вардыр:

I. *Скалјар һасил јердәјишмә (коммутативлик) хассәсинә табедир:*

$$(\bar a, \bar b)=(\bar b, \bar a). \tag{6}$$

Доғрудан да, (1) бәрабәрлијинә көрә:

$$(\bar a, \bar b)=|\bar a||\bar b|\cos\varphi=|\bar b||\bar a|\cos\varphi=(\bar b, \bar a).$$

II. *Скалјар вуруғу скалјар һасил ишарәси харичинә чыхармаг олар:*

$$(\lambda\bar a, \bar b)=\lambda(\bar a, \bar b)=(\bar a, \lambda\bar b) \tag{7}$$

Доғрудан да, векторун ох үзәриндә пројексијасынын 2-чи хассәсинә (§ 5) көрә

$$\text{Пр}_{\bar b}(\lambda\bar a)=\lambda\,\text{Пр}_{\bar b}\,\bar a$$

олдуғундан, бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини $|\bar b|$ әдәдинә вурмагла

$$|\bar b|\,\text{Пр}_{\bar b}(\lambda\bar a)=\lambda|\bar b|\,\text{Пр}_{\bar b}\,\bar a$$

мүнасибәтини вә (2) бәрабәрлијинә әсасән

$$(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$$

бәрабәрлијини аларыг. Сонрасы ајдындыр.

III. *Скалјар һасилин пајланма (дистрибутивлик) хассәси вардыр:*

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}). \quad (8)$$

Буну исбат етмәк үчүн векторун ох үзәриндә пројексијасынын 3-чү хассәсиндән истифадә едәк:

$$\text{Пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = \text{Пр}_{\bar{c}}\bar{a} + \text{Пр}_{\bar{c}}\bar{b}$$

Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини $|\bar{c}|$ әдәдинә вурсаг вә (2) бәрабәрлијиндән истифадә етсәк:

$$|\bar{c}|\text{Пр}_{\bar{c}}(\bar{a} + \bar{b}) = |\bar{c}|\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{a} + |\bar{c}|\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{b}$$

вә ја

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c}).$$

IV. $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\kappa$ вә $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$ *векторларынын скалјар һасили онларын координатлары илә*

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \quad (9)$$

шәклиндә ифадә олунур. Бу бәрабәрлији исбат етмәк үчүн

$$\bar{i}\cdot\bar{i} = 1, \quad \bar{j}\cdot\bar{j} = 1, \quad \bar{k}\cdot\bar{k} = 1,$$
$$\bar{i}\cdot\bar{j} = 0, \quad \bar{i}\cdot\kappa = 0, \quad \bar{j}\cdot\bar{k} = 0$$

олдуғуну нәзәрә алмаг лазымдыр. Онда II вә III хассәләрә көрә:

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) =$$
$$= a_xb_x\,\bar{i}\cdot\bar{i} + a_yb_y\,\bar{j}\cdot\bar{j} + a_zb_z\,\bar{k}\cdot\bar{k} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Хүсуси һалда, $\bar{a} = \bar{b}$ оларса, онда (9) бәрабәрлијини

$$(\bar{a})^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

кими јазмаг олар. Бурадан вә (5) дүстурундан $\bar{a}$ векторунун узунлуғу үчүн

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (10)$$

дүстуруну аларыг. Бу дүстурун доғрулуғуну башга јолла 7-чи параграфда исбат етмишдик.

V. (1), (9) *вә* (10) *дүстурларына әсасән* $\bar{a}$ *вә* $\bar{b}$ *векторлары арасындакы* φ *бучағыны һесабламаг үчүн*

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$

вә ја

$$\cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad (11)$$

дүстуруну алмаг олар. Бурадан $\bar{a}$ *вә* $\bar{b}$ *векторларынын ортогонал олмасы шәрти алыныр:* $\bar{a}$ *вә* $\bar{b}$ *векторларынын ортогонал олмасы үчүн*

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$$

мүнасибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

VI. *Верилмиш* $\bar{a}$ *вә* $\bar{b}$ *векторлары вә ихтијари* $\bar{c}$ *вектору үчүн*

$$\bar{a}\cdot\bar{c} = \bar{b}\cdot\bar{c} \quad (12)$$

мүнасибәти өдәнилирсә, онда $\bar{a} = \bar{b}$.

Доғрудан да, (12) бәрабәрлијиндән ихтијари $\bar{c}$ вектору үчүн:

$$\bar{a}\cdot\bar{c} - \bar{b}\cdot\bar{c} = 0, \quad (\bar{a} - \bar{b})\cdot\bar{c} = 0.$$

Бурада $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ көтүрсәк

$$(\bar{a} - \bar{b})^2 = 0$$

олар, бу да анчаг $\bar{a} - \bar{b} = 0$ вә ја $\bar{a} = \bar{b}$ олдугда мүмкүндүр. Демәли, $\bar{a} = \bar{b}$.

Мисал. $\bar{a}(2, 2, -4)$ вә $\bar{b}(5, -3, 1)$ векторлары арасындакы бучағы һесабламалы.

(11) дүстуруна көрә

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot5 - 2\cdot3 - 4\cdot1}{\sqrt{4+4+16}\cdot\sqrt{25+9+1}} = 0,$$

бурадан $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

§ 10. ВЕКТОРЛАРЫН ВЕКТОРИАЛ ҺАСИЛИ

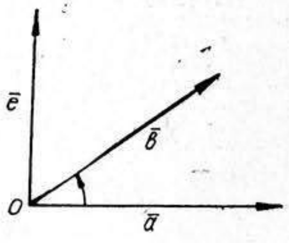
Мүәјјән ардычыллыгла көтүрүлмүш вә компланар олмајан $\bar{a}$ (биринчи), $\bar{b}$ (икинчи) вә $\bar{c}$ (үчүнчү) векторлары көтүрәк. Бу векторларын башланғычыны бир нөгтәјә көчүрсәк, ашағыдакы ики вәзијјәтин бири алынар:

I. $\bar{c}$ векторунун сон учундан бахдыгда $\bar{a}$ векторуну $\bar{b}$ вектору үзәринә кәтирмәк үчүн кичик бучаг гәдәр фырлама саат әгрәби һәрәкәтинин әксинә олур (24-чү шәкил). Бу һалда, дејирләр ки, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *векторлары үчлүјү сағ ориjентасијалыдыр вә ја сағ үчлүкдүр.*

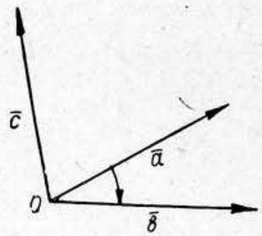
II. $\bar{c}$ векторунун сон учундан бахдыгда $\bar{a}$ векторуну $\bar{b}$ вектору үзәринә кәтирмәк үчүн кичик бучаг гәдәр фырланма саат әгрәби һәрәкәтинин истигамәтиндә олур (25-чи шәкил). Бу һалда исә $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлары *сол ориjентасијалы үчлүк вә ја сол үчлүк* адланыр.

1349—5

Векторлар үчлүјүнүн сағ вә сол ориjентасиjалы олмасы онларын уjғун олараг сағ вә сол әлин бармагларына уjғун олмаларыдыр (26-чы шәкил).

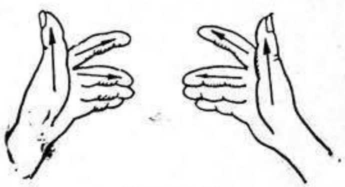


Шәкил 24.

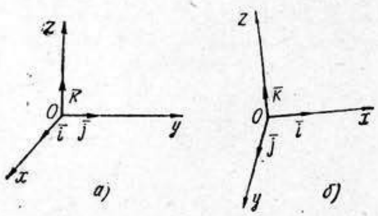


Шәкил 25.

Гејд едәк ки, $\bar a, \bar b, \bar c$ векторлары үчлүјүндә векторларын јерини даирәви[1] ганунла дәјишсәк, һәмин үчлүјүн ориjентасиjасы позулмаз. Лакин даирәви олмаjан башга јердәјишмә үчлүјүн ориjентасиjасыны дәјишәр. Мәсәлән, $\bar a, \bar b, \bar c$ үчлүјүндә тәкчә $\bar a$ вә $\bar b$ векторларынын јерини дәјишсәк (бу даирәви јердәјишмә дејил), алынан $\bar b, \bar a, \bar c$ үчлүјү илә верилмиш $\bar a, \bar b, \bar c$ үчлүјү мүхтәлиф ориjентасиjалы олар.



Шәкил 26.

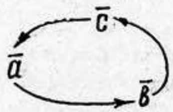


Шәкил 27.

Әкәр $\bar i, \bar j, \bar k$ Декарт координат базиси үчлүјү сағ ориjентасиjалыдырса, онда координат системинә *сағ Декарт координат системи* (27-чи шәкил, *а*), һәмин үчлүк сол ориjентасиjалы олдугда исә координат системинә *сол Декарт координат системи* (27-чи шәкил, *б*) дејилир.

Биз бурада сағ Декарт координат системиндән истифадә едәҹәјик.

[1] *a, b, c* векторларынын даирәви ганунла јерини дәјишмәк *a*-ны *b* илә, *b*-ни *c* илә вә *c*-ни *a* илә әвәз етмәк демәкдир:



Тә'риф. *$\bar a$ (биринҹи) векторунун $\bar b$ (икинҹи) векторуна векториал һасили ашағыдакы үч шәрти өдәјән $\bar c$ векторуна дејилир:*

1) *$\bar c$ векторунун узунлуғу $\bar a$ вә $\bar b$ векторлары үзәриндә гурулмуш паралелограмын саһәсинә бәрабәр олсун:*

$$|\bar c| = |\bar a|\,|\bar b|\sin\varphi,\quad \varphi = (\widehat{\bar a, \bar b}).$$

2) *$\bar c$ вектору $\bar a$ вә $\bar b$ векторларынын мүстәвисинә перпендикулјар олсун.*

3) *$\bar a, \bar b, \bar c$ үчлүјү сағ ориjентасиjалы олсун.*

$\bar a$ вә $\bar b$ векторларынын векториал һасили $\bar c = [\bar a, \bar b]$ вә ја $\bar c = \bar a \times \bar b$ илә ишарә олунур.

Тә'рифдән ајдындыр ки, коллинеар олан $\bar a$ вә $\bar b$ векторларынын векториал һасили сыфра бәрабәрдир. Бунун тәрси дә доғрудур. Демәли, $\bar a$ вә $\bar b$ векторларынын коллинеар олмасы үчүн онларын векториал һасилинин сыфра бәрабәр олмасы, $[\bar a, \bar b] = 0$, зәрури вә кафи шәртдир. Хүсуси һалда,

$$\bar a \times \bar a = 0.$$

Векторларын векториал һасилинин ашағыдакы хассәләри вардыр:

I. *Векториал һасил јердәјишмә (коммутативлик) хассәсинә табе дејилдир:*

$$\bar a \times \bar b = -\bar b \times \bar a. \tag{1}$$

Доғрудан да, тә'рифә көрә векториал һасилин модулу векторлар үзәриндә гурулан паралелограмын саһәсинә бәрабәр олдуғундан:

$$|\bar a \times \bar b| = |\bar b \times \bar a|,$$

лакин

$$\bar a,\ \bar b,\ \bar a \times \bar b$$

сағ үчлүк тәшкил етдијиндән

$$\bar b,\ \bar a,\ -\bar a \times \bar b$$

векторлары сағ үчлүк әмәлә кәтирәр. Демәли,

$$\bar b \times \bar a = -\bar a \times \bar b.$$

II. *Скалјар вуруғу векториал һасил ишарәси харичинә чыхармаг олар:*

$$(\lambda \bar a) \times \bar b = \bar a \times (\lambda \bar b) = \lambda(\bar a \times \bar b). \tag{2}$$

Доғрудан да, паралелограмын бир тәрәфини, истигамәтини дәјишмәдән λ дәфә узатсаг, онун саһәси дә һәмин әдәд дәфә бөјүјәр. Демәли,

$$(\lambda \bar a) \times \bar b = \lambda(\bar a \times \bar b) = \bar a \times (\lambda \bar b).$$

III. *Векториал һасилин пајланма хассәси вардыр:*

$$\bar a\times(\bar b+\bar c)=\bar a\times\bar b+\bar a\times\bar c, \qquad (3)$$

$$(\bar a+\bar b)\times\bar c=\bar a\times\bar c+\bar b\times\bar c. \qquad (4)$$

Бу хассә 12-чи параграфда исбат олунур.

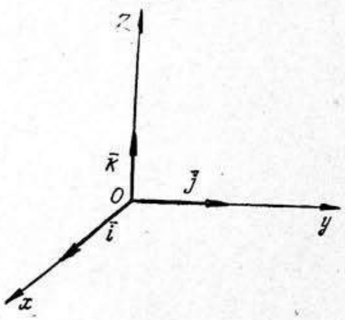
Гејд. Векторларын векториал һасили груплашдырма хассәсинә малик дејилдир. $(a\times b)\times c$ һасили $a\times(b\times c)$ һасилинә бәрабәр олмаја да биләр. Буна көрә дә үч векторун һасилини $a\times b\times c$ шәклиндә јазмаг олмаз.

§ 11. ВЕКТОРИАЛ ҺАСИЛИН КООРДИНАТЛАРЛА ИФАДӘСИ. ҮЧБУЧАҒЫН САҺӘСИ

Тутаг ки, $\bar a(a_x, a_y, a_z)$ вә $\bar b(b_x, b_y, b_z)$ векторлары өз координатлары илә верилмишдир. Бу векторларын векториал һасилинин верилмиш координатларла ифадәсини тапаг. Бу мәгсәдлә $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ координат ортларынын чүт-чүт векториал һасилләрини һесаблајаг. Векториал һасилин тә'рифинә көрә:

$$\bar i\times\bar i=0,\quad \bar j\times\bar j=0,\quad \bar k\times\bar k=0.$$

Координат ортларынын јерләшмәсиндән (28-чи шәкил) исә ајдындыр ки,



Шәкил 28.

$$\bar i\times\bar j=\bar k,\quad \bar i\times\bar k=-\bar j,$$

$$\bar j\times\bar k=\bar i,\quad \bar j\times\bar i=-\bar k,$$

$$\bar k\times\bar i=\bar j,\quad \bar k\times\bar j=-\bar i.$$

Онда

$$\bar a=a_x\bar i+a_y\bar j+a_z\bar k$$

вә

$$\bar b=b_x\bar i+b_y\bar j+b_z\bar k$$

векторларынын векториал һасилини

$$\bar a\times\bar b=(a_x\bar i+a_y\bar j+a_z\bar k)\times(b_x\bar i+b_y\bar j+b_z\bar k)=$$

$$=a_xb_y\bar k+a_xb_z(-\bar j)-a_yb_x\bar k+a_yb_z\bar i+a_zb_x\bar j-a_zb_y\bar i=$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\bar i+(a_zb_x-a_xb_z)\bar j+(a_xb_y-a_yb_x)\bar k$$

вә јахуд ашағыдакы кими јазмаг олар:

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\cdot\bar i+\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix}\cdot\bar j+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\cdot\bar k \qquad (1)$$

вә ја

$$\bar a\times\bar b=\begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix} \qquad (2)$$

Нәтичә 1. Ики тәрәфи ујғун олараг

$\bar a(a_x, a_y, a_z)$ вә $\bar b(b_x, b_y, b_z)$

олан үчбучағын саһәси, һәмин векторлар үзәриндә гурулмуш паралелограмын саһәсинин јарысына бәрабәрдир:

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\,|\bar a\times\bar b|. \qquad (3)$$

Әкәр үчбучағын верилмиш $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ вә $C(x_3, y_3, z_3)$ тәпәләрини бирләшдирсәк $\bar a=\overline{AB}$ вә $\bar b=\overline{AC}$ векторларыны аларыг. Бу векторларын координатлары:

$$a_x=x_2-x_1,\quad a_y=y_2-y_1,\quad a_z=z_2-z_1,$$

$$b_x=x_3-x_1,\quad b_y=y_3-y_1,\quad b_z=z_3-z_1.$$

Онда үчбучағын саһәсини

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}^2}$$

дүстурунда $a_x, a_y, a_z, b_x, b_y, b_z$ әдәдләринин јеринә көстәрилән гијмәтләри јазмагла һесабламаг олар.

Нәтичә 2. $\bar a(a_x, a_y, a_z)$ *вә* $\bar b(b_x, b_y, b_z)$ *векторларынын коллинеар олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт*

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z} \qquad (4)$$

олмасыдыр. Доғрудан да, $\bar a$ вә $\bar b$ векторларынын коллинеар олмасы үчүн онларын векториал һасилинин сыфыр олмасы зәрури вә кафи шәрт олдуғундан (1) бәрабәрлијинә көрә

$$(a_yb_z-a_zb_y)\cdot\bar i+(a_zb_x-a_xb_z)\cdot\bar j+(a_xb_y-a_yb_x)\bar k=0$$

вә јахуд

$$a_yb_z-a_zb_y=0,\quad a_zb_x-a_xb_z=0,\quad a_xb_y-a_yb_x=0.$$

Бурадан (4) мүнасибәтинин доғрулуғу ајдындыр.

Мисал. $\bar a(1, -2, 3)$ вә $\bar b(2, 1, -1)$ векторлары үзәриндә гурулмуш паралелограмын саһәсини тапмалы.

(1) дүстуруна көрә

$$\bar a\times\bar b=-\bar i+7\bar j+5\bar k$$

олдуғундан

$$S = |\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{1+49+25} = 5\sqrt{3}.$$

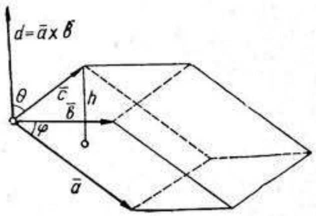
§ 12. ҮЧ ВЕКТОРУН ГАРЫШЫГ ҺАСИЛИ

Т ә'р и ф. *$\bar{a}$ (биринчи), $\bar{b}$ (икинчи) вә $\bar{c}$ (үчүнчү) векторларынын биринчи икисинин $\bar{a}\times\bar{b}$ векториал һасилинин үчүнчү $\bar{c}$ векторуна скалјар һасили, јә'ни $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ ифадәси, һәмин векторларын гарышыг һасили адланыр вә $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ вә јахуд $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ илә ишарә олунур.*

Тә'рифдән ајдындыр ки, үч векторун гарышыг һасили скалјар кәмијјәтдир.

Т е о р е м. ***Компланар олмајан a, b, c векторларынын гарышыг һасилинин модулу һәмин векторлар үзәриндә гурулмуш паралелепипедин һәчминә бәрабәрдир.***

И с б а т ы. $\bar{d} = \bar{a}\times\bar{b}$ векторунун узунлуғу $\bar{a}$ вә $\bar{b}$ векторлары үзәриндә гурулмуш вә паралелепипедин отурачағы олан паралелограмын саһәсинә бәрабәрдир:



Шәкил 29.

$$|\bar{d}| = |\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\sin\varphi.$$

29-чу шәкилдән ајдындыр ки,

$$h = |\text{Пр}_{\bar{d}}\,\bar{c}| = |\bar{c}|\cdot|\cos\theta|.$$

Онда паралелепипедин һәчми

$$V = h\cdot|\bar{d}|$$

дүстуру илә һесабланар. Бурадан скалјар һасилин тә'рифинә көрә:

$$V = ||\bar{d}||\bar{c}|\cos\theta| = |\bar{d}\cdot\bar{c}| = |(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}|$$

вә јахуд

$$V = |(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}|. \qquad (1)$$

Теоремин исбатындан ајдындыр ки, $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ үчлүјү сағ орijентасијалы олдугда онларын гарышыг һасили мүсбәтдир вә

$$V = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$$

мүнасибәти өдәниләр. Һәмин үч вектор сол үчлүк әмәлә кәтирдикдә исә гарышыг һасил мәнфидир вә бу һалда

$$V = -(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$$

көтүрмәк лазымдыр.

Инди $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b}(b_x, b_y, b_z)$ вә $\bar{c}(c_x, c_y, c_z)$ векторларынын координатлары мә'лум олдугда онларын гарышыг һасилинин

ифадәсини тапаг. Бу мәгсәдлә, $\bar{a}\times\bar{b}$ векториал һасили үчүн әввәлки параграфда исбат етдијимиз

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\bar{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}\cdot\bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\cdot\bar{k}$$

ајрылышыны $\bar{c}$ векторунун

$$\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\cdot\bar{k}$$

ајрылышына скалјар вурмаг лазымдыр:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} + c_y\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Бу ифадәни

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

кими јазмаг олар. Демәли,

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Гарышыг һасил үчүн тапдығымыз (2) көстәрилишиндән истифадә едәрәк, онун бир сыра хассәләрини мүәјјән етмәк олар.

1. *$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ векторларынын даирәви јердәјишмәси нәтичәсиндә онларын гарышыг һасили дәјишмир:*

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}. \qquad (3)$$

Доғрудан да, детерминантларын ујғун хассәләринә (I, § 4) көрә:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}.$$

Скалјар һасил јердәјишмә хассәсинә табе олдуғундан:

$$(\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}).$$

Онда (3) мүнасибәтиндән:

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = (\bar{b}\times\bar{c})\cdot\bar{a} = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$$

вә јахуд

$$(\bar a\times\bar b)\cdot\bar c=\bar a\cdot(\bar b\times\bar c),$$

јә'ни скалјар вә векториал вурма ишарәләрини вуруглар арасында ихтијари јаздыгда гарышыг һасилин гијмәти дәјишмир. Буна көрә дә гарышыг һасили $\bar a\,\bar b\,\bar c$ илә ишарә едирләр.

II. *Вуругларын даирәви олмајан башга јердәјишмәси нәтиҹәсиндә гарышыг һасилин анҹаг ишарәси дәјишир:*

$$\bar a\,\bar b\,\bar c=-\bar b\,\bar a\,\bar c=-(\bar a\,\bar c\,\bar b)=-(\bar c\,\bar b\,\bar a).\qquad(4)$$

Доғрудан да, (2) детерминантында биринҹи вә икинҹи сәтирләрин јерини дәјишдикдә детерминант өз ишарәсини дәјишир:

$$\bar a\,\bar b\,\bar c=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_x&b_y&b_z\\a_x&a_y&a_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=-\bar b\,\bar a\,\bar c.$$

III. *Гарышыг һасил вуругларын һәр биринә нәзәрән хәттидир. Хүсуси һалда, ихтијари һәгиги λ вә μ әдәдләри үчүн*

$$(\lambda_1\bar a_1+\lambda_2\bar a_2)\bar b\,\bar c=\lambda_1(\bar a_1\bar b\,\bar c)+\lambda_2(\bar a_2\bar b\,\bar c)\qquad(5)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Буну исбат етмәк үчүн скалјар һасилин пајланма хассәсиндән истифадә етмәк кифајәтдир:

$$(\lambda_1\bar a_1+\lambda_2\bar a_2)\bar b\,\bar c=(\lambda_1\bar a_1+\lambda_2\bar a_2)\cdot(\bar b\times\bar c)=$$
$$=\lambda_1\bar a_1\cdot(\bar b\times\bar c)+\lambda_2\bar a_2\cdot(\bar b\times\bar c)=\lambda_1(\bar a_1\bar b\,\bar c)+\lambda_2(\bar a_2\bar b\,\bar c).$$

Бу хассәдән вә скалјар һасилин VI хассәсиндән (§ 9) истифадә едәрәк, векториал һасил үчүн пајланма хассәсинин доғру олдуғуну (§ 10, III хассә) көстәрмәк олар.

Доғрудан да, истәнилән $\bar d$ вектору үчүн

$$((\bar a+\bar b)\times\bar c)\,\bar d=(\bar a+\bar b)\cdot(\bar c\times\bar d)=\bar a(\bar c\times\bar d)+\bar b(\bar c\times\bar d)=$$
$$=(\bar a\times\bar c)\cdot\bar d+(\bar b\times\bar c)\,\bar d=((\bar a\times\bar c)+(\bar b\times\bar c))\,\bar d$$

вә јахуд

$$((\bar a+\bar b)\times\bar c)\,\bar d=((\bar a\times\bar c)+(\bar b\times\bar c))\,\bar d$$

доғру олдуғундан скалјар һасилин VI хассәсинә көрә:

$$(\bar a+\bar b)\times\bar c=(\bar a\times\bar c)+(\bar b\times\bar c).\qquad(6)$$

IV. *Үч $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ векторунун компланар олмасы үчүн онларын гарышыг һасилинин сыфра бәрабәр олмасы, јә'ни*

$$\bar a\,\bar b\,\bar c=0\qquad(7)$$

вә јахуд

$$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0\qquad(8)$$

олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Доғрудан да, $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ векторлары компланар оларса, онлар үзәриндә гурулмуш паралелепипедин һәчми сыфра бәрабәрдир. Бурадан (7) шәрти алыныр. Тәрсинә (7) шәрти өдәнилдикдә $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ векторлары компланардыр, чүнки экс һалда онлар үзәриндә гурулан паралелепипедин һәчми сыфырдан фәргли, јә'ни

$$V=|\bar a\,\bar b\,\bar c|\neq 0$$

олар ки, бу да (7) шәртинә зиддир.

Үч векторун гарышыг һасили һаггында јухарыда исбат етдијимиз теоремдән истифадә едәрәк, тәпәләри верилмиш M_1, M_2, M_3, M_4 нөгтәләри олан пирамиданын һәчмини һесабламаг олар. Доғрудан да, $\bar a=\overline{M_1M_2}$, $\bar b=\overline{M_1M_3}$ вә $\bar c=\overline{M_1M_4}$ һесаб етсәк, онда һәмин векторлар үзәриндә гурулмуш паралелепипедин һәчминин алтыда бири верилмиш пирамиданын һәчминә бәрабәр олар:

$$V=\frac{1}{6}\,|\bar a\,\bar b\,\bar c|\qquad(9)$$

вә ја

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}\right|\qquad(10)$$

Мисал. Тәпәләри $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(-1, 0, 1)$, $M_3(2, -2, 1)$ вә $M_4(3, 2, 1)$ олан пирамиданын һәчмини һесабламалы.

Бу мәгсәдлә, әввәлчә $\bar a=\overline{M_1M_2}$, $\bar b=\overline{M_1M_3}$ вә $\bar c=\overline{M_1M_4}$ векторларыны тапаг:

$$\bar a=-2\bar i-2\bar j+\bar\kappa,\quad \bar b=\bar i-4\bar j+\bar\kappa,\quad \bar c=2\cdot\bar i+0\cdot\bar j+\bar\kappa.$$

Онда (1) дүстуруна көрә:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-2&-2&1\\1&-4&1\\2&0&1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\,|-8-4+8+2|=\frac{1}{3}.$$

IV ФӘСИЛ

ХӘТТИ ФӘЗАЛАР

§ 1. ХӘТТИ ФӘЗАНЫН ТӘ'РИФИ

Биз әввәлки фәсилләрдә бир нечә мүхтәлиф тәбиәтли елементләр чохлуғунда топлама вә әдәдә вурма әмәлләриндән (хәтти әмәлләрдән) данышмышыг. Мәсәлән, ејниөлчүлү матрисләрин ҹәминдән вә әдәдә вурулмасындан (I, § 2), верилмиш матрисин сәтирләринин (вә сүтунларынын) ҹәминдән вә әдәдә вурулмасындан (I, § 5), векторларын ҹәминдән вә әдәдә вурулмасындан (III, § 2) вә с. данышылмышдыр. Башга чохлугларын да елементләринин ҹәминдән вә әдәдә вурулмасындан данышмаг олар.

Мәсәлән, дәрәчәси n-дән бөјүк олмајан чәбри чохһәдлиләр чохлуғунда да хәтти әмәлләр тә'јин олунур.

Хәтти әмәлләр һәгиги әдәдләр чохлуғунда (вә еләчә дә комплекс әдәдләр чохлуғунда) да тә'јин олунмушдур: истәнилән ики һәгиги әдәдин чәми вә һасили јенә дә һәгиги әдәддир.

Јухарыда сајдығымыз чохлугларын һәр бириндә хәтти әмәлләр мүхтәлиф шәкилдә (һәр чохлуғун өзүнә ујғун шәкилдә) тә'јин олунса да, онларын һамысы ејни хассәләрә: јердәјишмә, груплашдырма вә с. хассәләринә маликдир. Буна көрә дә белә бир тәбии суал гаршыја чыхыр: ики ихтијари елементинин чәми вә елементләринин әдәдә (һәгиги вә ја комплекс) һасили тә'јин олуна билән истәнилән тәбиәтли елементләр чохлуғуну өјрәнмәк олмазмы? Олар. Елементләри арасында һәр һансы јолла мүәјјән хассәләри өдәјән хәтти әмәлләр тә'јин олунан даһа үмуми чохлуглары өјрәнмәк мүмкүндүр. Белә чохлуглара *хәтти фәзалар* дејилир.

Тә'риф. *Тутаг ки, истәнилән тәбиәтли $x, y, z, u, \ldots$ елементләринин R чохлуғу үчүн ашағыдакы шәртләр өдәнилир:*

I. *Чохлуғун истәнилән ики x вә y елементинә, һәмин чохлуғун јеканә бир $z \in R$ елементини гаршы гојан мүәјјән гајда (топлама әмәли) көстәрилсин. z елементинә x вә y елементләринин чәми дејилир вә $z = x + y$ илә ишарә олунур.*

II. *Чохлуғун истәнилән x елементинә вә истәнилән λ һәгиги әдәдинә һәмин чохлуғун јеканә бир $u \in R$ елементини гаршы гојан мүәјјән гајда (әдәдә вурма әмәли) көстәрилсин. u елементинә x елементинин һәгиги λ әдәдинә һасили дејилир вә $u = \lambda x$ вә ја $u = x\lambda$ илә ишарә олунур.*

III. *R чохлуғунда тә'јин олунмуш топлама вә әдәдә вурма әмәлләри (хәтти әмәлләр) үчүн ашағыдакы аксиомлар өдәнилсин:*

1°. *Истәнилән $x \in R$ вә $y \in R$ үчүн:*

$$x + y = y + x.$$

2°. *Истәнилән $x \in R$, $y \in R$ вә $z \in R$ үчүн:*

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

3°. *Елә сыфыр $\theta \in R$ елементи вар ки, истәнилән $x \in R$ үчүн:*

$$x + \theta = x.$$

4°. *Истәнилән $x \in R$ елементи үчүн онун экси адланан елә $-x \in R$ елементи вар ки, $x + (-x) = \theta$.*

5°. *Истәнилән $x \in R$ үчүн $1 \cdot x = x$.*

6°. *Истәнилән $x \in R$ вә һәгиги λ, μ әдәдләри үчүн:*

$$\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x.$$

7°. *Истәнилән $x \in R$ вә һәгиги λ, μ әдәдләри үчүн:*

$$(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x.$$

8°. *Истәнилән $x \in R$, $y \in R$ вә һәгиги λ әдәди үчүн:*

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

Онда R чохлуғуна һәгиги хәтти фәза дејилир. Бу тә'рифдә комплекс әдәдләрә вурма әмәли тә'јин олундуғда, R чохлуғуна комплекс хәтти фәза дејилир.

Хәтти фәзанын тә'рифиндә јалныз елементләр дејил, тә'јин олунан топлама вә әдәдә вурма әмәлләри дә үмуми (мүчәррәд) көтүрүлүр. Бахылан елементләрин вә тә'јин олунан хәтти әмәлләрин тәбиәти (шәкли) көстәрилдикдә конкрет хәтти фәзалар алынар.

Гејд едәк ки, бә'зән истәнилән хәтти фәзаја *хәтти векториал фәза*, онун елементләринә исә *векторлар* дејилир. Әлбәттә, бу заман хәтти фәзанын елементи олан үмуми «вектор» анлајышыны III фәсилдә бахдығымыз дар «вектор» анлајышы илә гарышдырмаг олмаз.

Хәтти фәзанын 1°—8° аксиомларындан ашағыдакы нәтичәләр алыныр:

1. *Хәтти фәзанын сыфыр елементи јеканәдир.* Доғрудан да, тутаг ки, R фәзасында ики θ_1 вә θ_2 сыфыр елементи вардыр. Онда истәнилән $x \in R$ үчүн $x + \theta_1 = x$ вә $x + \theta_2 = x$ олдуғундан $\theta_2 + \theta_1 = \theta_2$ вә $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1$. Бурадан $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1$ олмасына әсасән $\theta_1 = \theta_2$ олар.

2. *Хәтти фәзанын һәр бир $x \in R$ елементинин $-x$ әкс елементи јеканәдир.* Буну исбат етмәк үчүн x елементинин ики $-x_1$ вә $-x_2$ әкс елементи олдуғуну фәрз едәк. Онда

$$(-x_1) + x + (-x_2) = (-x_1 + (x + (-x_2))) = (-x_1) + \theta = -x_1$$

вә

$$(-x_1) + x + (-x_2) = ((-x_1) + x) + (-x_2) = \theta + (-x_2) = -x_2$$

олдуғундан $-x_1 = -x_2$ алынар.

$x + (-x) = \theta$ олмасындан ајдындыр ки, $-x \in R$ елементинин дә әкс елементи x-дир.

y вә $(-x)$ елементләринин чәминә y вә x елементләринин фәрги дејилир вә $y - x$ илә ишарә олунур.

3. *Истәнилән $x \in R$ елементинин сыфыр әдәдинә һасили R фәзасынын сыфыр елементинә бәрабәрдир:*

$$0 \cdot x = \theta.$$

Доғрудан да,

$$0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x, \quad 0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$$

бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфинә $-0 \cdot x$ елементини әлавә етсәк $\theta = 0 \cdot x$ алынар.

4. *Истәнилән һәгиги λ әдәди вә $\theta \in R$ елементи үчүн $\lambda \cdot \theta = 0$ олар.*

5. $\lambda x = \theta$ *оларса, онда ја* $x = \theta$, *ја да* $\lambda = 0$. Доғрудан да, $\lambda \neq 0$ оларса, онда:

$$x = 1 \cdot x = \left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}\right) x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\theta = \theta.$$

6. *Һәр бир* $x \in R$ *үчүн* $(-1) \cdot x$ *елементи x-ин әкс елементидир.* Буна инанмаг үчүн

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0 \cdot x = \theta$$

бәрабәрлијинә вә әкс елементин јеканәлији хассәсинә әсасланмаг лазымдыр:

$$(-1)x = -x.$$

§ 2. КОНКРЕТ ХӘТТИ ФӘЗАЛАР

Хәтти фәзанын тә'рифиндә бахылан R чохлуғу елементләринин вә һәмин чохлугда тә'јин олунан хәтти әмәлләрин (топлама вә әдәдә вурма әмәлләринин) тәбиәтини вә ја конкрет шәклини көстәрмәклә мүхтәлиф конкрет хәтти фәзалар алмаг олар.

I. Елементләри һәгиги әдәдләр олан бүтүн n-тәртибли матрисләр (I, § 1) чохлуғуну R илә ишарә едәк. R чохлуғунда топлама вә һәгиги әдәдә вурма әмәлләрини I фәслин 2-чи параграфында тә'јин етдијимиз кими гәбул етсәк, 1°—8° аксиомларынын һамысы өдәниләр, јә'ни n-тәртибли матрисләр чохлуғу һәгиги хәтти фәза тәшкил едир. Бу фәзанын сыфыр елементи n-тәртибли сыфыр матрис олур:

$$\theta = \left.\left\| \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}}_{n} \right\|\right\} n$$

II. Мүстәви үзәриндәки бүтүн векторлар (јә'ни истигамәтли парчалар) чохлуғуну V_2 илә ишарә едәк. Белә векторларын чәмини вә һәгиги әдәдә һасилини биз әввәлки фәсилдә (III, § 2) тә'јин етмишик. Бу хәтти әмәлләр үчүн 1°—8° аксиомлары өдәнилир. Демәли, V_2 чохлуғу һәгиги хәтти фәзадыр. Буна икиөлчүлү векториал фәза дејилир.

Еләчә дә, дүз хәтт үзәриндә јерләшән бүтүн векторлар чохлуғу V_1 хәтти фәзасыны (бирөлчүлү векториал фәзаны), фәзада јерләшән бүтүн ади векторлар чохлуғу исә V_3 хәтти фәзасыны— үчөлчүлү векториал фәзаны тәшкил едир.

Бу векториал фәзаларын сыфыр елементи сыфыр вектордур.

III. Дәрәчәси верилмиш n әдәдиндән бөјүк олмајан бүтүн $p(x)$ чәбри чоһһәдлиләр чохлуғуну P_n илә ишарә етсәк, бу чохлугда топлама вә әдәдә вурма әмәлләрини ријази анализдә көс-

тәрилдији кими тә'јин етмәк олар. Бу һалда 1°—8° аксиомлары өдәнилир, јә'ни P_n чохлуғу һәгиги хәтти фәзадыр.

P_n хәтти фәзасынын сыфыр елементи бүтүн әмсаллары сыфра бәрабәр олан чохһәдлидир.

IV. R_n илә һәгиги әдәдләрдән дүзәлмиш бүтүн низамлы $(x_1, x_2, ..., x_n)$ чохлуглары чохлуғуну (n-ликләр чохлуғуну) ишарә едәк. Бу чохлуғун елементини $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ илә ишарә етсәк, онда һәгиги $x_1, x_2, ..., x_n$ әдәдләри x елементинин координатлары адланыр.

R_n чохлуғунда ики ихтијари $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вә $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ елементинин чәмини

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

кими, x елементинин һәгиги λ әдәдинә һасилини исә

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

кими тә'јин едәк. Белә тә'јин олунмуш хәтти әмәлләр n һәгиги әдәддән ибарәт олан сәтирләр үзәриндә тә'јин олунмуш топлама вә әдәдә вурма әмәлләрини хатырладыр (I, § 5).

R_n чохлуғунда сыфыр елемент $\theta = (0, 0, ..., 0)$, x елементинин әкс елементи исә $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$ олар.

Јохламаг олар ки, R_n чохлуғунда тә'јин олунмуш хәтти әмәлләр үчүн 1°—8° аксиомлары өдәнилир, јә'ни R_n чохлуғу хәтти фәзадыр.

Ријази анализдә R_n фәзасына *n-өлчүлү һесаби фәза* вә ја *n-өлчүлү координат фәзасы* дејилир.

V. Бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу ади топлама вә вурма әмәлләринә көрә һәгиги хәтти фәза тәшкил едир. Бу һалда 1°—8° аксиомларынын өдәнилмәси һесаб әмәлләринин хассәләриндән ајдындыр. Бу фәзанын сыфыр елементи сыфыр әдәдидир.

Бүтүн комплекс әдәдләр чохлуғу исә топлама вә комплекс әдәдә вурма әмәлләринә көрә комплекс хәтти фәза тәшкил едир. Комплекс хәтти фәзанын сыфыр елементи, һәгиги вә хәјали һиссәси сыфыр олан

$$\theta = 0 + i \cdot 0$$

комплекс әдәдидир.

VI. Верилмиш $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән һәгиги функсијалар чохлуғунда $x = x(t)$ вә $y = y(t)$ функсијаларынын чәмини ади гајда илә

$$x + y = x(t) + y(t)$$

вә һәгиги λ әдәдинә вурма әмәлини исә

$$\lambda x = \lambda x(t)$$

кими тә'јин етсәк, һәгиги хәтти фәза аларыг. Бу фәзаны $C[a, b]$ илә ишарә едирләр.

Ријази анализдән мә'лумдур ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән ики функсијанын чәми вә бу функсијаларын һәр биринин ихтијари һәгиги әдәдә һасили јенә дә һәмин парчада кәсилмәјән функсијадыр, јә'ни $C[a, b]$ фәзасына дахилдир.

$C[a, b]$ фәзасында сыфыр елементи $[a, b]$ парчасында ејниликлә сыфра бәрабәр олан $\theta = x(t) \equiv 0$ $(t \in [a, b])$ функсијасыдыр. Бу фәзада 1°—8° аксиомларынын өдәнилмәсини јохламаг чәтин дејилдир.

VII. Јалныз сыфыр әдәдиндән ибарәт олан чохлуг да хәтти фәза тәшкил едир. Бу фәзада елементләрин чәми вә һәгиги λ әдәдинә вурма әмәлләри $0 + 0 = 0$, $\lambda 0 = 0$ кими тә'јин олунур. Бу фәза *сыфыр фәза* адланыр.

Хәтти фәзаја аид чохлу мисаллар көстәрмәк олар. Лакин охучу билмәлидир ки, һәр бир чохлуг хәтти фәза әмәлә кәтирмир. Буну ашағыдакы мисаллардан ајдын көрмәк олур.

1. Дәрәчәси дәгиг $n (n > 1)$ әдәдинә бәрабәр олан чәбри $P(x)$ чоxһәдлиләри чохлуғуну P_n^* $(P_n^* \subset P_n)$ илә ишарә етсәк, бу чохлуг хәтти фәза әмәлә кәтирмәз. Доғрудан да, P_n^* чохлуғуна дахил олан ики $P'(x)$ вә $P''(x)$ чохһәдлиләринин чәми һәмин чохлуға дахил олмаја да биләр. Мәсәлән, n-дәрәчәли һәдләринин әмсаллары гаршылыглы әкс әдәдләр (ax^n вә $-ax^n$ кими) олан ики чохһәдлинин чәми, дәрәчәси $(n-1)$-дән бөјүк олмајан чохһәдлидир.

2. Мүстәви үзәриндә јерләшән бүтүн векторлар чохлуғундан һәр һансы дүз хәттә паралел олан бүтүн векторлары кәнар етсәк, јердә галан векторлар чохлуғу хәтти фәза әмәлә кәтирмәз. Чүнки бу чохлугда истәнилән ики векторун чәмини тапмаг мүмкүн дејилдир. Әкәр ики векторун чәми көстәрилән дүз хәттә паралел олан вектордурса, онда бу векторларын чәми һәмин чохлуға дахил олмаз.

§ 3. ХӘТТИ ФӘЗАНЫН БАЗИСИ ВӘ ӨЛЧҮСҮ

Биз әввәлләр сәтирләрин (сүтунларын) вә векторларын хәтти асылы олмасындан вә хәтти комбинасијасындан (I, § 5; III, § 3) данышмышыг. Даһа үмуми олан хәтти фәзаларын елементләри үчүн дә һәмин анлајышлары аналожи олараг сөјләмәк олар. Тутаг ки, R һәгиги хәтти фәзадыр. Бу фәзанын $x_k \in R$ $(k = \overline{1, n})$ елементләри вә һәгиги λ_k $(k = \overline{1, n})$ әдәдләри васитәсилә дүзәлмиш

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \tag{1}$$

ифадәсинә һәмин елементләрин *хәтти комбинасијасы* дејилир. Әкәр

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \tag{2}$$

оларса, онда дејирләр ки, $x \in R$ елементи $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләринин хәтти комбинасијасыдыр.

Т ә'р и ф *1. Хәтти R фәзасынын $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләринә о заман хәтти асылы елементләр дејилир ки, һеч олмаса бири сыфырдан фәргли олан вә*

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0 \qquad (3)$$

мүнасибәтини өдәјән һәгиги $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ әдәдләри олсун. Әкәр (3) мүнасибәти јалныз $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ олдугда өдәнилирсә, онда $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләринә хәтти асылы олмајан елементләр дејилир.

Верилмиш $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләринин бири сыфыр елемент (θ) оларса, онда һәмин елементләр һәмишә хәтти асылыдыр. Хәтти асылы олмајан $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләри чохлуғунун истәнилән алт һиссәси дә хәтти асылы олмајандыр.

Хәтти асылы олан векторлар һаггында исбат етдијимиз теоремә (III, § 3) аналожи олараг ашағыдакы теореми дә исбат етмәк олар:

Т е о р е м 1. ***Һәгиги хәтти R фәзасынын $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләринин хәтти асылы олмасы үчүн онлардан биринин галанларынын хәтти комбинасијасы олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Инди хәтти R фәзасынын базиси анлајышыны верәк.

Т ә'р и ф 2. *Һәгиги хәтти R фәзасынын истәнилән x елементини һәмин фәзанын хәтти асылы олмајан $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләри үзрә ајырмаг мүмкүн олдугда, јә'ни истәнилән $x \in R$ үчүн*

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n \qquad (4)$$

мүнасибәтини өдәјән һәгиги $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ әдәдләри тапмаг мүмкүн олдугда, $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләринин низамлы чохлуғуна R фәзасынын базиси дејилир.

(4) *бәрабәрлијинә x елементинин $x_1, x_2, ..., x_n$ базиси үзрә ајрылышы, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ һәгиги әдәдләринә исә x елементинин һәмин базисә нәзәрән координатлары* дејилир. Буну $x(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ вә ја $x = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ шәклиндә јазырлар.

Т е о р е м 2. ***Һәгиги хәтти R фәзасынын истәнилән x елементинин һәмин фәзанын $x_1, x_2, ..., x_n$ базиси үзрә***

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n \qquad (4)$$

ајрылышы јеканәдир.

Доғрудан да, x елементинин һәмин базис үзрә (4)-дән башга

$$x = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + ... + \mu_n x_n \qquad (5)$$

ајрылышы да оларса, онда (4) вә (5) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә чыхмагла

$$(\lambda_1 - \mu_1) x_1 + (\lambda_2 - \mu_2) x_2 + ... + (\lambda_n - \mu_n) x_n = \theta \qquad (6)$$

мүнасибәтини алмаг олар. R фәзасынын базисини тәшкил едән $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләри хәтти асылы олмадығындан (6) бәрабәрлији анчаг $\lambda_к - \mu_к = 0$ ($к=1, 2, ..., n$) олдугда, jә'ни

$$\lambda_1 = \mu_1, \ \lambda_2 = \mu_2, ..., \lambda_n = \mu_n$$

олдугда мүмкүндүр. Демәли, x елементинин (4) аjрылышы јеканәдир.

Бу теорем көстәрир ки, һәр бир $x \in R$ елементинә $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ әдәдләринин јеканә чохлуғу вә тәрсинә, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ әдәдләринә (4) бәрабәрлији илә тә'јин олан јеканә бир x елементи уjғундур, jә'ни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ әдәдләри x елементини биргиjмәтли тә'јин едир.

Хәтти фәза елементләринин базис үзрә аjрылмасынын бөjүк әһәмиjјәти вардыр. Бу аjрылышлар мүхтәлиф тәбиәтли елементләр үзәриндә апарылан топлама вә әдәдә вурма әмәлләринин һәмин елементләрин координатлары олан һәгиги әдәдләр үзәриндә апармаға имкан верир:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$$

вә

$$y = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + ... + \mu_n x_n$$

оларса, онда

$$x + y = (\lambda_1 + \mu_1) x_1 + (\lambda_2 + \mu_2) x_2 + ... + (\lambda_n + \mu_n) x_n$$

вә истәнилән һәгиги λ әдәди үчүн

$$\lambda x = (\lambda\lambda_1) x_1 + (\lambda\lambda_2) x_2 + ... + (\lambda\lambda_n) x_n.$$

Белә бир тәбии суал гаршыја чыхыр: хәтти R фәзасында хәтти асылы олмајан нечә елемент тапмаг олар?

Т ә' р и ф 3. Хәтти R фәзасында n сајда хәтти асылы олмајан елемент варса вә истәнилән $n+1$ сајда елементи хәтти асылыдырса, онда һәмин фәзаја n-өлчүлү хәтти фәза дејилир. Бу һалда *n әдәди R фәзасынын өлчүсү адланыр вә $n = d(R)$ кими ишарә олунур.*

Әкәр хәтти R фәзасында истәнилән сонлу сајда хәтти асылы олмајан елемент варса, онда һәмин фәзаја сонсуз өлчүлү хәтти фәза дејилир.

Т е о р е м 3. ***n-өлчүлү фәзанын n сајда хәтти асылы олмајан елементләринин һәр бир низамлы $x_1, x_2, ..., x_n$ чохлуғу һәмин фәзанын базисини тәшкил едир.***

Доғрудан да, фәзанын истәнилән x елементи верилмиш $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләри үзрә аjрылар, чүнки әкс һалда һәмин фәзада хәтти асылы олмајан $(n+1)$ сајда елемент тапмаг олар ки, бу да шәртә зиддир.

Тутаг ки, n-өлчүлү R фәзасында $к$ сајда ($к<n$) хәтти асылы олмајан $x_1, x_2, ..., x_к$ елементләри верилмишдир. Бу һалда, R фәзасында һәмин елементлә хәтти асылы олмајан бир $x_{к+1}$ елементи

дә тапмаг мүмкүндүр. Чүнки әкс һалда, $x_1, x_2, ..., x_к$ елементләри R фәзасынын базисини тәшкил едәр, бу исә ола билмәз. Беләликлә, R фәзасында $к+1$ сајда хәтти асылы олмајан $x_1, x_2, ..., x_к, x_{к+1}$ елементләри сечилмиш олур. $к+1<n$ олдугда бу процеси јенә давам етдирмәк олар.

Нәтичәдә R фәзасынын n сајда хәтти асылы олмајан елементи сечиләр ки, бу елементләр дә 3-чү теоремә көрә фәзанын базисини тәшкил едир.

Беләликлә, ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг:

Т е о р е м 4. ***n-өлчүлү фәзанын $к(к<n)$ сајда хәтти асылы олмајан елементләринин һәр бир низамлы чохлуғуну һәмин фәзанын базисинә гәдәр тамамламаг олар.***

Хүсуси һалда, фәзанын сыфыр олмајан һәр бир елементини базисә гәдәр тамамламаг олар.

Мисал 1. V_2 фәзасы (II, § 2) икиөлчүлү фәзадыр. Мүстәви үзәриндә јерләшән вә коллинеар олмајан ики ихтијари вектор һәмин фәзанын базисини тәшкил едир (III, § 4). Мүстәви үзәриндә һәр бир векторун базис үзрә јеканә аjрылышы вардыр.

Мисал 2. V_3 фәзасы (II, § 2) үчөлчүлү фәзадыр. Компланар олмајан үч ихтијари вектор бу фәзанын базисини тәшкил едир.

Мисал 3. R_n фәзасы (IV, § 2) n-өлчүлү хәтти фәзадыр. Һәмин фәзанын базиси олараг хәтти асылы олмајан

$$e_1(1, 0, 0, ..., 0), \ e_2(0, 1, 0, ..., 0), ..., \ e_n(0, 0, 0, ..., 1)$$

елементләри чохлуғуну көтүрмәк олар.

Истәнилән $x \in R_n$ елементи үчүн елә $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ һәгиги әдәдләри вар ки,

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$$

аjрылышы доғрудур.

Мисал 4. $C[a, b]$ фәзасы (VI, § 2) сонсузөлчүлү хәтти фәзадыр.

Доғрудан да, истәнилән n үчүн һәмин фәзаја дахил олан вә хәтти асылы олмајан n сајда $1, t, t^2, ..., t^{n-1}$ елементләри вардыр. Бу елементләрин хәтти асылы олмамасы

$$\lambda_0 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + ... + \lambda_{n-1} t^{n-1} \equiv 0 \qquad (7)$$

мүнасибәтинин анчаг $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_{n-1} = 0$ олдугда өдәнилмәсиндән аjдындыр. Һеч олмаса бир әмсалы сыфыр олмајан $(n-1)$ дәрәчәли чәбри чохһәдли ән чоху $(n-1)$ сајда нөгтәдә сыфра чевриләр биләр.

§ 4. ХӘТТИ ФӘЗАЛАРЫН ИЗОМОРФЛУҒУ

Тутаг ки, һәгиги R вә Q хәтти фәзалары верилмишдир. Әкәр һәр һансы гајда вә ја ганун васитәсилә R фәзасынын һәр бир x елементинә Q фәзасынын мүәјјән бир x' елементи уjғун гојулурса, онда дејирләр ки, *R фәзасынын Q фәзасына f ин'икасы верил-*

1349—6

мишдир. Буну $f: R \to Q$ шәклиндә, x' елементинин x елементинә ујғун олмасыны исә

$$x' = f(x) \qquad (1)$$

шәклиндә ишарә едирләр. Бу һалда, x' елементинә x-ин *образы*, x-ә исә *прообраз* дејилир.

Әкәр R фәзасынын Q фәзасына $f: R \to Q$ ин'икасы заманы R-ин мүхтәлиф елементләринә Q-нүн мүхтәлиф елементләри ујғундурса вә Q-нүн һәр бир елементи R-ин мүәјјән бир елементинин образыдырса, онда һәмин *ин'икаса гаршылыглы биргијмәтли ин'икас* дејилир.

Верилмиш R вә Q хәтти фәзаларынын

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

шәртләрини өдәјән гаршылыглы биргијмәтли $f: R \to Q$ ин'икасы варса, онда һәмин фәзалара *изоморф фәзалар* дејилир. Бу һалда f ин'икасы *изоморфизм* адланыр.

Тә'рифдән ајдындыр ки, изоморф R вә Q фәзалары мүхтәлиф тәбиәтли елементләрдән ибарәт олса да, онлар топлама вә әдәдә вурма әмәлләри илә ифадә олунан хассәләр бахымындан ејни фәзалардыр.

Белә фәзаларын бир сыра үмуми хассәләри вардыр: *Ејниөлчүлү бүтүн һәгиги хәтти фәзалар изоморфдур. Мүхтәлиф өлчүлү истәнилән ики фәза исә изоморф дејилдир.*

Бурадан ајдындыр ки, сонлу өлчүлү хәтти фәзаларын јеканә характеристикасы онларын өлчүсүдүр. Ејниөлчүлү фәзалар чәбри (хәтти әмәлләр) чәһәтдән ејни фәзалардыр.

Демәли, истәнилән n-өлчүлү һәгиги хәтти фәза илә n-өлчүлү R_n һесаби фәза (n-өлчүлү сәтирләр чохлуғу; § 2) ејнидир (изоморфдур). Буна көрә дә, n-өлчүлү истәнилән һәгиги хәтти фәзаны R_n илә ишарә етмәк олар.

§ 5. ХӘТТИ АЛТФӘЗАЛАР

Тутаг ки, R һәр һансы хәтти фәза, L исә онун бош олмајан алтчохлуғудур.

Әкәр хәтти R фәзасынын L алтчохлуғу һәмин фәзада тә'јин олунмуш топлама вә әдәдә вурма әмәлләринә нәзәрән хәтти фәзадырса, онда L чохлуғуна R фәзасынын *хәтти алтфәзасы* дејилир.

Јалныз сыфыр елементдән ибарәт олан чохлуг вә фәзанын өзү хәтти R фәзасынын хәтти алтфәзаларыдыр. Бунлара бә'зән *тривиал* (вә ја *гејри-мәхсуси) алтфәзалар* дејилир.

Мисал 1. Дәрәчәси верилмиш n әдәдиндән бөјүк олмајан бүтүн чәбри $p(x)$ чохһәдлиләринин L чохлуғу һәгиги хәтти $C[a, b]$ фәзасынын (VI, § 2) хәтти алтфәзасыдыр.

Мисал 2. V_3 векториал хәтти фәзанын (II, § 2) һәр һансы мүстәвијә паралел олан бүтүн векторлары чохлуғу, јә'ни V_2 векториал фәзасы, онун хәтти алтфәзасыдыр.

Верилмиш n-өлчүлү хәтти R фәзасынын L алтфәзасына дахил олан хәтти асылы олмајан елементләр фәзанын өзүнә дә дахил олдуғундан хәтти L алтфәзасынын өлчүсү фәзанын өлчүсүндән бөјүк ола билмәз. Әкәр L алтфәзасы n-өлчүлү хәтти R фәзасы илә үст-үстә дүшмүрсә, онда L-ин өлчүсү n-дән чидди кичик олачагдыр.

Хәтти фәза верилдикдә онун хәтти алтфәзасыны ашағыдакы кими дә гурмаг олар.

Хәтти R фәзасынын $x_1, x_2, \ldots, x_m$ елементләрини көтүрәк вә онларын мүмкүн олан бүтүн хәтти комбинасијалары чохлуғуну L_m илә ишарә едәк:

$$L_m = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m\}.$$

Бу чохлуг хәтти алтфәзадыр. Буна $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *елементләринин доғурдуғу алтфәза* вә ја һәмин *елементләр үзәринә чәкилмиш алтфәза* дејилир. Әкәр $x_1, x_2, \ldots, x_m$ елементләри хәтти асылы дејилсә, онда L_m алтфәзасынын өлчүсү m әдәдинә бәрабәрдир. Һәмин елементләр хәтти асылы олдугда L_m алтфәзасының өлчүсү m-дән кичик олар.

Хәтти алтфәзанын өлчүсү фәзанын өзүнүн өлчүсүнә бәрабәр оларса, онда алтфәза һәмин фәза илә үст-үстә дүшүр. Көстәрмәк олар ки, хәтти фәзанын һәр бир хәтти алтфәзасы мүәјјән елементләрин доғурдуғу алтфәзадыр. Буну ашағыдакы теорем шәклиндә сөјләмәк олар:

Теорем. ***Сонлу өлчүлү хәтти фәзанын һәр бир хәтти алтфәзасы сонлу сајда елементләрин доғурдуғу хәтти алтфәзадыр.***

Мисал 3. V_3 векториал фәзасынын, $\bar{i}$ вә $\bar{j}$ координат ортларынын јерләшдији мүстәви үзәриндәки бүтүн векторлар чохлуғундан ибарәт олан хәтти алтфәзасы һәмин $\bar{i}$ вә $\bar{j}$ векторларынын доғурдуғу хәтти алтфәзадыр.

§ 6. ЕВКЛИД ФӘЗАСЫ

Хәтти фәзаја тә'риф верәркән истәнилән тәбиәтли елементләр чохлуғунда 1°—8° аксиомларыны (§ 1) өдәјән топлама вә әдәдә вурма әмәлләринин тә'јин олунмасыны тәләб етдик. Бу хәтти әмәлләрин тәбиәти вә ја шәкли һаггында тә'рифдә башга һеч нә тәләб олунмур.

Хәтти фәзада мәсафә анлајышы олмадығындан бахылан чохлуғун елементләринин узунлуғу, онларын арасындакы бучаг вә с. кими анлајышлары тә'јин етмәк мүмкүн олмур. Буна көрә дә хәтти фәзаларда бахдығымыз ики әмәлдән (топлама вә әдәдә вурма) башга јени бир әмәлә, скалјар һасил дүзәлтмә әмәлинә бахмаг лазым кәлир.

Хәтти фәзада скаларјар һасил тә'јин олундугда она *Евклид*[1] *фәзасы* дејилир.

Тә'риф. *Тутаг ки, һәгиги хәтти R фәзасынын истәнилән ики x вә y елементинә, һәмин елементләрин скалјар һасили адланан вә (x, y) илә ишарә олунан, мүәјјән бир һәгиги әдәди ујғун гојма гануну (скалјар һасил) верилмишдир вә бу заман ашағыдакы шәртләр (аксиомлар) өдәнилир:*

9°. *Истәнилән* $x \in R$ *вә* $y \in R$ үчүн

$$(x, y) = (y, x).$$

10°. *Истәнилән* $x \in R$, $y \in R$ вә $z \in R$ үчүн

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z).$$

11°. *Истәнилән* $x \in R$, $y \in R$ вә *һәгиги* λ әдәди үчүн

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y).$$

12°. *Истәнилән* $x \neq \theta$ *үчүн* $(x, x) > 0$ *вә* $x = \theta$ *олдугда:* $(x, x) = 0$.

Бу һалда, һәгиги хәтти R фәзасына *һәгиги Евклид фәзасы* вә ја садәчә олараг *Евклид фәзасы* дејилир. Комплекс хәтти фәзада ујғун аксиомлары өдәјән скалјар һасил тә'јин олундугда она *комплекс Евклид фәзасы* дејилир. Бурада анчаг һәгиги Евклид фәзасы өјрәнилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, истәнилән тәбиәтли елементләр чохлуғунун Евклид фәзасы олмасы үчүн һәмин чохлугда 1°—12° аксиомларыны өдәјән үч әмәл (топлама, әдәдә вурма вә скалјар һасил) тә'јин олунмалыдыр. Бу заман бахылан елементләрин вә тә'јин олунан әмәлләрин тәбиәти һаггында ајры һеч нә тәләб олунмур.

Евклид фәзасынын 10° вә 11° аксиомларыны ардычыл тәтбиг етмәклә истәнилән һәгиги $\lambda_к$ вә $\mu_к$ әдәдләри үчүн

$$\left(\sum_{к=1}^{m} \lambda_к x_к, y \right) = \sum_{к=1}^{m} \lambda_к (x_к, y) \tag{1}$$

вә

$$\left(x, \sum_{к=1}^{m} \mu_к y_к \right) = \sum_{к=1}^{m} \mu_к (x, y_к) \tag{2}$$

бәрабәрликләрини алмаг олар. Бундан башга, истәнилән $x \in R$ үчүн $(x, \theta) = 0$. Доғрудан да, $\theta = 0 \cdot x$ олдуғундан $(x, \theta) = (x, 0 \cdot x) = 0(x, x) = 0$.

[1] Һәндәсәни, өзүнүн «Башланғычлар» адлы әсәриндә илк дәфә мәнтиги олараг шәрһ едән мәшһур јунан алими Евклидин (тәхминән е. ә. III әсрдә јашамышдыр) шәрәфинә олараг.

Мисал 1. Фәзада јерләшән бүтүн векторлар чохлуғундан ибарәт олан һәгиги хәтти V_3 фәзасында (III, § 2) ики векторун скалјар һасилини (III, § 8) тә'јин едәк: $(a, b) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi$. Бу заман 9°—12° аксиомларынын өдәнилмәси скалјар һасилин ујғун хассәләриндән ајдындыр. Демәли, V_3 фәзасында көстәрилән шәкилдә скалјар һасил тә'јин етсәк, о үчөлчүлү Евклид фәзасы олачагдыр.

Ејни гајда илә дә V_1 вә V_2 фәзаларындан ујғун олараг бирөлчүлү вә икиөлчүлү Евклид фәзалары алыныр.

Мисал 2. Инди $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ елементләриндән ибарәт олан һәгиги хәтти R_n фәзасыны (§ 2) көтүрәк. Бу фәзанын истәнилән $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вә $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ елементләринин скалјар һасилини

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \tag{3}$$

шәклиндә тә'јин едәк. (3) скалјар һасили үчүн 9°—11° аксиомларынын өдәнилмәси ајдындыр. 12° аксиомунун доғрулуғу исә

$$(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$$

мүнасибәтиндән көрүнүр.

Беләликлә, (3) скалјар һасили тә'јин олунмуш n-өлчүлү Евклид фәзасы алмыш олуруг. Бу фәзаны бә'зән E_n илә ишарә едирләр.

§ 7. НОРМА АНЛАЈЫШЫ. КОШИ—БУНЈАКОВСКИ БӘРАБӘРСИЗЛИЈИ

Тутаг ки, R һәгиги Евклид фәзасыдыр. Бу фәзанын истәнилән $x \in R$ елементинин узунлуғу вә ја нормасы $\sqrt{(x, x)}$ әдәдинә дејилир вә $\|x\|$ илә ишарә олунур:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \tag{1}$$

12° аксиомундан ајдындыр ки, истәнилән $x \in R$ елементинин нормасы мәнфи олмајан һәгиги әдәддир. Верилмиш елементин нормасы јалныз о заман сыфра бәрабәр олар ки, о сыфыр елемент олсун.

Нормасы ваһидә бәрабәр олан елементә *нормалашмыш елемент* дејилир. Истәнилән $x \in R$ вә һәгиги λ әдәди үчүн

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x, x)} = |\lambda| \sqrt{(x, x)} = |\lambda| \|x\|,$$

јә'ни

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \tag{2}$$

бәрабәрлији доғру олдуғундан, һәр бир $x \neq \theta$ елементини өз нормасына бөләрәк һәмишә нормасы ваһидә бәрабәр олан елемент алмаг олар:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1.$$

Бу әмәлијјата *елементин нормаллашдырылмасы* дејилир.

Теорем. ***Евклид фәзасынын истәнилән x вә y елементи үчүн***

$$(x, y)^2 \leqslant (x, x)(y, y) \tag{3}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

(3) бәрабәрсизлијинә Қоши[1]—Бунјаковски[2] бәрабәрсизлији дејилир.

Исбаты. Евклид фәзасынын 12° аксиомуна көрә истәнилән һәгиги λ вә μ әдәдләри үчүн

$$(\lambda x - \mu y,\ \lambda x - \mu y) \geqslant 0,$$

онда

$$\lambda^2(x, x) - 2\lambda\mu(x, y) + \mu^2(y, y) \geqslant 0$$

вә

$$\lambda = (y, y),\ \ \mu = (x, y) \text{ гәбул етсәк,}$$

$$(y, y)[(x, x)(y, y) - (x, y)^2] \geqslant 0$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Демәли, $y \neq \theta$ олдугда $(y, y) > 0$ вә буна көрә дә

$$(x, x)(y, y) - (x, y)^2 \geqslant 0,$$

јә'ни (3) бәрабәрсизлији доғрудур. $y = \theta$ олдугда (3) бәрабәрсизлијинин доғрулуғу $(x, \theta) = 0$ вә $(\theta, \theta) = 0$ мүнасибәтләриндән ајдындыр.

Исбат етдијимиз (3) бәрабәрсизлијини

$$(x, y)^2 \leqslant \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

вә ја

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \tag{4}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Нәтиҹә. Евклид фәзасынын истәнилән x вә y елементи үчүн

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \tag{5}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Доғрудан да, (4) бәрабәрсизлијинә көрә:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leqslant$$

$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Бурадан (5) мүнасибәтинин доғрулуғу ајдындыр.

(5) бәрабәрсизлијинә *үчбучаг бәрабәрсизлији* дејилир.

---

[1] Огјустен Луи Коши (1789—1857) мәшһур франсыз ријазијјатчысыдыр.

[2] Виктор Јаковлевич Бунјаковски (1804—1889) мәшһур рус ријазијјатчысыдыр.

§ 8. ОРТОГОНАЛЛЫГ ВӘ ОРТОНОРМАЛ БАЗИС

Әввәлки параграфда исбат етдијимиз Қоши—Бунјаковски бәрабәрсизлијиндән

$$-1 \leqslant \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \leqslant 1 \qquad (1)$$

мүнасибәти алыныр. Бурадан ајдындыр ки, $\frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ һәгиги әдәдини бир φ бучағынын косинусу һесаб етмәк олар:

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}. \qquad (2)$$

Һәмин φ бучағына $x \in R$ вә $y \in R$ елементләри арасындакы бучаг дејилир вә $\varphi = (\widehat{x, y})$ шәклиндә јазылыр. (2) мүнасибәтини

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos \varphi \qquad (3)$$

шәклиндә јаздыгда векторларын скалјар һасилинин мә'лум тә'рифи (III, § 8) хүсуси һал кими алыныр.

x вә y елементләри хәтти асылы оларса, јә'ни $y = \lambda x$, онда (2) дүстурундан ајдындыр ки, $\lambda > 0$ олдугда $\varphi = 0$, $\lambda < 0$ олдугда исә $\varphi = \pi$. Тәрсинә, $\cos \varphi = \pm 1$ олдугда x вә y елементләри хәтти асылы олар.

x вә y елементләринин скалјар һасили сыфра бәрабәр, јә'ни

$$(x, y) = 0$$

олдугда, дејирләр ки, *x вә y елементләри ортогоналдыр* вә буну $x \perp y$ шәклиндә јазырлар. Ајдындыр ки, x вә y елементләри ортогонал олдугда онларын арасындакы бучаг $90°$ олар.

Мә'лумдур ки, x вә y елементләриндән бири сыфыр елемент олдугда да онларын скалјар һасили һәмишә сыфырдыр, јә'ни сыфыр елемент истәнилән елементә ортогоналдыр. Лакин сыфыр елемент верилмиш елементлә истәнилән бучаг әмәлә кәтирә биләр.

Т е о р е м. ***Евклид фәзасынын ортогонал олан ихтијари x вә y елементләри үчүн***

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \qquad (4)$$

бәрабәрлији өдәнилир.

И с б а т ы. $(x, y) = 0$ олдуғундан норманын тә'рифинә көрә:

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) =$$
$$= (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Бу теорема *Пифагор*[1] *теореми* дејилир. V_2 (вә V_3) фәзасында бу теорем классик Пифагор теореми илә үст-үстә дүшүр.

(4) бәрабәрлији чүт-чүт ортогонал олан n сајда $x_1, x_2, ..., x_n$ елементләри үчүн дә доғрудур:

$$\|x_1 + x_2 + ... + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + ... + \|x_n\|^2.$$

Инди n-өлчүлү R Евклид фәзасында ортонормал базис анлајышыны мүәјјән едәк. R фәзасынын һәр һансы елементләри

$$e_1, e_2, ..., e_n \quad (5)$$

олсун. Әкәр

$$(e_i, e_j) = 0 \quad (i \neq j, \ i, j = 1, 2, ..., n),$$
$$(e_i, e_i) = 1 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

шәртләри өдәниләрсә, онда (5) елементләри чохлуғуна R фәзасында *ортонормал систем* дејилир.

Ортонормал систем тәшкил едән (5) елементләри хәтти асылы дејилдир. Доғрудан да,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n = \theta \quad (6)$$

бәрабәрлији өдәнилдикдә, онун һәр ики тәрәфини e_κ елементинә скалјар олараг вурсаг:

$$\lambda_\kappa (e_\kappa, e_\kappa) = 0, \ \lambda_\kappa = 0 \ (\kappa = 1, 2, ..., n).$$

Демәли, (6) мүнасибәти анҹаг $\lambda_\kappa = 0$ ($\kappa = 1, 2, ..., n$) олдугда өдәнилир, јә'ни (5) елементләри хәтти асылы дејилдир.

Мә'лумдур ки, n-өлчүлү фәзанын n сајда хәтти асылы олмајан елементләринин һәр бир низамлы чохлуғу һәмин фәзанын базисини тәшкил едир (§ 3, теорем 3). Демәли, n-өлчүлү Евклид фәзасынын (5) ортонормал системи онун базисидир. Белә базисә *Евклид фәзасынын ортонормал базиси* вә ја садәҹә олараг *Евклид базиси* дејилир.

Евклид фәзасы елементләринин ортонормал базис үзрә ајрылышындан истифадә едәрәк, елементләрин скалјар һасилини координатлары илә ифадә етмәк олар. Доғрудан да,

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$$

вә

$$y = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + ... + \mu_n e_n$$

оларса, онда 6-чы параграфда көстәрдијимиз (1) вә (2) бәрабәрликләринә көрә:

[1] Пифагор (тәхминән е. ә. 580—500-чи илдә) јунан философу вә ријазијјатчысыдыр.

$$(x, y) = \left(\sum_{\kappa=1}^{n} \lambda_\kappa e_\kappa, \ \sum_{\kappa=1}^{n} \mu_\kappa e_\kappa\right) = \lambda_1\mu_1(e_1, e_1) + \lambda_2\mu_2(e_2, e_2) +$$
$$+ ... + \lambda_n\mu_n(e_n, e_n) = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + ... + \lambda_n\mu_n$$

вә ја

$$(x, y) = \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + ... + \lambda_n\mu_n. \quad (7)$$

Тутаг ки, $x \in R$ елементи верилмишдир. Онда ону ортонормал базис үзрә ајырмаг олар:

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n. \quad (8)$$

Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини e_κ ($\kappa = 1, 2, ..., n$) елементинә скалјар олараг вурсаг:

$$(x, e_\kappa) = \lambda_1(e_1, e_\kappa) + \lambda_2(e_2, e_\kappa) + ... + \lambda_n(e_n, e_\kappa)$$

вә ја

$$(x, e_\kappa) = \lambda_\kappa.$$

Алынан гијмәтләри (8) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг, x елементи үчүн

$$x = (x, e_1)e_1 + (x, e_2)e_2 + ... + (x, e_n)e_n \quad (9)$$

ајрылышыны аларыг. (x, e_κ) скалјар һасилинә x елементинин e_κ ($\|e_\kappa\| = 1$) үзәриндә *пројексијасы* дејилир. Буну нәзәрә алсаг (9) ајрылышына көрә дејә биләрик ки, истәнилән x елементинин ортонормал базисә нәзәрән координатлары һәмин елементин ујғун базис елементләри үзәриндә пројексијаларыдыр.

Белә бир суал гаршыја чыхыр: һәр бир Евклид фәзасында ортонормал базис вармы?

Сонлу өлчүлү һәр бир Евклид фәзасында ортонормал базис вар.

Әкәр $e_1', e_2', ..., e_n'$ елементләри n-өлчүлү Евклид фәзасынын һәр һансы базисини тәшкил едирсә, онда ортогоналлашдырма просеси васитәсилә онлардан һәмин фәзанын ортонормал базисини алмаг олар. Бу просес беләдир: $e_1 = e_1'$ гәбул едирик вә елә α әдәди тапырыг ки, $e_2 = e_2' + \alpha e_1$ елементи e_1 елементи илә ортогонал олсун:

$$(e_2, e_1) = (e_2' + \alpha e_1, e_1) = (e_2', e_1) + \alpha(e_1, e_1) = 0.$$

Бурадан ахтарылан әдәд тапылыр:

$$\alpha = -\frac{(e_2', e_1)}{(e_1, e_1)} \quad ((e_1, e_1) \neq 0).$$

Тутаг ки, бир-бирилә ортогонал олан $e_1, e_2, ..., e_{\kappa-1}$ елементләри тапылмышдыр. Инди елә $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{\kappa-1}$ әдәдләри тапаг ки,

$$e_\kappa = e_\kappa' + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_{\kappa-1} e_{\kappa-1}$$

елементи $e_1, e_2, ..., e_{к-1}$ елементләринин һәр бири илә ортогонал олсун. Бунун үчүн

$$(e_к, e_i) = (e_к', e_i) + \alpha_i (e_i, e_i) \quad (i=1, 2, ..., к-1)$$

бәрабәрликләри өдәнилмәлидир. Бурадан:

$$\alpha_i = -\frac{(e_к, e_i)}{(e_i, e_i)} \quad (i=1, 2, ..., к-1).$$

Бу просес n сајда бир-бирилә ортогонал олан $e_1, e_2, ..., e_n$ елементләри алынан гәдәр давам етдирилир. Нәтичәдә, n-өлчүлү фәзанын ахтарылан ортонормал базиси

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}, \quad f_2 = \frac{e_2}{\|e_2\|}, \quad ..., \quad f_n = \frac{e_n}{\|e_n\|}$$

шәклиндә тапылыр.

§ 9. ХӘТТИ НОРМАЛАШМЫШ ФӘЗАЛАР

Тутаг ки, хәтти R фәзасынын һәр бир x елементинә һәмин елементин нормасы адланан вә $\|x\|$ илә ишарә олунан мүәјјән бир һәгиги әдәд гаршы гојулур вә бу заман ашағыдакы шәртләр (аксиомлар) өдәнилир:

1_0. Истәтнилән $x \in R$ $(x \neq \theta)$ үчүн $\|x\| > 0$ вә јалныз $x=\theta$ олдугда $\|x\|=0$.

2_0. Истәнилән $x \in R$ вә һәгиги λ әдәди үчүн

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|.$$

3_0. Истәнилән $x \in R$ вә $y \in R$ үчүн

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad (1)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Онда R фәзасына *хәтти нормалашмыш фәза* дејилир.

(1) бәрабәрсизлијинә *үчбучаг бәрабәрсизлији* вә ја *Минковски бәрабәрсизлији* дејилир.

Мисал 1. Хәтти $C[a, b]$ фәзасында ихтијари $x = x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ елементинин нормасыны

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$$

кими тә'јин етсәк, хәтти нормалашмыш фәза аларыг. Бу һалда $1_0 - 3_0$ аксиомларынын өдәнилмәси ашкардыр.

Инди көстәрәк ки, һәр бир Евклид фәзасы хәтти нормалашмыш фәзадыр:

Т е о р е м. ***Евклид фәзасынын истәнилән х елементинин нормасыны***

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

кими тә'јин етдикдә о, хәтти нормалашмыш фәза олур.

И с б а т ы. 1_0 вә 2_0 аксиомларынын өдәнилмәси Евклид фәзасынын 11^0 вә 12^0 аксиомларындан вә 7-чи параграфда исбат етдијимиз (2) бәрабәрлијиндән ајдындыр.

3_0 аксиомунун өдәнилмәси исә 7-чи параграфда исбат едилмиш нәтичәдә ((5) бәрабәрсизлији) көстәрилир.

Мисал 2. E_n Евклид фәзасында (§ 6, 2-чи мисал) $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ елементинин нормасыны

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$$

кими тә'јин етсәк, хәтти нормалашмыш фәза аларыг.

§ 10. АФИН ФӘЗАСЫ

Афин фәзасы анлајышыны изаһ етмәк үчүн V_3 хәтти векториал фәзасы (§ 2) илә афин координат системи дахил едәрәк өјрәндијимиз ади үчөлчүлү фәзаны (III, § 6) мүгајисә едәк. V_3 фәзасы анчаг ади үчөлчүлү фәзада јерләшән векторлардан ибарәтдир. Бу фәзада нөгтәләр јохдур. Ади үчөлчүлү фәза исә нөгтәләр вә векторлар чохлуғундан ибарәтдир. Бурада һәр низамлы ики нөгтә бир вектор тә'јин едир, башланғычы O нөгтәсиндә олан һәр бир $\overline{OM}$ векторуна исә бир M нөгтәси ујғундур. Фәзада һәр бир M нөгтәсинин вәзијјәти $\bar{r}_M = OM$ радиус-векторунун координатлары илә тә'јин олунур.

Әкәр V_3 векториал фәзасына, ону тәшкил едән векторлардан башга ашағыдакы тәләбләри өдәјән бүтүн $M, N, ...$ нөгтәләрини дә әлавә етсәк, онда үчөлчүлү афин фәзасы аларыг: 1) һәр бир низамлы ики M, N нөгтәсинә анчаг бир $\bar{a}$ вектору ујғун гојулур: $\overline{MN} = \bar{a}$; 2) верилмиш һәр бир M нөгтәси вә $\bar{a}$ вектору үчүн јалныз бир N нөгтәси вар ки, $\overline{MN} = \bar{a}$ олур; 3) ихтијари M, N вә Q нөгтәләри үчүн

$$\overline{MQ} = \overline{MN} + \overline{NQ}$$

мүнасибәти өдәнилир.

V_2 векториал фәзасына (§ 2) мүстәви үзәриндәки бүтүн нөгтәләри әлавә етмәклә икиөлчүлү афин фәзасы аларыг. Беләликлә, алдығымыз афин фәзаларында координат системләри III фәсилдә көстәрдијимиз кими (§ 6) тә'јин олунур.

Үчөлчүлү үмуми афин фәзасы да үчөлчүлү хәтти фәзадан ејни

гајда илә алыныр. Бу һалда хәтти фәзанын елементләри чохлуғуна көстәрилән 1), 2) вә 3) шәртләрини өдәјән нөгтәләр чохлуғуну әлавә етмәк лазымдыр.

n-өлчүлү афин фәзасы да һәмин гајда илә тә'јин олунур. n-өлчүлү хәтти R фәзасынын елементләри чохлуғуна 1) — 3) шәртләрини өдәјән бүтүн $M, N, \ldots$ нөгтәләри чохлуғуну әлавә етмәклә алынан фәзаја *n-өлчүлү афин фәзасы* дејилир. n-өлчүлү афин фәзасыны биз A_n илә ишарә едәҹәјик. n-өлчүлү афин фәзасында нөгтәнин координатлары белә тә'јин олунур. Һәр һансы O нөгтәсини координат башланғычы олараг көтүрүрләр вә R фәзасынын ихтијари x елементи үчүн 2) шәртинә көрә елә бир M нөгтәси тапырлар ки, $\overline{OM}=x$ олсун. x елементинин n-өлчүлү хәтти R фәзасынын $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базисинә нәзәрән $x_1, x_2, \ldots, x_n$ координатлары һәмин M нөгтәсинин координатлары һесаб олунур.

Беләликлә, n-өлчүлү A_n афин фәзасында O нөгтәси вә $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базиси (ујғун n-өлчүлү хәтти R фәзасынын базиси) бирликдә *координат системи* адланыр. Һәр бир $M \in A_n$ нөгтәсинин бу координат системинә көрә координатлары n сајда әдәддән ибарәтдир, јә'ни n сајда әдәддән тәшкил олунмуш бир сәтирдир: $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Бу һалда, координат башланғычы олан O нөгтәсинин бүтүн координатлары сыфра бәрабәр олар. Инди координат системи дахил едилмиш n-өлчүлү A_n афин фәзасында

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

хәтти тәнликләр системинә бахаг. Бу системин әмсалларындан дүзәлмиш матрисин рангы r олсун.

Т ә'р и ф. *A_n фәзасынын, координатлары (1) системини өдәјән бүтүн нөгтәләри чохлуғуна ($k=n-r$)-өлчүлү мүстәви дејилир. Бирөлчүлү мүстәвиләрә дүз хәтләр, ($n-1$)-өлчүлү мүстәвиләрә исә һипермүстәвиләр дејилир.*

Системин әмсалларындан дүзәлмиш матрисин рангынын $r=1$ олмасы о демәкдир ки, һәмин системин бир хәтти асылы олмајан тәнлији вардыр. Буна көрә дә һәр бир һипермүстәвини бир хәтти тәнликлә тә'јин етмәк олар:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b. \qquad (2)$$

Бурадан ајдындыр ки, үчөлчүлү афин фәзасында һипермүстәвиләр ади мүстәвиләр, икиөлчүлү фәзада исә һипермүстәвиләр дүз хәтләрдир.

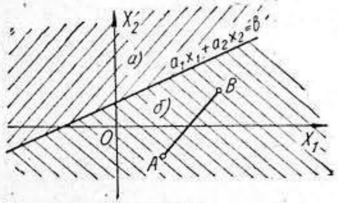
A_n афин фәзасы (2) һипермүстәвиси васитәсилә ики јарымфәзаја ајрылыр: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geqslant b$ бәрабәрсизлијини өдәјән нөгтәләр чохлуғуна вә $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leqslant b$ бәрабәрсизлијини өдәјән нөгтәләр чохлуғуна. Бу јарымфәзаларын биринчисини $A_n^{(1)}$ илә, икинчисини исә $A_n^{(2)}$ илә ишарә едәк. $A_n^{(1)}$ вә $A_n^{(2)}$ јарымфәзалары (2) һипермүстәвиси үзрә кәсишир.

Хүсуси һалда $n=2$ оларса, онда икиөлчүлү фәзаны (мүстәвини)

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \qquad (3)$$

һипермүстәвиси, јә'ни (3) дүз хәтти, ики јарымфәзаја (јарыммүстәвијә) ајырыр. Бу јарымфәзалардан бири дүз хәттин бир тәрәфиндә јерләшән бүтүн нөгтәләр чохлуғу, о бириси исә дүз хәттин о бири тәрәфиндә јерләшән бүтүн нөгтәләр чохлуғу олачагдыр (30-чу шәкил *а*) вә *б*)).

Бу јарымфәзалардан һәр биринин белә бир хассәси вардыр: әкә ихтијари A вә B нөгтәси јарымфәзаја дахилдирсә, онда һәмин нөгтәләри бирләшдирән AB дүз хәтт парчасынын бүтүн нөгтәләри дә она дахилдир. Чохлуғун белә хассәси олдугда, јә'ни ики ихтијари A вә B нөгтәси чохлуға дахил олдугда, бу нөгтәләри бирләшдирән AB дүз хәтт парчасынын бүтүн нөгтәләри дә һәмин чохлуға дахилдирсә, она *габарыг чохлуг* дејилир. Демәли, јарымфәзалар габарыг чохлуглардыр (30-чу шәкил).



Шәкил 30.

Истәнилән өлчүлү јарымфәзаларын да белә хассәси вардыр: A_n афин фәзасынын $A_n^{(1)}$ вә $A_n^{(2)}$ јарымфәзаларынын һәр бири габарыг чохлугдур. Габарыг $A_n^{(1)}$ вә $A_n^{(2)}$ чохлугларынын кәсишмәси олан (2) һипермүстәвиси вә һәм дә, бир нечә һипермүстәвинин кәсишмәси олан k-өлчүлү мүстәви габарыг чохлуг олар.

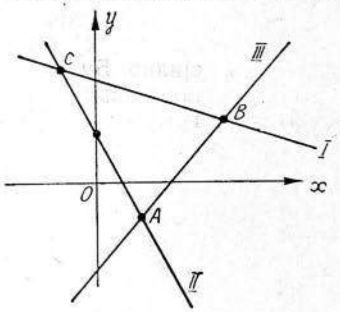
Инди A_n фәзасында

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \end{cases} \qquad (4)$$

бәрабәрсизликләри илә тә'јин олунмуш m сајда јарымфәзанын кәсишмәсинә бахаг. Сонлу сајда јарымфәзаларын кәсишмәсинә габарыг *чохүзлү област* дејилир. Верилмиш m сајда јарымфәза-

нын кәсишмәсиндән ибарәт олан габарыг чохүзлү област (4) хәтти бәрабәрсизликләр системинин һәлләр чохлуғуну тә'јин едир.

Тутаг ки, $X = \{x\}$ —афин фәзасынын нөгтәләри чохлуғудур. Бу чохлуғун истәнилән нөгтәсинин бүтүн координатлары һәр һансы координат системиндә мәһдуддурса, онда һәмин чохлуға *мәһдуд чохлуг* дејилир. Сонлу сајда јарымфәзанын кәсишмәси мәһдуд олдугда, она *габарыг чохүзлү* дејилир. Мәсәлән,



Шәкил 31.

$$\begin{cases} x + y \leqslant 9, \\ 5x + y \geqslant 5, \\ 2x - y \leqslant 6 \end{cases}$$

бәрабәрсизликләр системи мүстәви үзәриндә ABC габарыг чохүзлүсүнү (үчбучағы) тә'јин едир (31-чи шәкил). Лакин

$$\begin{cases} x + y \leqslant 9, \\ 5x + y \geqslant 5, \\ 2x - y \geqslant 6 \end{cases}$$

бәрабәрсизликләр системи мүстәви үзәриндә гејри-мәһдуд габарыг үчбучаглы областы тә'јин едир.

V ФӘСИЛ

ХӘТТИ ЧЕВИРМӘЛӘР

§ 1. ХӘТТИ ОПЕРАТОРУН ТӘ'РИФИ

Тутаг ки, R вә Q сонлу өлчүлү хәтти фәзалардыр вә R фәзасынын Q фәзасына $F: R \to Q$ ин'икасы (IV, § 4) верилмишдир. Бу о демәкдир ки, F ин'икасы васитәсилә R фәзасынын һәр бир x елементинә Q фәзасынын мүәјјән бир y елементи ујғун гојулур. R фәзасынын Q фәзасына $F: R \to Q$ ин'икасына R фәзасындан Q фәзасына тә'сир едән вә ја R фәзасыны Q фәзасына чевирән *оператор* да дејилир вә

$$y = F(x) \quad \text{вә ја} \quad y = Fx$$

илә ишарә олунур. R-дән Q-јә тә'сир едән бүтүн операторлар чохлуғуну $E(R, Q)$ илә ишарә едәк.

Тә'риф. *$F \in E(R, Q)$ оператору истәнилән $x_1 \in R$, $x_2 \in R$ елементләри вә λ әдәди үчүн:*

1. $F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$ *(аддитивлик хассәси)*

2. $F(\lambda x_1) = \lambda F(x_1)$ *(бирчинслилик хассәси)*

хассәләрини өдәдикдә, она хәтти оператор дејилир. Q фәзасы һәгиги вә ја комплекс әдәдләр чохлуғу олдугда $F \in E(R, Q)$ хәтти операторуна хәтти форма вә ја *хәтти функсионал* дејилир.

Q фәзасы R фәзасы илә үст-үстә дүшдүкдә $F \in E(R, R)$ хәтти операторуна R фәзасынын хәтти чевирмәси дә дејилир. Бу китабда хәтти чевирмә терминини биз дә һәмин мә'нада ишләдирик.

Ајдындыр ки, бу һалда R фәзасынын θ сыфыр елементини хәтти $F \in E(R, R)$ оператору өз-өзүнә чевирир:

$$F(\theta) = \theta. \tag{1}$$

Доғрудан да, тә'рифин 2-чи шәртиндә $\lambda = 0$ көтүрсәк вә $0 \cdot x = \theta$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$F(0 \cdot x) = 0 \cdot F(x), \quad F(\theta) = \theta.$$

Хәтти операторларын бир сыра садә нөвләрини гејд едәк.

I. *Сыфыр оператор,* R фәзасынын истәнилән x елементини сыфыр елементә чевирән (ин'икас етдирән), јә'ни истәнилән $x \in R$ үчүн

$$0(x) = \theta \tag{2}$$

мүнасибәтини өдәјән 0 операторуна дејилир.

II. *Ваһид вә ја ејнилик оператор,* R фәзасынын истәнилән x елементини өз-өзүнә чевирән, јә'ни истәнилән $x \in R$ үчүн

$$I(x) = x \tag{3}$$

мүнасибәтини өдәјән I операторуна дејилир.

III. *Охшарлыг оператору,* истәнилән $x \in R$ үчүн

$$\Pi(x) = \mu x \tag{4}$$

мүнасибәтини (бурада μ гејд олунмуш һәр һансы әдәддир) өдәјән Π операторуна дејилир.

Бу операторун хәтти олмасы

$$\Pi(x_1 + x_2) = \mu(x_1 + x_2) = \mu x_1 + \mu x_2 = \Pi(x_1) + \Pi(x_2)$$

вә

$$\Pi(\lambda x) = \mu(\lambda x) = \lambda(\mu x) = \lambda \Pi(x)$$

мүнасибәтләринин өдәнилмәсиндән ајдындыр.

Охшарлыг операторундан, $\mu = 0$ олдугда сыфыр оператор, $\mu = 1$ олдугда исә ваһид оператор алыныр.

§ 2. ХӘТТИ ЧЕВИРМӘНИН МАТРИС ВАСИТӘСИЛӘ ВЕРИЛМӘСИ

Тутаг ки, R, n-өлчүлү хәтти фәзадыр вә $F \in E(R, R)$. Бу фәзанын базиси

$$e_1, e_2, ..., e_n \tag{1}$$

олсун. Онда истәнилән $x \in R$ үчүн

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$

ајрылышы вардыр. Бу һалда, F чевирмәсинин хәтти олмасына әсасән

$$F(x) = x_1F(e_1) + x_2F(e_2) + ... + x_nF(e_n) \tag{2}$$

бәрабәрлији алынар. Сағ тәрәфдәки $F(e_к)$ $(к = 1, 2, ..., n)$ елементләри R фәзасынын өзүнә дахил олдуғундан онлары да (1) базиси үзрә ајырмаг олар:

$$F(e_к) = a_{1к}e_1 + a_{2к}e_2 + ... + a_{nк}e_n. \quad (к = 1, 2, ..., n) \tag{3}$$

Бу гијмәтләри (2) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндә јеринә јазсаг:

$$\begin{aligned} F(x) &= x_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n) + \\ &+ x_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{n2}e_n) + ... + x_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \\ &+ ... + a_{nn}e_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)e_1 + \\ &+ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)e_2 + ... + (a_{n1}x_1 + \\ &+ a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)e_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Шәртә көрә $x \in R$ олдугда $y = F(x) \in R$. Буна көрә дә $y = F(x)$ елементинин (1) базиси үзрә ајрылышы вардыр:

$$F(x) = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n. \tag{5}$$

Мә'лумдур ки, фәзанын һәр бир елементинин базис үзрә ајрылышы јеканәдир (IV, § 3). Демәли, (4) вә (5) ајрылышларынын сағ тәрәфләри ејни олмалыдыр:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Бу системин матрисини

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

илә ишарә етсәк вә

$$x(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = X, \quad y(y_1, y_2, ..., y_n) = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix} = Y$$

олдуғуну гәбул етсәк, онда (6) системини

$$Y = AX \tag{8}$$

матрис шәклиндә јазмаг олар.

Беләликлә, n-өлчүлү хәтти R фәзасында тә'јин олунмуш һәр бир $F \in E(R, R)$ хәтти чевирмәсинә һәмин фәзанын верилмиш $e_1, e_2, ..., e_n$ базисиндә бир n-тәртибли квадрат A матриси ујғундур. Верилмиш $x \in R$ елементинә хәтти F чевирмәсинин ујғун гојдуғу $y = F(x)$ елементини (јә'ни, онун $y_1, y_2, ..., y_n$ координатларыны) һәмин матрис васитәсилә (6) вә ја (8) мүнасибәтиндән тә'јин етмәк олар.

A матрисинә $e_1, e_2, ..., e_n$ базисиндә *хәтти F чевирмәсинин матриси* дејилир. Бу матрисин биринчи сүтун елементләри биринчи e_1 базис елементи образынын (јә'ни $F(e_1)$-ин) һәмин базисә нәзәрән координатлары, икинчи сүтун елементләри исә $F(e_2)$ елементинин һәмин базисә нәзәрән координатлары вә с. ахырынчы сүтун елементләри исә $F(e_n)$ образынын һәмин базисә нәзәрән координатларыдыр.

Апардығымыз мүһакимәдән ајдын олур ки, n-өлчүлү хәтти R фәзасында тә'јин олунмуш һәр бир $F \in E(R, R)$ хәтти чевирмәсинә һәмин операторун матриси адланан бир n-тәртибли квадрат A матриси ујғундур. Тәрсинә, верилмиш n-тәртибли һәр бир квадрат A матриси n-өлчүлү фәзада бир $F \in E(R, R)$ хәтти чевирмәсини тә'јин едир. Бу хәтти чевирмә (6) вә ја (8) мүнасибәти илә тә'јин олунур вә онун верилмиш базисдә матриси елә һәмин A матрисидир. Бу һалда, бә'зән дејирләр ки, $y_1, y_2, ..., y_n$ әдәдләри (6) дүстурлары илә $x_1, x_2, ..., x_n$ әдәдләриндән, A матриси илә тә'јин олунмуш хәтти чевирмә васитәсилә алынмышдыр.

Беләликлә, исбат етмиш олуруг ки, n-өлчүлү хәтти фәзада тә'јин олунмуш һәр бир хәтти $F \in E(R, R)$ чевирмәси (8) шәклиндә јазыла биләр.

Биз јухарыда көрдүк ки, һәр бир хәтти чевирмә фәзанын сыфыр елементини өз-өзүнә чевирир:

$$F(\theta) = \theta. \tag{9}$$

Әкәр $F(x) = \theta$ мүнасибәти анчаг $x = \theta$ олдугда өдәнилирсә, онда хәтти F чевирмәсинә *чырлашмајан* вә ја *гејри-мәхсуси чевирмә* дејилир. Әкс һалда хәтти чевирмәјә *чырлашан* вә ја *мәхсуси чевирмә* дејилир.

1349—7

Чевирмәнин чырлашан олмасы $F(x) = \theta$ вә ја

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

бирчинсли хәтти тәнликләр системинин сыфыр олмајан һәллинин олмасы демәкдир. Бу исә о заман ола биләр ки, системин детерминанты сыфра бәрабәр олсун (II, § 2, § 3). Демәли, n-өлчүлү хәтти R фәзасында тә'јин олунмуш $F \in E(R, R)$ хәтти чевирмәсинин чырлашмајан олмасы үчүн онун (7) матрисинин $\Delta(A)$ детерминантынын сыфырдан фәргли олмасы, јә'ни A матрисинин чырлашмајан олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Мисал 1. n-өлчүлү хәтти R фәзасында тә'јин олунмуш O сыфыр операторунун (чевирмәсинин) матриси n-тәртибли квадрат

$$O_n = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array} \right\|$$

сыфыр матрисидир.

Мисал 2. n-өлчүлү хәтти R фәзасында тә'јин олунмуш I ваһид чевирмәсинин (операторун) матриси n-тәртибли квадрат

$$I_n = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right\|$$

ваһид матрисидир.

Мисал 3. n-өлчүлү хәтти R фәзасында тә'јин олунмуш Π охшарлыг операторунун (§ 1) матриси n-тәртибли квадрат

$$\Pi_n = \left\| \begin{array}{cccc} \mu & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \mu \end{array} \right\|$$

матрисидир. Бу һалда (6) системи

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \mu x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n, \\ y_2 = 0 \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + \mu \cdot x_n \end{array}\right\} \quad (10)$$

шәклиндә јазылар. Һәр бир $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ елементинә ујғун олан $y = \Pi(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ елементи (10) системиндән тапылыр.

§ 3. АФИН ЧЕВИРМӘСИ

Тутаг ки, A_n, n-өлчүлү афин фәзасыдыр. A_n фәзасынын өз-өзүнә $F \in E(A_n, A_n)$ ин'икасы заманы мүхтәлиф $x_1 \neq x_2$ ($x_1 \in A_n$, $x_2 \in A_n$) елементләринә јенә дә мүхтәлиф елементләр ($F(x_1) \neq F(x_2)$) ујғун олурса вә һәр бир $y \in A_n$ елементи бир $x \in A_n$ елементинин образыдырса, јә'ни $y = F(x)$ мүнасибәти өдәнилирсә, онда һәмин F ин'икасына *гаршылыглы биргијмәтли ин'икас* дејилир.

A_n фәзасынын, һәр бир дүз хәтти јенә дә дүз хәттә кечирән, өз-өзүнә гаршылыглы биргијмәтли ин'икасына *афин чевирмә* дејилир. Афин фәзасынын һәр бир чырлашмајан хәтти чевирмәси афин чевирмәдир. Бурадан ајдындыр ки, икитәртибли квадрат

$$A = \left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right\| \quad (1)$$

матриси илә тә'јин олунан

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{array}\right. \quad (2)$$

хәтти чевирмә, һәмин матрисин детерминанты сыфырдан фәргли, јә'ни

$$\Delta(A) = \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| \neq 0 \quad (3)$$

олдугда афин чевирмәдир. (3) шәртиндән алыныр ки, (2) хәтти чевирмәси гаршылыглы биргијмәтли чевирмәдир вә онун тәрси олан

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a_{22}}{\Delta} y_1 - \dfrac{a_{12}}{\Delta} y_2, \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{\Delta} y_1 + \dfrac{a_{11}}{\Delta} y_2 \end{array}\right\} \quad (4)$$

хәтти чевирмәси јенә дә афин чевирмәдир. Бунун доғрулуғуна инанмаг үчүн (4) системи детерминантынын сыфырдан фәргли олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир:

$$\Delta_1 = \left| \begin{array}{cc} \dfrac{a_{22}}{\Delta} & -\dfrac{a_{12}}{\Delta} \\ -\dfrac{a_{21}}{\Delta} & \dfrac{a_{11}}{\Delta} \end{array} \right| = \frac{1}{\Delta^2} \left| \begin{array}{cc} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2} \left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right| = \frac{1}{\Delta} \neq 0.$$

Мисал 1. Икиөлчүлү афин фәзасынын вә ја мүстәвинин

$$П_2=\begin{Vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{Vmatrix} (\mu \neq 0)$$

матриси илә тә'јин олунан охшарлыг чевирмәси (вә јахуд мүстәвинин бүтүн истигамәтләрдә μ дәфә дартылмасы) афин чевирмәдир. Бу чевирмә

$$y_1 = \mu x_1,$$
$$y_2 = \mu x_2$$

шәклиндәдир вә онун матрисинин детерминанты сыфырдан фәрглидир:

$$\Delta(П_2) = \begin{vmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{vmatrix} = \mu^2 \neq 0.$$

Мисал 2. Мүстәвинин

$$П'_2=\begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$$

матриси илә тә'јин олунан хәтти чевирмәси вә ја мүстәвинин координат башланғычы әтрафына α бучағы гәдәр фырланмасы афин чевирмәдир. Доғрудан да, бу чевирмә

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \\ y_2 = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{cases}$$

шәклиндәдир вә онун матрисинин детерминанты сыфырдан фәрглидир:

$$\Delta(П'_2) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0.$$

Афин чевирмәси заманы дүз хәтт дүз хәттә кечдијиндән, һәмин чевирмәдә ики кәсишән дүз хәтт јенә дә кәсишән ики дүз хәттә, паралел ики дүз хәтт исә јенә дә паралел ики дүз хәттә кечир.

§ 4. ХӘТТИ ЧЕВИРМӘЛӘР ҮЗӘРИНДӘ ӘМӘЛЛӘР

Сонлуөлчүлү хәтти R фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән бүтүн хәтти чевирмәләр чохлуғунда, јә'ни $E(R, R)$ чохлуғунда чевирмәләрин чәминдән, чевирмәнин әдәдә һасилиндән, чевирмәләрин һасилиндән вә с. данышмаг олар.

Тә'риф. *$F_1 \in E(R, R)$ вә $F_2 \in E(R, R)$ хәтти чевирмәләринин чәми елә хәтти $F = F_1 + F_2$ чевирмәсинә дејилир ки, истәнилән $x \in R$ үчүн*

$$(F_1+F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x) \tag{1}$$

мүнасибәтини өдәсин.

Хәтти $F \in E(R, R)$ чевирмәсинин λ скаларј әдәдинә һасили

$$(\lambda F)(x) = \lambda F(x) \tag{2}$$

мүнасибәти илә тә'јин олунан λF хәтти чевирмәсинә дејилир.

Истәнилән хәтти F чевирмәсинин $-F$ чевирмәсини

$$-F = (-1) \cdot F$$

шәклиндә тә'јин етмәк олар. $E(R, R)$ чохлуғунун O сыфыр чевирмәсини исә биринчи параграфда тә'јин етмишик.

Јохламаг олар ки, хәтти чевирмәләр үчүн тә'јин етдијимиз чәм вә әдәдә вурма әмәлләри хәтти фәзанын 1°—8° аксиомларыны (IV, § 1) өдәјир. Демәли, сонлуөлчүлү R фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән бүтүн хәтти F чевирмәләри чохлуғу, јә'ни $E(R, R)$ чохлуғу, тә'јин етдијимиз чәм вә әдәдә вурма әмәлләринә нәзәрән хәтти фәзадыр.

Инди хәтти чевирмәләрин һасилини вә тәрсини мүәјјән едәк.

Хәтти $F \in E(R, R)$ вә $\Phi \in E(R, R)$ чевирмәләринин һасили елә $\Psi = F\Phi$ чевирмәсинә дејилир ки, истәнилән $x \in R$ үчүн

$$(F\Phi)(x) = F[\Phi(x)] \tag{3}$$

мүнасибәти өдәнилсин. Хәтти чевирмәләрин һасили, үмумијјәтлә, јердәјишмә хассәсинә малик дејилдир: $F\Phi \neq \Phi F$.

I ваһид чевирмә олмагла (§ 1)

$$F\Phi = \Phi F = I \tag{4}$$

мүнасибәти өдәниләрсә Φ чевирмәсинә *F чевирмәсинин тәрси* дејилир вә $\Phi = F^{-1}$ илә ишарә олунур. Демәли,

$$FF^{-1} = F^{-1}F = I. \tag{5}$$

Белә бир тәбии суал гаршыја чыхыр: верилмиш хәтти F чевирмәсинин һәмишә тәрси вармы?

Бу суала чаваб вермәк үчүн хәтти R фәзасынын n-өлчүлү олдуғуну гәбул едәк. Онда һәмин фәзаны өз-өзүнә ин'икас етдирән хәтти F чевирмәси фәзанын верилмиш базисиндә бир n-тәртибли квадрат A матриси илә тә'јин олунар (§ 2). Бу һалда һәмин хәтти чевирмә

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

вә ја

$$У = AX \tag{7}$$

матриси шәклиндә јазыла биләр. Мә'лумдур ки, (6) системинин (вә ја (7) матрис тәнлијинин) һәллинин олмасы үчүн системин

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

детерминантынын сыфырдан фәргли олмасы зәрури вә кафи шәртдир. Бу һалда (6) системини һәлл едәрәк $x_1, x_2, \dots, x_n$ кәмијјәтләрини $y_1, y_2, \dots, y_n$ васитәсилә хәтти шәкилдә ифадә етмәк олар:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \dots + b_{1n}y_n, \\ x_2 &= b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \dots + b_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \dots + b_{nn}\,y_n \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

(8) системинин матриси (6) системинин A матрисинин тәрсидир, јә'ни

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix}$$

Бу нәтиҹә, (7) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини A^{-1} матрисинә вурмагла да алыныр:

$$X = A^{-1}\,У.$$

Дедикләримиздән ајдындыр ки, n-өлчүлү хәтти R фәзасында верилмиш хәтти F чевирмәсинин A матриси чырлашмајан олдугда (I, § 7), һәмин F чевирмәсинин хәтти тәрс чевирмәси вар вә бу тәрс чевирмәнин матриси A^{-1}-дир. Бунун тәрси дә доғрудур. Демәли, F хәтти чевирмәсинин чырлашмајан олмасы (§ 2) онун тәрс чевирмәсинин варлығы үчүн зәрури вә кафи шәртдир.

§ 5. БАЗИС ДӘЈИШДИКДӘ ХӘТТИ ЧЕВИРМӘ МАТРИСИНИН ДӘЈИШМӘСИ

n-өлчүлү R фәзасыны өз-өзүнә ин'икас етдирән хәтти F чевирмәсинин һәмин фәзанын $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисиндә матриси $A = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ олсун. Бу һалда ихтијари $x \in R$ елементинин һәмин базисә нәзәрән $x_1, x_2, \dots, x_n$ координатлары илә она ујғун олан $y = F(x) \in R$ елементинин $y_1, y_2, \dots, y_n$ координатлары арасында

$$У = AX \qquad (1)$$

кими мүнасибәт вардыр (§ 2). (1) бәрабәрлијинә *верилмиш хәтти чевирмәнин матрис шәкли* дејилир. Бурада X вә $У$ илә ујғун олараг

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}, \qquad У = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}$$

сүтун-матрисләри ишарә олунмушдур.

Инди һәмин R фәзасында башга $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ базиси көтүрәк. Верилмиш хәтти F чевирмәсинин бу базисә нәзәрән матриси $B = \|b_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ оларса, онда $x \in R$ елементинин бу базисә нәзәрән $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ координатлары илә она ујғун олан $y \in R$ елементинин $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ координатлары арасында јенә дә (1) кими мүнасибәт олар:

$$У' = BX', \qquad (2)$$

бурада

$$X' = \begin{Vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{Vmatrix}, \qquad У' = \begin{Vmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{Vmatrix}.$$

Фәзанын $e_1, e_2, \dots, e_n$ базисини көһнә, $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ базисини исә јени базис адландыраг. Әкәр јени базиси тәшкил едән $\beta_к$ $(к=1, 2, \dots, n)$ елементләринин көһнә базис үзрә ајрылышлары

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n, \\ \beta_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

оларса, онда $C = \|c_{i,j}\|$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ матриси көһнә базисдән јени базисә кечид матриси олар. Бу һалда, x вә y елементләринин јени вә көһнә базисләрә нәзәрән координатлары арасында

$$X = CX' \qquad (4)$$

вә

$$У = CУ' \qquad (5)$$

кими матрис мүнасибәтләрини јазмаг олар.

Чырлашмајан C матрисинин C^{-1} тәрс матриси вар (I, § 7).

Инди (4) вә (5) гијмәтләрини (1)-дә јеринә јазсаг

$$CУ' = ACX'$$

бәрабәрлијини аларыг. Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини солдан C^{-1} матрисинә вураг:

$$У' = C^{-1}ACX'. \qquad (6)$$

(6) бәрабәрлијини (2) илә мүгајисә етсәк

$$B = C^{-1}AC \qquad (7)$$

мүнасибәтини аларыг. Бу дүстур, мүхтәлиф базисләрдә верилмиш хәтти чевирмәјә ујғун олан матрисләр арасындакы асылылығы ифадә едир.

(7) дүстурундан, матрисләр һасилинин детерминанты һаггындакы тәклифә (I, § 6) әсасән

$$\Delta(B) = \Delta(C^{-1}AC) = \Delta(C^{-1}) \cdot \Delta(A) \cdot \Delta(C) =$$
$$= \Delta(C^{-1}C) \cdot \Delta(A) = \Delta(I) \cdot \Delta(A) = \Delta(A)$$

мүнасибәтини аларыг. Бу о демәкдир ки, хәтти чевирмә матрисинин детерминанты базисдән асылы дејилдир.

§ 6. ХӘТТИ ЧЕВИРМӘНИН МӘХСУСИ ГИЈМӘТИ ВӘ МӘХСУСИ ВЕКТОРУ

Фәрз едәк ки, R, n-өлчүлү хәтти фәзадыр вә һәмин фәзаны өз-өзүнә ин'икас етдирән хәтти чевирмә F илә ишарә олунмушдур.

Т ә'р и ф. *Сыфыр елементдән фәргли вә*

$$F(x) = \lambda x \tag{1}$$

бәрабәрлијини өдәјән һәр бир $x \in R$ елементинә F чевирмәсинин мәхсуси вектору, λ әдәдинә исә онун мәхсуси гијмәти (вә ја характеристик әдәди) дејилир.

Һәр бир хәтти чевирмәнин мәхсуси гијмәти вә мәхсуси вектору вармы?

Хәтти $F \in E(R, R)$ чевирмәсинин матриси $A = \|a_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ оларса, онда верилмиш базисдә $x\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ елементи илә она ујғун олан $y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ елементинин $(y = F(x))$ координатлары арасында

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{2}$$

мүнасибәти доғрудур. Бу һалда, x елементи (1) мүнасибәтини дә өдәјәрсә, онда

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

вә јахуд

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases} \tag{3}$$

бәрабәрликләри өдәниләр.

Мә'лумдур ки, хәтти бирчинсли тәнликләрин (3) системинин сыфырдан фәргли $x_1, x_2, \ldots, x_n$ һәллинин варлығы үчүн һәмин системин детерминантынын сыфыра бәрабәр олмасы зәрури вә кафи шәртдир:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

(4) бәрабәрлијинин сол тәрәфи $A - \lambda I$ матрисинин детерминантыдыр. Буна көрә дә (4) бәрабәрлијини

$$\Delta(A - \lambda I) = 0 \tag{5}$$

шәклиндә јазмаг олар. (4) (вә ја (5)) бәрабәрлији λ-ја нәзәрән n-дәрәчәли чәбри тәнликдир. A матриси үчүн характеристик тәнлик олан (4) тәнлији F хәтти чевирмәсинин дә характеристик тәнлији адланыр. (4) характеристик тәнлијинин чәбрин әсас теореминә көрә һеч олмазса бир һәгиги вә ја комплекс λ_0 көкү вар: $\Delta(A - \lambda_0 I) = 0$. Бу λ_0 әдәдини (3) системиндә λ әвәзинә јазсаг, һәмин системин сыфырдан фәргли $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ һәллини тапарыг. Тапдығымыз $x_0\ (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ елементи F хәтти чевирмәсинин λ мәхсусу әдәдинә ујғун мәхсуси векторудур.

Беләликлә, ашағыдакы тәклифи исбат етмиш олуруг:

Т е о р е м 1. ***Һәр бир хәтти чевирмәнин мәхсуси әдәди вә мәхсуси вектору вардыр.***

Инди ашағыдакы теореми исбат едәк.

Т е о р е м 2. ***Хәтти $F \in E(R, R)$ чевирмәсинин A матриси диагонал матрис олмасы үчүн базис тәшкил едән $e_к$ елементләринин һәмин чевирмәнин мәхсуси векторлары олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, A матриси диагонал матрисдир:

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Онда (§ 2, (3)):

$$F(e_к) = \lambda_к e_к \quad (к = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Сонунчу бәрабәрлик көстәрир ки, $e_к$ елементләри мәхсуси векторлардыр.

Шәртин кафилији. $e_к$ елементләри хәтти F чевирмәсинин мәхсуси векторлары оларса, онда F чевирмәсинин матриси (6) шәклиндә олар (§ 2, (3) вә (7)).

Демәли, хәтти F чевирмәсинин хәтти асылы олмајан n сајда мәхсуси векторуну базис һесаб етсәк, онда һәмин базисә нәзәрән F чевирмәсинин матриси диагонал шәклиндә олар. Бу тәклифдән

истифадә едәрәк, хәтти чевирмә матрисини диагонал шәклә кәтирмәк мүмкүндүр.

Хүсуси һалда, хәтти F чевирмәсинин (4) характеристик тәнлијинин n сајда мүхтәлиф $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ көкү олдугда, һәмин көкләрә (мәхсуси гијмәтләрә) ујғун $e_1, e_2, \ldots, e_n$ мәхсуси векторлары хәтти асылы олмур. Әкәр һәмин мәхсуси векторлары фәзанын базиси һесаб етсәк, онда хәтти чевирмәнин базиси диагонал шәклиндә олар.

Фәзанын сыфыр олмајан бүтүн елементләри ејнилик хәтти чевирмәсинин (§ 1) $\lambda=1$ мәхсуси гијмәтинә ујғун мәхсуси векторларыдыр.

Мисал 1. Матриси

$$A = \left\| \begin{matrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{matrix} \right\|$$

олан хәтти F чевирмәсинин мәхсуси гијмәтләрини вә мәхсуси векторларыны тапмалы.

Һәлли. Бу һалда хәтти чевирмәнин характеристик тәнлији

$$\left\| \begin{matrix} 2-\lambda & 4 \\ 1 & 5-\lambda \end{matrix} \right\| = 0$$

вә јахуд

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

олар. Тәнлијин көкләри $\lambda_1 = 1$ вә $\lambda_2 = 6$ әдәдләридир. Һәмин әдәдләрин һәр биринә ујғун олан мәхсуси вектору тапмаг олар. Бу мәгсәдлә әдәдләрин һәр бири үчүн (3) системини јазмаг лазымдыр:

$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda_\kappa)x_1 + 4x_2 &= 0, \\ x_1 + (5-\lambda_\kappa)x_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$
$$(\kappa = 1, 2)$$

$\lambda_1 = 1$ үчүн

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

системини аларыг, бу да

$$x_1 + 4x_2 = 0$$

тәнлијинә чеврилир. Бурадан x_1 вә x_2-ни тапаг. Мәсәлән, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$ көтүрмәк олар. Онда мәхсуси вектор $x(-4, 1)$ (вә ја онун истәнилән әдәдә һасили) олачагдыр.

$\lambda_2 = 6$ мәхсуси гијмәти үчүн

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 4x_2 &= 0, \\ x_1 - 1\cdot x_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

системини аларыг, бу да

$$x_1 - x_2 = 0$$

тәнлијинә чеврилир. Бурадан $x_1 = 1$ вә $x_2 = 1$ көтүрмәклә $x(1, 1)$ мәхсуси векторуну (вә ја истәнилән μ әдәдинә вурмагла μx векторуну) аларыг.

§ 7. ОРТОНОРМАЛ БАЗИСИН ӘВӘЗ ЕДИЛМӘСИ ВӘ ОРТОГОНАЛ МАТРИСЛӘР

Садә олмаг үчүн бурада икиөлчүлү R Евклид фәзасына бахаг вә фәрз едәк ки, e_1, e_2 һәмин фәзанын ортонормал базисидир. Тутаг ки, бу базис јени ортонормал β_1, β_2 базиси илә әвәз едилмишдир.

Бу һалда, кечид матриси

$$\begin{cases} \beta_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2, \\ \beta_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 \end{cases} \qquad (1)$$

ајрылышларынын әмсаллары илә тә'јин олунан

$$C = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix} \right\|$$

матрисидир. Базисләр ортонормал олдуғундан

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, \quad e_1 \cdot e_2 = 0$$

вә

$$\beta_1^2 = \beta_2^2 = 1, \quad \beta_1\beta_2 = 0$$

олмалыдыр. Бу шәртләрә әсасән (1) системинин тәнликләриндән

$$\beta_1^2 = c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1, \quad \beta_2^2 = c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1,$$
$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0$$

мүнасибәтләрини алмаг олар. Бунлара әсасән C матриси илә онун транспонирә едилмәсиндән (I, § 1) алынан

$$C^* = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{matrix} \right\|$$

матрисинин һасилини тапаг:

$$C^*C = \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} c_{11}^2 + c_{21}^2 & c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} & c_{12}^2 + c_{22}^2 \end{matrix} \right\|,$$

$$C^*C = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = I \quad \text{(ваһид матрис)}$$

вә јахуд

$$C^*C = I. \qquad (2)$$

Бурадан

$$C^* = C^{-1}. \qquad (3)$$

(3) бәрабәрлијини өдәјән C матрисинә *ортогонал матрис* дејилир. Демәли, бир ортонормал базисдән башга ортонормал базисә кечид матриси һәмишә ортогонал матрисдир. Бунун тәрси дә доғрудур.

Ортогонал матрисләр Евклид фәзаларынын ортогонал чевирмәләрилә дә сых әлагәдардыр.

Әкәр R Евклид фәзасынын бүтүн x вә y елементләри үчүн

$$(Fx, Fy) = (x, y) \qquad (4)$$

бәрабәрлији өдәниләрсә, онда R фәзасынын хәтти F чевирмәсинә ортогонал чевирмә дејилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, ортогонал чевирмә заманы скалјар һасил дәјишмир, буна көрә дә елементләрин нормасы (узунлуғу) вә елементләр арасындакы бучаг сабит галыр. Ортогонал чевирмә заманы $e_1, e_2, ..., e_n$ ортонормал $F(e_1), F(e_2), ..., F(e_n)$ базисинә кечир:

$$(Fe_к, Fe_j) = (e_к, e_j) = \begin{cases} 1, & j = к, \\ 0, & j \neq к. \end{cases}$$

Бунун тәрси дә доғрудур: һеч олмаса бир ортонормал базиси ортонормал базисә чевирән хәтти F чевирмәси ортогонал чевирмәдир.

Доғрудан да, тутаг ки, хәтти F чевирмәси ортонормал $e_к$ $(к=1, 2, ..., n)$ базисини ортонормал $\beta_к = F(e_к)$ $(к=1, 2, ..., n)$ базисинә чевирмишдир. Онда ихтијари

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$$

вә

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$$

елементләри үчүн:

$$Fx = F(x) = x_1F(e_1) + x_2F(e_2) + ... + x_nF(e_n)$$

вә

$$Fy = F(y) = y_1F(e_1) + y_2F(e_2) + ... + y_nF(e_n).$$

Бурадан

$$(F(x), F(y)) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = (x, y)$$

алыныр ки, бу да F чевирмәсинин ортогонал олдуғуну көстәрир.

R Евклид фәзасынын ортогонал чевирмәсинин истәнилән ортонормал базисдә матриси ортогоналдыр вә тәрсинә, F чевирмәсинин һәр һансы ортонормал базисдә матриси ортогоналдырса, онда о ортогонал чевирмәдир. Ортогонал F чевирмәсинин матрисини A илә ишарә етсәк, онда:

$$A^*A = I$$

вә мә'лум теоремә көрә (I, § 6)

$$\Delta(A^*)\Delta(A) = \Delta(I) = 1.$$

Бурадан, $\Delta(A) = \Delta(A^*)$ олдуғундан (I, § 4)

$$[\Delta(A)]^2 = 1$$

вә ја

$$\Delta(A) = \pm 1.$$

Демәли, ортогонал матрисин детерминанты (± 1)-ә бәрабәрдир. Ортогонал чевирмәнин дә мәхсуси гијмәтинин (± 1)-ә бәрабәр олдуғуну көстәрмәк үчүн ортогонал F чевирмәсинин мәхсуси векторуну x вә она ујғун мәхсуси гијмәти λ илә ишарә едәк. Онда

$$(x, x) = (F(x), F(x)) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x)$$

вә бурадан $(x, x) \neq 0$ олдуғундан

$$\lambda^2 = 1, \qquad \lambda = \pm 1.$$

§ 8. СИММЕТРИК ЧЕВИРМӘЛӘР

Тутаг ки, n-өлчүлү R Евклид фәзасында хәтти F чевирмәси верилмишдир. R фәзасынын истәнилән x вә y елементләри үчүн

$$(F(x), y) = (x, \Phi(y)) \qquad (1)$$

мүнасибәти өдәниләрсә, онда Φ хәтти чевирмәсинә F *чевирмәсинә гошма олан чевирмә* дејилир вә $\Phi = F^*$ илә ишарә едилир:

$$(F(x), y) = (x, F^*(y)).$$

Гошмасы өзүнә бәрабәр олан, јә'ни $F = F^*$ шәртини өдәјән хәтти F чевирмәсинә *өз-өзүнә гошма вә јахуд Ермит*[1] *чевирмәси* дејилир. R фәзасы һәгиги Евклид фәзасы олдугда өз-өзүнә гошма чевирмәјә *симметрик чевирмә* дејилир.

Симметрик чевирмәнин истәнилән ортонормал базисдә матриси симметрик матрисдир вә тәрсинә, истәнилән ортонормал базисдә матриси симметрик олан чевирмә симметрик чевирмәдир. Симметрик матрисин бүтүн мәхсуси гијмәтләри һәгиги әдәдләрдир. Симметрик матрисин бу мәхсуси гијмәтләрә ујғун олан мәхсуси векторларындан һәмишә ортонормал базис тәшкил етмәк олар. Буну икиөлчүлү Евклид фәзасы үчүн симметрик чевирмә дилиндә ашағыдакы кими сөјләјә биләрик:

Икиөлчүлү һәгиги Евклид фәзасынын һәр бир F симметрик хәтти чевирмәсинин һеч олмаса бир чүт ортогонал мәхсуси вектору вардыр.

---

[1] Шарл Ермит (1822—1901) мәшһур франсыз ријазијјатчысыдыр.

Бу тәклифи исбат етмәк үчүн симметрик F чевирмәсинин һәр һансы базисдә матрисини

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} (a_{12} = a_{21})$$

илә ишарә едәк. Онда матрисин (вә ја чевирмәнин) характеристик тәнлији

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

вә јахуд

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \qquad (1)$$

олар. Бурадан хәтти F чевирмәсинин мәхсуси гијмәтләрини тапаг:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4(a_{12})^2}}{2}. \qquad (2)$$

Бизә әввәлдән дә мә'лумдур ки, бу мәхсуси әдәдләр һәгигидир (II, § 4). Чевирмәнин һәмин мәхсуси әдәдләрә ујғун олан мәхсуси векторларынын x_1 вә x_2 координатларыны

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

системиндән тапмаг лазымдыр. Бурада ики һал ола биләр:

I. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ олдугда хәтти F чевирмәсинин

$$F(x) = \lambda_1 x_1 \quad \text{вә} \quad F(y) = \lambda_2 y$$

бәрабәрликләрини өдәјән мәхсуси x вә y векторлары үчүн

$$(y, F(x)) = \lambda_1 (x, y)$$

вә

$$(x, F(y)) = \lambda_2 (x, y)$$

мүнасибәтләрини аларыг. Хәтти F чевирмәси симметрик олдуғундан:

$$(y, F(x)) = (x, F(y)).$$

Онда:

$$\lambda_1 (x, y) = \lambda_2 (x, y),$$
$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x, y) = 0$$

вә бурадан $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ олдуғундан $(x, y) = 0$ бәрабәрлији алыныр ки, бу да мәхсуси x вә y векторларынын ортогонал олдуғуну көстәрир.

II. $\lambda_1 = \lambda_2$ олдугда (2) бәрабәрлијиндән

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$$

вә

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4(a_{12})^2 = 0$$

алынар. Ахырынчы бәрабәрлик көстәрир ки,

$$a_{11} = a_{22} \quad \text{вә} \quad a_{12} = 0.$$

Онда $\lambda = a_{11} = a_{22}$ вә F хәтти симметрик чевирмәсинин A матриси

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix}$$

шәклиндә јазылар. Демәли, хәтти F чевирмәси охшарлыг чевирмәдир вә фәзанын һәр бир елементи онун мәхсуси векторудур. Бу һалда, сыфыр олмајан ихтијари ики ортогонал елементи чевирмәнин ортогонал мәхсуси вектору олараг көтүрмәк олар.

Исбат етдијимиз тәклиф сонлуөлчүлү истәнилән Евклид фәзасы үчүн дә доғрудур.

Бурадан нәтичә кими ашағыдакы тәклифи аларыг: *һәр бир симметрик A матриси үчүн елә ортогонал C матриси тапмаг олар ки, $B = C^{-1} AC$ матриси, диагоналы үзрә A матрисинин мәхсуси гијмәтләри дуран диагонал матрис олсун.*

Доғрудан да, тутаг ки, симметрик A матриси F симметрик хәтти чевирмәнин һәр һансы ортонормал $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базисиндә матрисидир. Бу ортонормал базиси F симметрик хәтти чевирмәнин мәхсуси векторларындан дүзәлмиш ортонормал $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ базисинә чевирән кечид матриси C олсун. Онда C матриси ортогонал матрис (§ 7) вә хәтти F чевирмәсинин јени ортонормал базис үзрә матриси

$$B = C^{-1} AC$$

олар (§ 5). Чевирмәнин матриси исә чевирмәнин мәхсуси векторларындан дүзәлмиш ортонормал базисдә диагонал матрис олур (§ 6).

§ 9. КВАДРАТИК ФОРМА ВӘ ОНУН КАНОНИК ШӘКЛӘ КӘТИРИЛМӘСИ

Тутаг ки, e_1, e_2 ортогонал базисиндә x_1 вә x_2 дәјишәнләриндән асылы

$$\Phi = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 \qquad (1)$$

ифадәси верилмишдир. x_1 вә x_2 дәјишәнләринә нәзәрән икидәрәчәли бирчинсли чохһәдли олан бу ифадә һәмин *дәјишәнләрин квадратик формасы* адланыр. (1) формасыны тә'јин едән a_{11}, a_{12} вә a_{22} әдәдләринә *форманын әмсаллары* дејилир. Бу әдәдләрдән дүзәлмиш симметрик

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} (a_{21} = a_{12})$$

матриси исә *квадратик форманын матриси* адланыр.

A матрисинин

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

характеристик тәнлијинин көкләри λ_1 вә λ_2 олсун. Матриси A олан симметрик хәтти чевирмәнин, мәхсуси гијмәтләри λ_1 вә λ_2 олан ортогонал мәхсуси векторларыны β_1 вә β_2 илә ишарә едәк. e_1, e_2 базисиндән јени β_1, β_2 базисинә кечсәк, јени базисә нәзәрән хәтти чевирмәнин матриси

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}$$

олачагдыр. Бу һалда, (1) ифадәси јени базисдә

$$\Phi = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 \qquad (2)$$

шәклиндә јазылар.

(2) ифадәсинә (1) квадратик форманын каноник шәкли дејилир.

Ејни гајда илә үч дәјишәнин

$$\Phi = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 \qquad (3)$$

квадратик формасыны каноник шәклә кәтирмәк олар. Бу мәгсәдлә һәмин форманы

$$\Phi = x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + \\ + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) + \\ + x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)$$

шәклиндә јазаг ($a_{21} = a_{12},\ a_{31} = a_{13},\ a_{32} = a_{23}$) вә e_1, e_2, e_3 ортонормал базисиндә матриси симметрик

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

матриси олан хәтти $x' = F(x)$ чевирмәсинә вә јахуд координатларла јазылмыш

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

чевирмәсинә бахаг. Бу симметрик хәтти чевирмәнин $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ мәхсуси гијмәтләрини вә онлара ујғун ортонормал $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ мәхсуси векторларыны тапсаг вә e_1, e_2, e_3 базисиндән $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ортонормал базисинә кечсәк, онда хәтти чевирмәнин јени базисдә матриси диагонал шәклиндә олар:

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}$$

вә бу базисдә (3) квадратик формасы

$$\Phi = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \lambda_2 \tilde{x}_2^2 + \lambda_3 \tilde{x}_3^2 \qquad (4)$$

шәклиндә јазылар.

(4) ифадәсинә (3) квадратик форманын каноник шәкли дејилир. Бу гајда илә истәнилән сонлу сајда дәјишәнин квадратик формасыны да каноник шәклә кәтирмәк олар.

VI ФӘСИЛ

МҮСТӘВИ ҮЗӘРИНДӘ ДҮЗ ХӘТТ

§ 1. МҮСТӘВИ ҮЗӘРИНДӘ КООРДИНАТ СИСТЕМИНИН ЧЕВРИЛМӘСИ

Фәрз едәк ки, мүстәви үзәриндә (Oxy) вә ја $O\vec{i}\,\vec{j}$ (көһнә) вә ($O'x'y'$) вә ја $O'\vec{i}'\vec{j}'$ (јени) дүзбучаглы Декарт координат системләри (өлчү ваһидләри ејни олан) тә'јин олунмушдур (III, § 6). Мүстәви үзәриндә јерләшән истәнилән M нөгтәсинин бу координат системләринә көрә координатлары ујғун олараг (x, y) вә (x', y') олар.

Бир координат системиндән башга координат системинә кечдикдә V фәсилдә шәрһ олунмуш үмуми тәклифләрдән истифадә едәрәк, нөгтәнин јени вә көһнә координатлары арасында мүәјјән әлагә јаратмаг олар. Бу заман алынан мүнасибәтләрә координатларын чеврилмәси дүстурлары дејилир.

I. **Паралел көчүрмә**. Фәрз едәк ки, ($O'x'y'$) координат системи (Oxy) координат системиндән паралел көчүрмә васитәсилә алынмышдыр.

Верилмиш координат системини паралел көчүрдүкдә координат башланғычы өз јерини дәјишир, охлар исә истигамәтини дәјишмир. Буна көрә дә, $O\vec{i}\,\vec{j}$ координат системинин паралел көчүрүлмәсиндән алынан координат системи $O'\vec{i}\,\vec{j}$ олар. «Јени» $O'\vec{i}\,\vec{j}$ координат системинин O' координат башланғычынын «көһнә» $O\vec{i}\,\vec{j}$ координат системинә көрә координатлары (a, b) олсун (32-чи шәкил). Онда:

$$\overline{OO'} = a\vec{i} + b\vec{j}. \qquad (1)$$

Бу һалда

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad (2)$$

$$\overline{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \qquad (3)$$

1349—8

вә

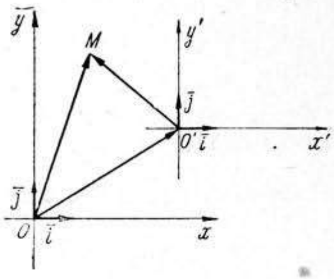
$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$$

олдуғундан (1), (2) вә (3) мүнасибәтләринә әсасән

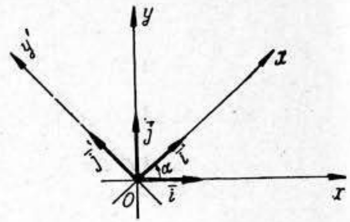
$$x\bar{i} + y\bar{j} = (a + x')\bar{i} + (b + y')\bar{j}$$

бәрабәрлијини аларыг. Һәр бир векторун базис үзрә ајрылышы јеканә (III, § 4) олдуғундан:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x', \\ y &= b + y' \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$



Шәкил 32



Шәкил 33

II. **Координат охларынын фырланмасы.** Фәрз едәк ки, јени $O\bar{i}'\bar{j}'$ координат системи $O\bar{i}\,\bar{j}$ координат системиндән координат башланғычыны сабит сахлајараг, базис векторларыны ујғун олараг α буҹағы гәдәр фырламагла алынмышдыр (33-ҹү шәкил). Истәнилән M нөгтәсинин јени координат системинә ҝөрә координатлары (x', y'), көһнә координат системинә ҝөрә координатлары (x, y) оларса, онда:

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} \qquad (5)$$

вә

$$\overline{OM} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}'. \qquad (6)$$

Инди јени $\bar{i}'$ вә $\bar{j}'$ базис векторларынын көһнә $\bar{i}$ вә $\bar{j}$ базис векторлары үзрә ајрылышыны јазаг:

$$\left.\begin{aligned} \bar{i}' &= c_{11}\,\bar{i} + c_{21}\,\bar{j}, \\ \bar{j}' &= c_{12}\,\bar{i} + c_{22}\,\bar{j}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Бу гијмәтләри (6) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндә јеринә јазсаг вә (5) мүнасибәтини нәзәрә алсаг:

$$x\bar{i} + y\bar{j} = (c_{11}x' + c_{12}y')\,\bar{i} + (c_{21}x' + c_{22}y')\,\bar{j}$$

вә бурадан:

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y'. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Мә'лумдур ки,

$$C = \begin{Vmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{11} & c_{12} \end{Vmatrix}$$

матриси көһнә базисдән јени базисә кечид матрисидир. Инди кечид матрисинин елементләрини тапаг. (7) бәрабәрликләринин һәр ики тәрәфини нөвбә илә $\bar{i}$ вә $\bar{j}$ векторларына скалјар олараг вурсаг:

$$c_{11} = (\bar{i}', \bar{i}), \; c_{21} = (\bar{i}', \bar{j}), \; c_{12} = (\bar{j}', \bar{i}), \; c_{22} = (\bar{j}', \bar{j}).$$

Бурадан скалјар һасилин тә'рифинә ҝөрә:

$$c_{11} = \cos\alpha, \quad c_{21} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

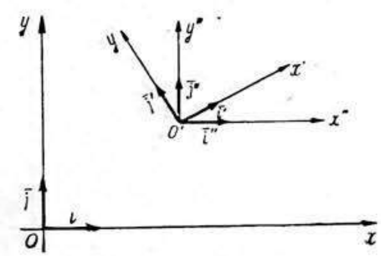
$$c_{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha, \quad c_{22} = \cos\alpha.$$

Бу гијмәтләри (8) мүнасибәтиндә јеринә јаздыгда

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

чевирмә дүстурлары алыныр.

III. **Үмуми һал.** Фәрз едәк ки, $O\bar{i}\,\bar{j}$ (көһнә) вә $O'\bar{i}'\bar{j}'$ (јени) ихтијари координат системләридир. Ихтијари M нөгтәсинин көһнә координат системинә ҝөрә координатлары (x, y), јени координат системинә ҝөрә координатлары исә (x', y') олсун. Бу координатлар арасында әлагә јаратмаг үчүн көмәкчи $O'\bar{i}''$, $\bar{j}''$ координат системини ҝөтүрәк (34-ҹү шәкил). M нөгтәсинин $O'\bar{i}''\bar{j}''$ координат системинә ҝөрә координатлары (x'', y'') олсун. Онда (4) вә (9) дүстурларына ҝөрә:



Шәкил 34

$$\left.\begin{aligned} x &= x'' + a, \\ y &= y'' + b \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

вә

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y'' &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Бурадан да:

$$\left.\begin{aligned} x &= a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= b + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Ахырынчы дүстурларда x вә y координатларыны мә'лум һесаб едәрәк, x' вә y' координатларыны һәмин дүстурлардан тапмаг олар:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha,\\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha.\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Беләликлә, чыхардығымыз (12) дүстурлары васитәсилә истәнилән нөгтәнин көһнә координатларыны онун јени координатлары илә, (13) дүстурлары васитәсилә исә нөгтәнин јени координатларыны онун көһнә координатлары илә ифадә етмәк олар.

Гејд едәк ки, Декарт координат системинин координат охлары үзәриндә чох заман базис векторлары јазылмыр.

Мисал 1. Верилмиш (Oxy) координат системи башланғычынын O' (1, 1) нөгтәсинә көчүрүләрәк координат охларынын $\frac{\pi}{4}$ гәдәр фырланмасына ујғун чевирмә дүстурларыны тапмалы.

Һәлли. $a=1$, $b=1$ вә $\alpha=\frac{\pi}{4}$ олдуғундан (5) дүстурларына көрә:

$$x = 1 + \frac{x'-y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = 1 + \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

§ 2. ХӘТТ ВӘ ОНУН ТӘНЛИЈИ

Һәндәсәдә хәтт дедикдә, мүәјјән хассәләри олан нөгтәләрин һәндәси јери баша дүшүлүр. Хәтләри тә'јин едән һәндәси хассәләр чохдур. Бу хассәләри аналитик олараг ифадә етмәк мүмкүн олдугда хәттин тәнлији алыныр.

Мүстәви үзәриндә јерләшән хәттин (мүстәви хәттин вә ја әјринин) тәнлији дедикдә нәји баша дүшмәк лазымдыр?

Буну изаһ етмәк үчүн фәрз едәк ки, мүстәви үзәриндә (Oxy) координат системи вә һәр һансы (L) әјриси верилмишдир.

(L) әјрисинин верилмиш координат системиндә тәнлији елә

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

тәнлијинә дејилир ки, ону, бу әјри үзәриндә јерләшән бүтүн нөгтәләрин координатлары өдәјир, әјри үзәриндә јерләшмәјән һеч бир нөгтәнин координатлары исә өдәмир.* $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсинин координатларынын (1) тәнлијини өдәмәси о демәкдир ки, һәмин тәнлијин сол тәрәфиндә x вә y әвәзинә ујғун олараг x_0 вә y_0 јаздыгда ејнилик алыныр:

$$F(x_0, y_0) = 0.$$

* (1) бәрабәрлији бүтүн (x, y) һәгиги әдәдләр чүтү үчүн өдәнилдикдә она ејнилик дејилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, тәнлик әјрини тә'јин едән һәндәси хассәнин аналитик јазылышыдыр:

(L) әјриси (верилмиш координат системиндә) координатлары (1) тәнлијини өдәјән нөгтәләрин һәндәси јеридир.

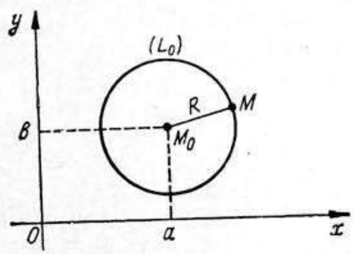
(1) тәнлијини өдәјән нөгтәләрин һәндәси јери олан (L) әјриси бир бүтөв хәтт олмаја да биләр. Үмумијјәтлә, верилмиш хассәни өдәјән бүтүн нөгтәләрин һәндәси јери бир вә ја бир нечә хәтдән ибарәт олан һәндәси фигурдур.

Мә'лумдур ки, $F(x, y) = 0$ шәклиндә олан тәнлик (әлбәттә, мүәјјән шәртләр дахилиндә) x вә y дәјишәнләри арасындакы мүәјјән функсионал асылылығы ифадә едир (XI, § 7). (1) тәнлији $y=y(x)$ функсијасыны тә'јин едирсә вә (L) әјрисинин тәнлијидирсә, онда (L) әјриси һәмин $y=y(x)$ функсијасынын графики олар. Бурадан ајдындыр ки, тәнлији верилмиш әјрини гурмаг, һәмин тәнлијин тә'јин етдији функсијанын графикини гурмаг демәкдир.

Ајдындыр ки, верилмиш әјринин тәнлијини тапмаг үчүн һәндәси јери олдуғу нөгтәләрин координатлары арасындакы мүнасибәти, јә'ни һәмин әјрини тә'јин едән һәндәси хассәнин «дүстур шәклиндә» (x вә y васитәсилә) ифадәсини тапмаг лазымдыр.

Мәсәлән, мәркәзи $M_0(a, b)$ нөгтәсиндә вә радиусу R-ә бәрабәр олан (L_0) чеврәсинин тәнлиијини тапаг (35-чи шәкил). Бу чеврәни тә'јин едән һәндәси хассә беләдир: (L_0) чеврәси $M_0(a, b)$ нөгтәсиндән R мәсафәдә јерләшән $M(x, y)$ нөгтәләринин һәндәси јеридир:

$$d(M_0, M) = R.$$



Шәкил 35

Ики нөгтә арасындакы мәсафә дүстурундан (III, § 8) истифадә етсәк, ахырынчы бәрабәрлији

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

вә ја

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - R^2 = 0 \qquad (2)$$

шәклиндә јаза биләрик.

(2) бәрабәрлији (L_0) чеврәсинин тәнлијидир. (2) тәнлијини анчаг (L_0) чеврәсинин нөгтәләринин координатлары өдәјир. Һәмин чеврә үзәриндә јерләшмәјән һеч бир нөгтәнин координатлары исә (2) тәнлијини өдәмир.

(1) тәнлији верилмиш координат системиндә (L) әјрисинин тәнлији олдугда, дејирләр ки, һәмин тәнлик (L) әјрисини тә'јин едир.

Мисал 1. $y-x=0$ тәнлијинин тә'јин етдији (L_1) әјриси координатлары $y=x$ шәртини өдәјән нөгтәләрин һәндәси јеридир. Бу хассәни исә анчаг биринчи вә үчүнчү координат бучагларынын тәнбөләнининин нөгтәләри өдәјир. Демәли, $y-x=0$ тәнлији биринчи вә үчүнчү координат бучагларынын тәнбөләни олан (L_1) дүз хәттини (бу ејни заманда $y=x$ функсијасынын графикидир) тә'јин едир (36-чы шәкил).

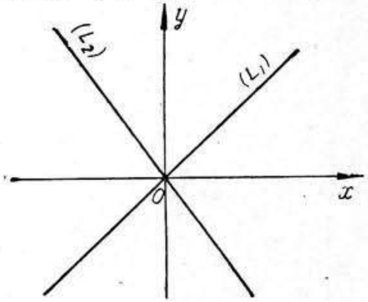
Мисал 2.

$$y^2-x^2=0 \tag{3}$$

тәнлијинин тә'јин етдији хәтти тапмаг үчүн ону

$$(y-x)(y+x)=0$$

шәклиндә јазаг. Бурадан ајдындыр ки, (3) тәнлијинин тә'јин етдији (L) әјриси нөгтәләринин координатлары ја $y-x=0$, ја да $y+x=0$ тәнлијини өдәмәлидир. Бунларын биринчиси I вә III координат бучагларынын тәнбөләни олан (L_1) дүз хәттини (мисал 1), икинчиси исә II вә IV координат бучагларынын тәнбөләни олан (L_2) дүз хәттини тә'јин едир. Демәли, (3) тәнлији (L_1) вә (L_2) дүз хәтләриндән ибарәт олан (L) хәттини тә'јин едир. Бурада верилмиш хассәни (вә ја (3) тәнлијини) өдәјән нөгтәләрин һәндәси јери ики кәсишән дүз хәтдән ибарәтдир.



Шәкил 36

Мисал 3. Верилмиш тәнлик

$$(x-1)^2+(y-1)^2=0 \tag{4}$$

олдугда, ону анчаг $M(1;\,1)$ нөгтәсинин координатлары өдәјәр. Бу һалда (4) тәнлији анчаг бир $M(1,\,1)$ нөгтәсини тә'јин едир. Һәндәси јерин (вә ја хәттин) анчаг бир нөгтәдән ибарәт олмасы бизим «әјри» тәсәввүрүнә мүәјјән мә'нада ујғун кәлмир. Белә олдугда, бә'зән дејирләр ки, (4) тәнлији чырлашмыш хәтт тә'јин едир.

Мисал 4.

$$x^2+y^2+2=0 \tag{5}$$

тәнлијини мүстәви үзәриндә һеч бир нөгтәнин координатлары өдәмир.

Демәли, (5) тәнлији мүстәви үзәриндә һеч бир һәндәси образы (хәтти, фигуру) тә'јин етмир. Бу һалда дејирләр ки, (5) тәнлији хәјали хәтт тә'јин едир (бунун сәбәби одур ки, x вә y-ин (5) тәнлијини өдәјән хәјали гијмәтләри вардыр, мәсәлән, $x=2i$; $y=\sqrt{2}$; $x=1$, $y=\sqrt{3i}$ вә с.).

(L) әјрисини тә'јин едән (1) тәнлијинин сол тәрәфи x вә y-ә нәзәрән n-дәрәчәли чохһәдли, јә'ни

$$F(x,\,y)=P_n(x,\,y)=\sum_{\kappa,\,m} a_{\kappa,\,m}\,x^{\kappa}\,y^{m}\quad (0\leqslant \kappa+m\leqslant n)$$

олдугда, һәмин әјрijә *n-тәртибли чәбри әјри* дејилир. Чәбри олмајан әјриләрә *транссендент әјриләр* дејилир.

Чәбри әјриләрин тәртиби Декарт координат системләринин чеврилмәсинә нәзәрән инвариант (дәјишмәз) кәмијјәтдир, јә'ни (L) чәбри әјрисинин бир дүзбучаглы координат системинә көрә тәртиби n-дирсә, башга ихтијари дүзбучаглы координат системинә көрә дә тәртиби n олар.

Чәбри әјриләрә

$$Ax+By+C=0,$$
$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

вә с. тәнликләринин тә'јин етдији хәтләр мисал ола биләр. Бу хәтләрин биринчиси (биринчи тәнлијин тә'јин етдији хәтт) бир-тәртибли, икинчиси исә икитәртибли чәбри әјриләрдир.

Мүстәви хәттин тәнлијинин мә'лум олмасы онун хассәләрини тәдгиг етмәк үчүн бөјүк әһәмијјәтә маликдир. Әјринин тәнлији мә'лум олдугда, онун хассәләри чәбр вә анализ методлары васитәсилә (јә'ни, аналитик методла) тәдгиг едилир.

Һәндәси мәсәләләри һәлл едәркән әслиндә тәнлији мә'лум (верилмиш) олан хәтти мә'лум һесаб едирләр. Бундан башга, «$F(x,\,y)=0$ тәнлијинин тә'јин етдији хәтт» әвәзинә бә'зән «$F(x,\,y)=0$» хәтти дејирләр.

Дедикләримиздән ајдындыр ки, «верилмиш» әјринин тәнлијини тапмаг вә тәнлији верилмиш әјринин хассәләрини өјрәнмәк һәндәсәнин әсас мәсәләләридир. Бу мәсәләләрлә биз китабын сонракы һиссәләриндә јери кәлдикчә мәшғул олачағыг.

§ 3. ХӘТТ ТӘНЛИЈИНИН МҮХТӘЛИФ ШӘКИЛЛӘРИ

Хәтт тәнлијинин шәкли тәкчә әјринин гурулушундан (вә шәклиндән) асылы олмајыб, һәм дә тәнлијин һансы координат системинә көрә јазылмасындан асылыдыр. Ејни бир әјринин мүхтәлиф координат системләринә көрә тәнликләри, үмумијјәтлә мүхтәлиф олар. Буна көрә дә әјри тәнлијини даһа садә шәклә салмаг үчүн бә'зән координат системини дәјишдирирләр. Јени $(O'x'y')$ Декарт координат системинә көрә әјринин тәнлијини алмаг үчүн онун әввәлки $(x,\,y)$ Декарт координатларына көрә јазылмыш тәнлијиндә $(x,\,y)$ координатлары әвәзинә онларын јени $(x',\,y')$

координатларла ифадәсини јазырлар. Мәсәлән, (Oxy) координат системинә көрә (L) әјрисинин тәнлији

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

оларса, һәмин координат системини паралел көчүрүб, фырлатдыгдан сонра (§ 1) алынан јени $(O'x'y')$ координат системинә көрә тәнлији

$$F(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \quad x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b) = 0$$

вә ја

$$\Phi(x', y') = 0 \qquad (2)$$

олар; бурада

$$\Phi(x', y') = F(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \quad x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b).$$

(L) әјрисинин (1) тәнлијини y дәјишәнинә көрә һәлл етмәк мүмкүн оларса, онда (L) әјрисинин тәнлији

$$y = f(x) \qquad (3)$$

шәклиндә дә јазыла биләр. Бу һалда әјри (вә ја әјринин тәнлији) ашкар шәкилдә верилмишдир, дејирләр.

Мә'лумдур ки, функсионал асылылыг (1) тәнлији илә вә (3) шәклиндә верилмәсиндән башга параметрик шәкилдә дә веринлә биләр (XI, § 9). Буна ујғун олараг әјринин тәнлији дә

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (4)$$

параметрик шәклиндә верилә биләр. (4) тәнликләриндә t параметри һәр һансы областда дәјишир. (4) тәнликләриндән t параметрини јох етмәк мүмкүн олдугда әјринин (1) шәклиндә тәнлији алыныр.

Мисал 1. Мәркәзи координат башланғычында вә радиусу R олан чеврәнин параметрик тәнлији

$$\left.\begin{aligned} x &= R \cos t, \\ y &= R \sin t \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

олар (37-чи шәкил).

Доғрудан да, $\overline{OM}$ парчасынын абсис оху илә әмәлә кәтирдији бучағы t һесаб етсәк, ΔNOM-дән (5) бәрабәрликләрини аларыг.

(L) әјрисинин дүзбучаглы координатларла јазылмыш (1) тәнлијиндә x вә y әвәзинә онларын полјар координатларла

$$x = \rho \cos\varphi \quad \text{вә} \quad y = \rho \sin\varphi$$

ифадәсини јазсаг (XI, § 3), һәмин әјринин полјар координат системиндә тәнлијини аларыг:

$$F(\rho \cos\varphi, \quad \rho \sin\varphi) = 0$$

вә ја

$$\psi(\rho, \varphi) = 0, \qquad (6)$$

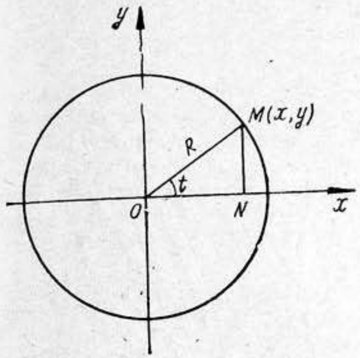
бурада

$$\psi(\rho, \varphi) = F(\rho \cos\varphi, \quad \rho \sin\varphi).$$

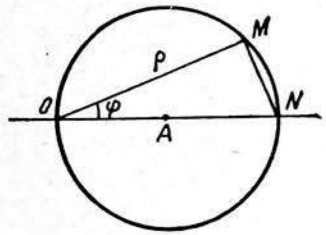
(6) тәнлијини ρ-ја нәзәрән һәлл етмәк мүмкүн олдугда (L) әјрисинин полјар координат системиндә тәнлији

$$\rho = f(\varphi) \qquad (7)$$

шәклиндә олар.



Шәкил 37



Шәкил 38

Мисал 2. Полјусдан кечән вә мәркәзи полјар ох үзәриндә олан R радиуслу чеврәнин тәнлијини тапмалы (38-чи шәкил).

Чеврә үзәриндә јерләшән истәнилән M нөгтәсинин полјар координатлары ρ вә φ олсун: $M(\rho, \varphi) \cdot ON = 2R$ вә $\angle OMN = \frac{\pi}{2}$ олдуғундан:

$$\frac{\rho}{2R} = \cos\varphi$$

вә

$$\rho = 2R \cos\varphi.$$

Гејд едәк ки, әјриләрин тәнлијинин мә'лум олмасы онларын һаггында бир сыра мәсәләләри тез һәлл етмәјә көмәк едир. Мәсәлән, верилмиш $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсинин (1) әјриси үзәриндә јерләшмәсини онун координатларынын (1) тәнлијини өдәмәси илә јохламаг олар.

Верилмиш

$$F_1(x, y) = 0$$

вә

$$F_2(x, y) = 0$$

әјриләрнин кәсишмә нөгтәләрини һәмин тәнликләри биркә һәлл етмәклә тапмаг олар:

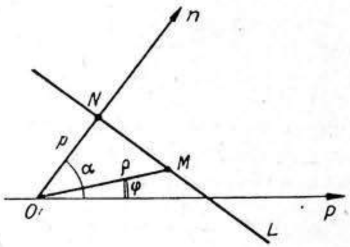
$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

(8) системинин һәлләри верилмиш әјриләрин кәсишмә нөгтәләрини тә'јин един. Онун һәгиги һәллинин олмамасы, һәмин әјриләрин кәсишмәдијини көстәрир.

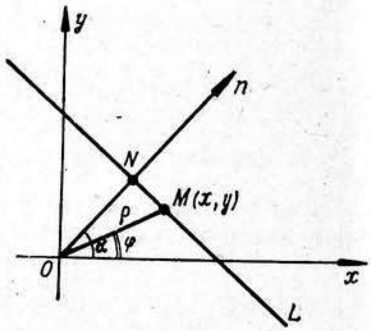
§ 4. ДҮЗ ХӘТТИН ПОЛЈАР КООРДИНАТ СИСТЕМИНДӘ ТӘНЛИЈИ

Мүстәви. хәтләрин ән садәси дүз хәтдир. Дүз хәттин мүхтәлиф шәкилләрдә тәнлији вардыр.

Әввәлчә дүз хәттин полјар координат системиндә тәнлијини чыхараг. Бу мәгсәдлә мүстәви үзәриндә полјар координат системи вә һәр һансы L дүз хәтти (39-чу шәкил) көтүрәк. Полјусдан L дүз хәттинә On перпендикулјары галдыраг вә бу перпендикулјар үзәриндә O-дан L дүз хәттинә тәрәф истигамәт тә'јин едәк.



Шәкил 39



Шәкил 40

Перпендикулјарын $\overline{ON}$ парчасынын узунлуғу p вә онун OP оху илә әмәлә кәтирдији буҹаг α олсун. L дүз хәтти үзәриндә јерләшән истәнилән $M(\rho, \varphi)$ нөгтәси

$$\text{Пр}_{on}\,\overline{OM} = ON = p$$

$$\text{Пр}_{on}\,\overline{OM} = \rho\cos(\alpha - \varphi)$$

вә буна көрә дә

$$\rho\cos(\alpha - \varphi) = p \qquad (1)$$

мүнасибәтини өдәјәр. (1) тәнлијини L дүз хәтти үзәриндә јерләшмәјән һеч бир нөгтәнин координатлары өдәмир. Демәли, (1) ифадәси L дүз хәттинин полјар координат системиндә тәнлијидир.

§ 5. ДҮЗ ХӘТТИН НОРМАЛ ТӘНЛИЈИ

Мүстәви үзәриндә (Oxy) координат системи вә ихтијари L дүз хәтти көтүрәк (40-чы шәкил). Координат башланғычыны полјус вә абсис оху полјар ох һесаб етсәк, алынан полјар координат системиндә L дүз хәттинин тәнлији

$$\rho\cos(\alpha - \varphi) = p \qquad (1)$$

олачагдыр. (1) тәнлијинин сол тәрәфини ачсаг

$$\rho\cos\varphi \cdot \cos\alpha + \rho\sin\varphi \cdot \sin\alpha = p$$

вә полјар координатларла дүзбучаглы координатлар арасындакы $x = \rho\cos\varphi$ вә $y = \rho\sin\varphi$ әлагә дүстурларындан (XI, § 3) истифадә етсәк

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (2)$$

тәнлијини аларыг. Бу тәнлик *дүз хәттин нормал тәнлији* вә ја *дүз хәтт тәнлијинин нормал шәкли* адланыр.

Әввәлки параграфдан мә'лумдур ки, (2) тәнлијиндәки p әдәди координат башланғычындан L дүз хәттинә ендирилмиш перпендикулјарын (вә ја $\overline{ON}$ парчасынын) узунлуғу, α исә һәмин перпендикулјарын абсис оху илә әмәлә кәтирдији буҹагдыр. p вә α әдәдләринә нормал тәнлијин *параметрләри* дејилир.

Дүз хәттин нормал тәнлији x вә y ҹари координатларына көрә бирдәрәҹәли тәнликдир. Бу тәнлијин сәрбәст һәдди мүсбәт олмајан $(-p \leqslant 0)$ әдәд, x вә y мәчһуллары әмсалынын квадратлары ҹәми исә ваһидә бәрабәрдир:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Беләликлә, мүстәви үзәриндәки һәр бир дүз хәттә (2) шәклиндә бир нормал тәнлик, (2) шәклиндә һәр бир тәнлијә исә бир дүз хәтт ујғундур. (2) шәклиндә тәнликлә мүстәви үзәриндә тә'јин едилән дүз хәттин вәзијјәти p вә α параметрләри илә тамамилә тә'јин олунур.

§ 6. ДҮЗ ХӘТТИН БУЧАГ ӘМСАЛЛЫ ТӘНЛИЈИ

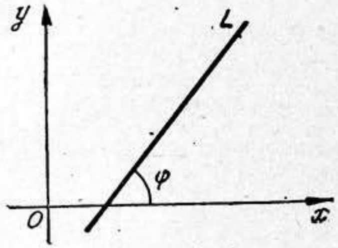
Мүстәви үзәриндә (Oxy) дүзбучаглы координат системи вә ихтијари L дүз хәтти көтүрәк (41-чи шәкил).

Абсис оху L дүз хәттинә паралел вәзијјәтә кәтирмәк үчүн ону координат башланғычы әтрафында мүәјјән φ буҹағы гәдәр фырлатмаг лазымдыр. Һәмин φ буҹағына L дүз хәттинин абсис охуна *мејл буҹағы* дејилир.

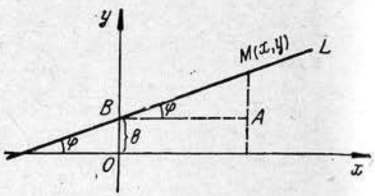
Дүз хәттин мејл буҹағы фырланманын истигамәтиндән асылы олараг мүсбәт вә мәнфи ола биләр. φ буҹағы верилмиш L дүз хәттинин абсис охуна мејл буҹағыдырса, онда $\varphi + n\pi$ (n—истәнилән там әдәддир) шәклиндә олан һәр бир буҹаг да L дүз хәттинин

абсис охуна мејл бучағы олар. Бурадан ајдындыр ки, верилмиш дүз хəттин абсис охуна мејл бучағы биргијмəтли тə'јин олунмур. Лакин бу мејл бучагларынын һамысынын танкенси бир-биринə бəрабəрдир:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi + n\pi).$$



Шəкил 41



Шəкил 42

Дүз хəттин абсис охуна мејл бучағынын танкенсинə онун *бучаг əмсалы* дејилир вə κ илə ишарə олунур:

$$\kappa = \operatorname{tg}\varphi.$$

Абсис охуна паралел олан дүз хəттин бучаг əмсалы сыфра бəрабəрдир. Ординат охуна паралел олан дүз хəттин мејл бучағы $\varphi = \frac{\pi}{2}$ олдуғундан $\operatorname{tg}\varphi$-нин мə'насы јохдур вə буна көрə дə белə дүз хəтлəрин бучаг əмсалындан данышмаг олмаз.

Инди абсис охуна мејл бучағы $\varphi\left(\neq \frac{\pi}{2}\right)$ (вə ја бучаг əмсалы $\kappa = \operatorname{tg}\varphi$) вə ординат охундан ајырдығы парчанын гијмəти b олан L дүз хəттинин (42-чи шəкил) тəнлијини тапаг. Бу мəгсəдлə дүз хəтт үзəриндə ихтијари $M(x, y)$ нөгтəси көтүрəк вə $\overline{BM}$ парчасынын координат охлары үзəринə пројексијаларыны һесаблајаг:

$$\text{Пр}_{ox}\overline{BM} = |\overline{BM}|\cos\varphi = x$$

вə

$$\text{Пр}_{oy}\overline{BM} = |\overline{BM}|\cdot\sin\varphi = y - b.$$

Ахырынчы бəрабəрликдəн:

$$y - b = |\overline{BM}|\sin\varphi =$$
$$= |\overline{BM}|\cos\varphi\cdot\operatorname{tg}\varphi = \kappa x,$$
$$y - b = \kappa x$$

вə ја

$$y = \kappa x + b \qquad (1)$$

тəнлијини аларыг. (1) тəнлијини L дүз хəттинин бүтүн нөгтəлəринин координатлары өдəјир, L үзəриндə јерлəшмəјəн һеч бир нөгтəнин координатлары исə һəмин тəнлији өдəмир.

(1) тəнлијинə L дүз хəттинин *бучаг əмсаллы тəнлији* дејилир. Белəликлə, ординат охуна паралел олмајан һəр бир дүз хəттин тəнлији (1) шəклиндə олур. (1) шəклиндə һəр бир тəнлик исə бучаг əмсалы κ вə ординат охундан ајырдығы парчанын гијмəти b олан бир дүз хəтт тə'јин едир.

$b = 0$ олдугда (1) тəнлији $y = \kappa x$ шəклинə дүшүр. $y = \kappa x$ исə координат башланғычындан кечəн вə бучаг əмсалы κ олан дүз хəттин тəнлијидир.

$\kappa = 0$ олдугда (1) тəнлији $y = b$ шəклинə дүшүр, бу да абсис охуна паралел олан дүз хəттин тəнлијидир.

Мə'лумдур ки,

$$y = \kappa x + b$$

функсијасына хəтти функсија дејилир. Демəли, хəтти функсијанын графики дүз хəтдир.

Мисал 1. Верилмиш $M_0(x_0, y_0)$ нөгтəсиндəн кечəн вə бучаг əмсалы κ олан дүз хəттин тəнлијини тапмалы.

Дүз хəттин тəнлијини (1) шəклиндə ахтараг. M_0 нөгтəси дүз хəтт үзəриндə олдуғундан онун координатлары дүз хəтт тəнлијини өдəмəлидир:

$$y_0 = \kappa x_0 + b.$$

Бурадан b-ни тапаг:

$$b = y_0 - \kappa x_0.$$

Бу гијмəти (1) тəнлијиндə јеринə јазсаг, ахтарылан тəнлији

$$y - y_0 = \kappa(x - x_0) \qquad (2)$$

шəклиндə аларыг.

Мисал 2. Верилмиш $M_1(x_1, y_1)$ вə $M_2(x_2, y_2)$ нөгтəлəриндəн кечəн дүз хəттин тəнлијини тапмалы.

Дүз хəтт $M_1(x_1, y_1)$ нөгтəсиндəн кечдији үчүн онун тəнлији (2) шəклиндə олар:

$$y - y_1 = \kappa(x - x_1). \qquad (3)$$

Бурадан κ-ны тапмаг үчүн дүз хəттин $M_2(x_2, y_2)$ нөгтəсиндəн кечмəси шəртиндəн истифадə едəк:

$$y_2 - y_1 = \kappa(x_2 - x_1). \qquad (4)$$

(3) вə (4) мүнасибəтлəриндəн:

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1). \qquad (5)$$

(5) тəнлији $M_1(x_1\ y_1)$ бə $M_2(x_2\ y_2)$ нөгтəлəриндəн кечəн дүз хəттин тəнлијидир.

$x_1 = x_2$ вə $y_2 - y_1 \neq 0$ олдугда (5) тəнлији $x = x_1$ шəклиндə, $y_1 = y_2$ вə $x_2 - x_1 \neq 0$ олдугда исə $y = y_1$ шəклиндə олар.

$x_2 - x_1 \neq 0$ вə $y_2 - y_1 \neq 0$ олдугда (5) тəнлијини белə јазмаг олар:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \qquad (6)$$

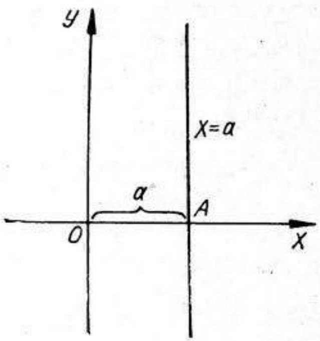
§ 7. ДҮЗ ХӘТТИН ҮМУМИ ТӘНЛИЈИ

Әввәлки параграфда көстәрдик ки, ордината охуна паралел олмајан һәр бир дүз хәттин тәнлији

$$y = kx + b \tag{1}$$

шәклиндә олур. Ордината охуна паралел вә абсис охундан ајырдығы парчанын гијмәти a олан дүз хәттин (43-чү шәкил) тәнлији исә

$$x = a \tag{2}$$



Шәкил 43

шәклиндә олар. (1) вә (2) тәнликләринин һәр икиси x вә y дәјишәнләринә нәзәрән бирдәрәчәли тәнликдир. Бурадан ајдын олур ки, мүстәви үзәриндә истәнилән дүз хәттин тәнлији x вә y дәјишәнләринә нәзәрән бирдәрәчәлидир:

$$Ax+By+C=0. \tag{3}$$

(3) шәклиндә һәр бир тәнлик ($A^2+B^2\neq0$) исә мүстәви үзәриндә бир дүз хәтт тә'јин едир (буну ашағыда апардығымыз мүһакимәдән көрмәк олар).

(3) тәнлијинә *дүз хәттин үмуми тәнлији* дејилир. Дүз хәттин үмуми тәнлијинин сол тәрәфи x вә y-ә нәзәрән бирдәрәчәли чохһәдлидир. Демәли, һәр бир дүз хәтт биртәртибли чәбри хәтдир. Биртәртибли һәр бир чәбри хәтт исә дүз хәтдир.

Инди дүз хәттин (3) үмуми тәнлијинин A, B вә C әмсалларынын гијмәтләриндән асылы олараг һәмин тәнлијин тә'јин етдији дүз хәттин верилмиш координат системинә көрә нечә јерләшдијини тәдгиг едәк.

1. $A\neq0$, $B\neq0$ вә $C\neq0$ олсун. Онда (3) тәнлијини

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

вә ја

$$y=kx+b \quad \left(k=-\frac{A}{B},\quad b=-\frac{C}{B}\right) \tag{4}$$

шәклиндә јазмаг олар.

(4) тәнлији бучаг әмсалы $k=-\frac{A}{B}$ вә ордината охундан ајырдығы парчанын гијмәти $b=-\frac{C}{B}$ олан дүз хәттин тәнлијидир.

2. $A=0$, $B\neq0$ вә $C\neq0$ олсун. Бу һалда (3) тәнлијини

$$y=-\frac{C}{B},\quad y=b \quad \left(b=-\frac{C}{B}\right) \tag{5}$$

шәклиндә јазмаг олар. (5) тәнлији абсис охуна паралел олан дүз хәттин тәнлијидир.

3. $A\neq0$, $B=0$ вә $C\neq0$ олдугда (3) тәнлијини

$$x=-\frac{C}{A},\quad x=a \quad \left(a=-\frac{C}{A}\right) \tag{6}$$

шәклиндә јазмаг олар, бу да ордината охуна паралел дүз хәттин тәнлијидир.

4. $A\neq0$, $B\neq0$ вә $C=0$ олдугда (3) тәнлијини

$$y=-\frac{A}{B}x,\quad y=kx \quad \left(k=-\frac{A}{B}\right) \tag{7}$$

шәклиндә јазмаг олар, бу да координат башланғычындан кечән дүз хәттин тәнлијидир.

5. $A\neq0$, $B=0$ вә $C=0$ олдугда (3) тәнлијини

$$x=0 \tag{8}$$

шәклиндә јазмаг олар ки, бу да ордината охунун тәнлијидир.

6. $A=C=0$ вә $B\neq0$ олдугда (3) тәнлији абсис охунун

$$y=0 \tag{9}$$

тәнлијинә чеврилир.

§ 8. ДҮЗ ХӘТТИН ПАРЧАЛАРЛА ТӘНЛИЈИ

Координат охларынын һеч биринә паралел олмајан вә координат башланғычындан кечмәјән L дүз хәтти көтүрәк (44-чү шәкил). Дүз хәттин абсис вә ордината охларыны кәсдији нөгтәләр ујғун олараг $M(a, 0)$ вә $N(0, b)$ олсун. L дүз хәттинин тәнлијини

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

шәклиндә јазсаг, шәртә көрә $A\neq0$, $B\neq0$ вә $C\neq0$ олар.

$M(a, 0)$ вә $N(0, b)$ нөгтәләри L дүз хәтти үзәриндә јерләшдијиндән, онларын координатлары (1) тәнлијини өдәјир:

$$Aa+C=0,\quad Bb+C=0.$$

Бурадан:

$$a = -\frac{C}{A} \quad \text{вә} \quad b = -\frac{C}{B}. \qquad (2)$$

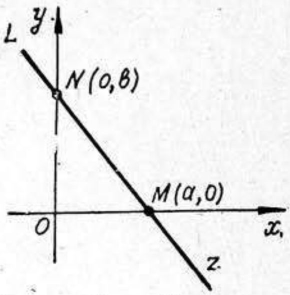
(1) тәнлијини

$$Ax + By = -C$$

шәклиндә јазараг, бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини $-C$-јә бөлсәк

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$$

вә (2) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг:



Шәкил 44

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

олар. Бу тәнлијә *дүз хәттин парчаларла тәнлији* дејилир.

(3) тәнлијиндәки a вә b әдәдләринин чох садә һәндәси мә'насы вардыр. a әдәди дүз хәттин абсис охундан ајырдығы $\overline{OM}$ парчасынын, b әдәди исә ординат охундан ајырдығы $\overline{ON}$ парчасынын гијмәтидир. Буна көрә дә дүз хәттин тәнлији (3) шәклиндә верилдикдә ону гурмаг чох асандыр.

§ 9. ДҮЗ ХӘТЛӘРИН ГАРШЫЛЫГЛЫ ВӘЗИЈЈӘТИ

Бурада мәгсәдимиз өз тәнликләри илә верилмиш ики дүз хәттин гаршылыглы вәзијјәтини: онларын кәсишмәсини, кәсишән ики дүз хәтт арасындакы бучағы, дүз хәтләрин паралел вә перпендикулјар олмасыны вә саирәни мүәјјән етмәкдир.

Бу мәгсәдлә мүстәви үзәриндә

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad (1)$$

вә

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (2)$$

тәнликләри илә тә'јин олунан ики дүз хәтт көтүрәк. Бу дүз хәтт тәнликләрини биркә һәлл етмәклә онларын кәсишмәсини вә ја кәсишмәмәсини мүәјјән етмәк олар.

1. Мә'лумдур ки,

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

системинин

$$A_1B_2 \neq A_2B_1$$

шәрти өдәнилдикдә јеканә һәлли вардыр (II, § 1). Бу һәлл (1) вә (2) дүз хәтләринин јеканә кәсишмә нөгтәсини тә'јин едир.

2. $A_1B_2 = A_2B_1, \quad B_1C_2 \neq B_2C_1, \quad A_2C_1 \neq A_1C_2$ (4)

шәртләри өдәнилдикдә исә (3) системинин һәлли јохдур. Бу көстәрир ки, (1) вә (2) тәнликләринин тә'јин етдији дүз хәтләр кәсишмир, јә'ни паралелдир.

3. $A_1B_2 = A_2B_1, \quad A_1C_2 = A_2C_1, \quad B_1C_2 = B_2C_1$ (5)

шәртләри өдәнилдикдә исә (3) системинин сонсуз сајда һәлли вардыр. Бу һалда (1) вә (2) тәнликләринин тә'јин етдији дүз хәтләр һәндәси олараг үст-үстә дүшүр.

Ики кәсишән дүз хәттин характеристикаларындан бири онларын арасындакы бучагдыр. Дүз хәтләрин тәнликләри мә'лум олдугда онларын арасында галан бучағы тә'јин етмәк олур. Доғрудан да, фәрз едәк ки, тәнликләри

$$y = \kappa_1 x + b_1 \qquad (6)$$

вә

$$y = \kappa_2 x + b_2 \qquad (7)$$

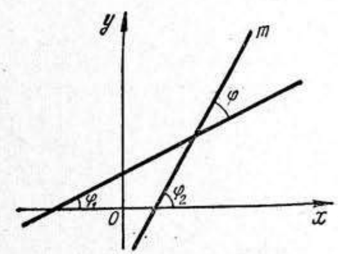
олан, ординат охуна паралел вә бир-биринә перпендикулјар олмајан ики l вә m дүз хәтти верилмишдир. Бу дүз хәтләр арасындакы φ бучағы

$$\varphi_1 + \varphi = \varphi_2$$

вә ја

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

мүнасибәтини өдәјир (45-чи шәкил). Бурадан



Шәкил 45.

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2}$$

вә $\kappa_1 = \operatorname{tg}\varphi_1$, $\kappa_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$ олдуғундан:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_2\kappa_1}. \qquad (8)$$

Дүз хәтләрин тәнликләри (1) вә (2) шәклиндә верилдикдә онлары

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1}$$

вә

$$y = -\frac{A_2}{B_2}x - \frac{C_2}{B_2}$$

1349—9

шэклиндә јазараг, араларындакы бучагы (8) дүстуру илә тә'јин етмәк олар. Бу һалда

$$\kappa_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad \text{вә} \quad \kappa_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

олдуғундан:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (9)$$

Бу дүстур, перпендикулјар олмајан истәнилән (1) вә (2) дүз хәтләри үчүн доғрудур.

(8) вә (9) дүстурларындан дүз хәтләрин паралеллик вә перпендикулјарлыг шәртләрини алмаг олар.

Тәнлији (6) вә (7) ((1) вә (2)) шәклиндә верилән ики дүз хәттин паралел олмасы үчүн $\kappa_1 = \kappa_2$ $(A_1B_2 - A_2B_1 = 0)$ мүнасибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Тәнлији (6) вә (7) ((1) вә (2)) шәклиндә верилән ики дүз хәттин перпендикулјар олмасы үчүн

$$\kappa_2 = -\frac{1}{\kappa_1} \quad (A_1A_2 + B_1B_2 = 0)$$

мүнасибәтинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Тәнлији (1) вә (2) шәклиндә олан ики дүз хәттин паралеллик шәртинә әсасән ики һалы бир-бириндән ајырмаг лазымдыр.

Паралел олан ики дүз хәтт үст-үстә дүшә дә биләр, дүшмәјә дә биләр. Паралел олан (1) вә (2) дүз хәтләри үст-үстә дүшмүрсә, онда (4) шәрти өдәнилмәлидир, јә'ни $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$ паралеллик шәртиндән башга $B_1C_2 \neq B_2C_1$ вә $A_2C_1 \neq A_1C_2$ шәртләри дә өдәнилир.

Паралел олан (1) вә (2) дүз хәтләри үст-үстә дүшүрсә, онда (5) шәрти өдәниләр, јә'ни паралеллик шәртиндән әлавә $A_1C_2 = A_2C_1$ вә $B_1C_2 = B_2C_1$ шәртләри дә өдәнилир.

§ 10. НӨГТӘДӘН ДҮЗ ХӘТТӘ ГӘДӘР ОЛАН МӘСАФӘ

Верилмиш $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндән

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (1)$$

нормал тәнлији илә верилмиш L дүз хәттинә гәдәр олан мәсафәни тапмаг үчүн (Oxy) координат системи көтүрәк. Бурада ики һал ола биләр: верилмиш M_0 нөгтәси вә координат башланғычы L

дүз хәттинин мүхтәлиф тәрәфләриндә јерләшәр, ја да M_0 нөгтәси вә координат башланғычы L дүз хәттинин бир тәрәфиндә јерләшәр.

Әввәлчә биринчи һала бахаг. Ахтарылан d мәсафәси M_0 нөгтәсиндән L дүз хәттинә ендирилмиш M_0N перпендикулјарынын узунлуғуна бәрабәрдир. Координат башланғычындан L дүз хәттинә ендирилмиш перпендикулјар истигамәтиндә l оху көтүрсәк (46-чы шәкил) $\overline{OM_0}$ парчасынын l үзәриндә проjексиjасы үчүн

$$\text{Пр}_l\,\overline{OM_0} = p + d$$

вә

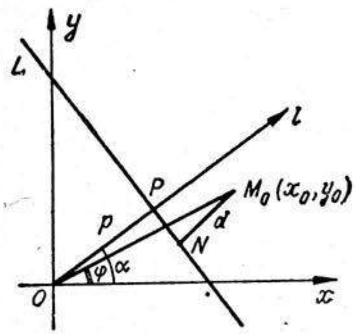
$$\text{Пр}_l\,\overline{OM_0} = |\overline{OM_0}|\cos(\alpha-\varphi) = \overbrace{|\overline{OM_0}|\cos\varphi}^{x_0}\cdot\cos\alpha + \overbrace{|\overline{OM_0}|\sin\varphi}^{y_0} \times$$
$$\times \sin\alpha = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha$$

бәрабәрликләрини аларыг. Бурадан:

$$p + d = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha$$

вә ја

$$d = x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p. \qquad (2)$$



Шәкил 46.

Верилмиш $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәси вә координат башланғычы L дүз хәттинин бир тәрәфиндә јерләшдикдә ејни мүһакимә илә

$$d = -(x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p) \qquad (3)$$

бәрабәрлијини алмаг олар.

(2) вә (3) мүнасибәтләриндән ахтарылан d мәсафәси үчүн

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p| \qquad (4)$$

дүстуруну аларыг. Бурадан ајдындыр ки, $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндән (1) дүз хәттинә гәдәр олан мәсафәни тапмаг үчүн нөгтәнин координатларыны дүз хәттин тәнлијиндә ујғун олараг x вә y әвәзинә јазыб, сол тәрәфдә алынан ифадәни мүтләг гијмәтчә көтүрмәк лазымдыр.

(4) дүстуру, L дүз хәтти координат башланғычындан кечдикдә дә доғрудур.

Нөгтәдән дүз хәттә гәдәр олан мәсафә нөгтәнин дүз хәтдән мејли илә сых әлагәдардыр.

$M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсинин L дүз хәттиндән δ мејли белә тә'јин едилир: M_0 нөгтәси вә координат башланғычы L дүз хәттинин мүхтәлиф тәрәфләриндә јерләшдикдә $\delta = +d$, M_0 нөгтәси вә координат башланғычы L дүз хәттинин бир тәрәфиндә јерләшдикдә исә $\delta = -d$ һесаб олунур.

Беләликлә,

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p$$

вә

$$d = |\delta|.$$

L дүз хәттинин тәнлији

$$Ax + By + C = 0 \tag{5}$$

шәклиндә верилдикдә, M_0 нөгтәсиндән һәмин дүз хәттә гәдәр олан мәсафәни тапмаг үчүн әввәлчә дүз хәттин (5) тәнлијини нормал шәклә салмаг, сонра да (4) дүстуруну тәтбиг етмәк лазымдыр. (5) тәнлијини нормал шәклә кәтирмәк үчүн онун һәр ики тәрәфини μ әдәдинә вурурлар:

$$A\mu x + B\mu y + C\mu = 0.$$

Бу тәнлијин нормал тәнлик олмасы үчүн

$$A\mu = \cos\alpha,$$

$$B\mu = \sin\alpha,$$

$$C\mu = -p$$

олмалыдыр. Биринчи ики бәрабәрликдән μ вуруғуну тапаг:

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}\,. \tag{6}$$

μ-нүн ишарәсини тә'јин етмәк үчүн $C\mu = -p$ бәрабәрлијиндән истифадә етмәк лазымдыр. (5) тәнлијиндә $C > 0$ оларса, (6)-да μ үчүн мәнфи ишарәси (чүнки $-p<0$), $C<0$ олдугда исә μ үчүн мүсбәт ишарәси көтүрүлмәлидир. $C=0$ олдугда исә μ-нүн ишарәси ихтијари көтүрүлә биләр.

μ әдәдинә *нормаллашдырычы вуруг* дејилир. (5) тәнлијини нормал шәклә кәтирдикдән сонра $M_0(x_0, y_0)$ нөгтәсиндән һәмин дүз хәттә гәдәр олан мәсафә

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

дүстуру илә һесабланыр.

ФӘЗАДА ДҮЗ ХӘТТ ВӘ МҮСТӘВИЛӘР

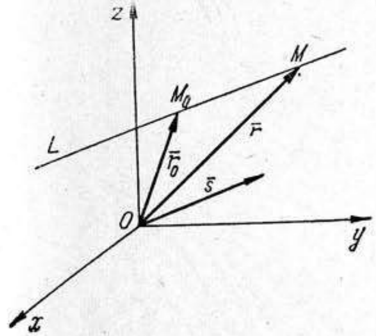
§ 1. ДҮЗ ХӘТТИН ВЕКТОРИАЛ ВӘ КАНОНИК ТӘНЛИКЛӘРИ

Фәзада дүзбучаглы $Oxyz$ Декарт координат системи вә L дүз хәтти көтүрәк (47-чи шәкил). Тутаг ки, бу дүз хәтт үзәриндә радиус-вектору $\bar r_0\,(x_0, y_0, z_0)$ олан $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нөгтәси вә һәмин дүз хәттә паралел олан $\bar s(m, n, p)$ вектору верилмишдир. $\bar s$ векторуна L дүз хәттинин истигамәтләндиричи вектору дејилир. Дүз хәтт үзәриндә јерләшән ихтијари $M(x, y, z)$ нөгтәсинин радиус-векторуну $\bar r(x, y, z)$ илә ишарә етсәк, онда $\bar r - \bar r_0$ вә $\bar s$ векторлары коллинеар олар. Буна көрә дә елә скалјар t әдәди тапмаг олар ки,

$$\bar r - \bar r_0 = t\cdot\bar s \tag{1}$$

олсун. Бурадан L дүз хәттинин

$$\bar r = \bar r_0 + t\cdot\bar s \tag{2}$$



Шәкил 47.

векториал тәнлијини аларыг.

Ајдындыр ки, M нөгтәси L дүз хәтти үзрә һәрәкәт етдикдә t параметри $(-\infty, \infty)$ интервалында (әдәд охунда) јерләшән гијмәтләр алыр.

(1) бәрабәрлијинин сол тәрәфиндәки

$$\bar r - \bar r_0 = (x - x_0)\,\bar i + (y - y_0)\,\bar j + (z - z_0)\,\bar k$$

векторунун координатларыны сағ тәрәфдәки

$$t\cdot\bar s = t\,m\,\bar i + t\,n\,\bar j + tp\,\bar k$$

векторунун ујғун координатларына бәрабәр һесаб етсәк

$$\begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn, \\ z = z_0 + tp \end{cases} \tag{3}$$

бәрабәрликләрини аларыг. (3) мүнасибәти $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндән $\bar s(m, n, p)$ истигамәтиндә кечән *L дүз хәттинин параметрик тәнлији* адланыр.

(3) бәрабәрликләриндән t параметрини јох етдикдә

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{4}$$

бәрабәрликләри алыныр. Буна *L дүз хәттинин каноник тәнлији* дејилир.

Гејд едәк ки, (4) бәрабәрликләриндәки кәсрләрин мәхрәчләри сыфырдан фәргли олдугда мә'насы вар. Әкәр кәсрләрин бирини мәхрәчи, мәсәлән, m сыфра бәрабәрдирсә һәмин кәсрин сурәти дә сыфра бәрабәр олар. Бу һалда дүз хәттин тәнлији

$$x=x_0, \quad \frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{5}$$

шәклиндә јазылыр, бу да һәмин дүз хәттин $x=x_0$ мүстәвиси үзәриндә јерләшдијини көстәрир.

$\bar{s}$ векторунун истигамәтләндиричи косинуслары *L дүз хәттинин истигамәтләндиричи косинуслары* адланыр. Һәмин косинуслары

$$\left\{\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\beta&=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\end{aligned}\right. \tag{6}$$

дүстурлары (III, § 8) илә тапмаг олар. Бурадан

$$m:n:p=\cos\alpha:\cos\beta:\cos\gamma \tag{7}$$

мүнасибәти алыныр. Истигамәтләндиричи косинусларла мүтәнасиб олан m, n, p кәмијјәтләринә *дүз хәттин фәзада бучаг әмсаллары* дејилир.

(4) дүстурундан ајдындыр ки, фәзада дүз хәттин каноник тәнлијини јазмаг үчүн онун кечдији бир нөгтәнин x_0, y_0, z_0 координатлары вә истигамәтләндиричи вектору мә'лум олмалыдыр. Әкәр дүз хәтт үзәриндә јерләшән ики $M_0(x_0, y_0, z_0)$ вә $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нөгтәләри мә'лумдурса, онда һәмин дүз хәттин истигамәтләндиричи вектору олараг

$$\bar{s}=\overline{M_0M_1}=(x_1-x_0)\bar{i}+(y_1-y_0)\bar{j}+(z_1-z_0)\cdot\bar{k}$$

векторуну көтүрмәк олар.

Бу һалда, верилмиш M_0 вә M_1 нөгтәләриндән кечән дүз хәттин тәнлијини

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

шәклиндә аларыг.

§ 2. ИКИ ДҮЗ ХӘТТ АРАСЫНДАКЫ БУЧАГ

Тутаг ки, тәнликләри ујғун олараг

$$\frac{x-x_0}{m_1}=\frac{y-y_0}{n_1}=\frac{z-z_0}{p_1} \tag{1}$$

вә

$$\frac{x-x_1}{m_2}=\frac{y-y_1}{n_2}=\frac{z-z_1}{p_2} \tag{2}$$

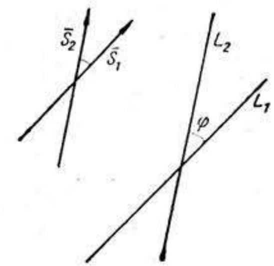
олан ики L_1 вә L_2 дүз хәтти верилмишдир (48-чи шәкил).

Бу дүз хәтләр арасындакы φ бучағы онларын истигамәтләндиричи $\bar{s}_1(m_1, n_1, p_1)$ вә $\bar{s}_2(m_2, n_2, p_2)$ векторлары арасындакы бучаға бәрабәрдир. Һәмин бучағы исә

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{s}_1, \bar{s}_2)}{|\bar{s}_1|\cdot|\bar{s}_2|}$$

вә ја

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \tag{3}$$



Шәкил 48

дүстуру илә тапмаг олар (III, § 9).

Бурадан ајдындыр ки, (1) вә (2) дүз хәтләринин перпендикулјар олмасы шәрти

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

вә ја

$$(\bar{s}_1, \bar{s}_2)=0$$

шәклиндә јазылар. Һәмин дүз хәтләрин паралел олмасы үчүн онларын истигамәтләндиричи $\bar{s}_1$ вә $\bar{s}_2$ векторлары коллинеар олмалыдыр:

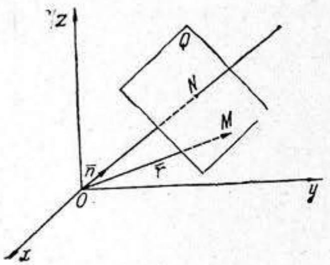
$$\bar{s}_2=\lambda\bar{s}_1$$

вә ја

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{p_2}{p_1}.$$

§ 3. МҮСТӘВИНИН ВЕКТОРИАЛ ВӘ НОРМАЛ ТӘНЛИКЛӘРИ

Тутаг ки, фәзада Q мүстәвиси верилмишдир. Координат башланғычындан мүстәвијә перпендикулјар (нормал) чәкәрәк, онун мүстәвини кәсдији нөгтәни N илә ишарә едәк (49-чу шәкил). Бу нормал үзәриндә јерләшән вә истигамәти O-дан N-ә доғру олан ваһид вектор $\bar{n}$, онун координат охлары илә әмәлә кәтирдији буҹаглар α, β, γ вә $\overline{ON}$ векторунун узунлуғу $p = |\overline{ON}|$ олсун. Мүстәви үзәриндә јерләшән ихтијари $M(x, y, z)$ нөгтәсинин $\bar{r}(x, y, z)$ радиус вектору үчүн



Шәкил 49.

$$\text{Пр}_{\bar{n}}\,\bar{r} = p \qquad (1)$$

мүнасибәти өдәниләр. Q мүстәвиси үзәриндә јерләшмәјән heч бир нөгтәнин радиус-вектору (1) бәрабәрлијини өдәмир. Демәли, (1) бәрабәрлији Q мүстәвисинин тәнлијидир.

$\text{Пр}_{\bar{n}}\,\bar{r} = (\bar{r}, \bar{n})$ олдуғундан (III, § 9) (1) бәрабәрлијини

$$(\bar{r}, \bar{n}) = p$$

вә ја

$$(\bar{r}, \bar{n}) - p = 0 \qquad (2)$$

шәклиндә јазмаг олар.

(2) бәрабәрлијинә мүстәвинин *векториал тәнлији* дејилир.

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

вә

$$\bar{n} = \bar{i}\cdot\cos\alpha + \bar{j}\cdot\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$$

олдуғундан (2) бәрабәрлијини ашағыдакы шәкилдә јазмаг олар:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (3)$$

Буна мүстәвинин *нормал тәнлији* дејилир. Әкәр мүстәви координат башланғычындан кечирсә, онда онун тәнлији

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0 \qquad (4)$$

шәклиндә олар. Демәли, фәзада верилмиш мүстәви координат башланғычындан кечмәдикдә онун тәнлији (3) шәклиндә, координат башланғычындан кечдикдә исә (4) шәклиндә олур.

Бурадан ајдындыр ки, фәзада ихтијари мүстәвинин тәнлији x, y вә z дәјишәнләринә нәзәрән бирдәрәҹәли хәтти тәнликдир:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

§ 4. МҮСТӘВИНИН ҮМУМИ ТӘНЛИЈИ

Фәзада верилмиш һәр бир мүстәвинин тәнлији x, y вә z дәјишәнләринә нәзәрән

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

шәклиндә хәтти тәнлик олдуғуну әввәлки параграфда көрдүк. Инди бунун тәрсини исбат едәк: ***(1) шәклиндә олан һәр бир хәтти тәнлик фәзада бир мүстәвини тә'јин едир.***

Доғрудан да, (1) тәнлијинин сол тәрәфини $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ вә $\bar{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ векторлары васитәсилә

$$(\bar{r}, \bar{N}) + D = 0 \qquad (2)$$

шәклиндә јазмаг олар. $\bar{N}$ векторунун узунлуғу $q = |\bar{N}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ олсун. (2) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини $\lambda D < 0$ шәртини өдәјән $\lambda = \pm q$ әдәдинә бөлсәк вә $\bar{n} = \dfrac{\bar{N}}{\lambda}$, $\dfrac{D}{\lambda} = -p$ илә ишарә етсәк, онда:

$$(\bar{r}, \bar{n}) - p = 0. \qquad (3)$$

Бу исә фәзада мүстәвинин векториал тәнлијидир (§ 3). (1) тәнлијини башга шәкилдә јазмагла (3) тәнлији алынмышдыр. Демәли, (1) тәнлији фәзада бир мүстәви тә'јин едир вә $\bar{N}(A, B, C)$, онун нормал векторудур.

(1) тәнлијинә мүстәвинин *үмуми тәнлији* дејилир.

Апардығымыз мүһакимәдән ајдындыр ки, (1) тәнлијини (3) вә ја она еквивалент олан

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

нормал тәнлик шәклинә кәтирмәк үчүн онун һәр ики тәрәфини

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (4)$$

әдәдинә вурмаг лазымдыр. Буна көрә дә (4) кәмијјәтинә мүстәви тәнлијинин *нормаллашдырыҹы вуруғу* дејилир.

Мүстәвинин (1) үмуми тәнлијиндәки A, B, C вә D әмсалларынын бир вә ја бир нечәси сыфыр олдугда, һәмин мүстәвинин верилмиш координат системинә нәзәрән нечә јерләшмәси һаггында мүәјјән фикир сөјләмәк олар.

Мәсәлән, $D = 0$ олдугда (1) мүстәвиси координат башланғычындан кечәр. Чүнки бу һалда координат башланғычы олан $O(0, 0, 0)$ нөгтәсинин координатлары һәмин тәнлији өдәјир. $A = D = 0$ олдугда исә мүстәви Ox охундан кечәр. Башга һаллары да ејни гајда илә тәдгиг етмәк олар.

§ 5. ВЕРИЛМИШ ҮЧ НӨГТӘДӘН КЕЧӘН МҮСТӘВИНИН ТӘНЛИЈИ

Тутаг ки, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ вә $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нөгтәләри верилмишдир. Бу нөгтәләрдән кечән мүстәвинин тәнлијини тапаг.

Мүстәви үзәриндә јерләшән ихтијари нөгтәни $M(x, y, z)$ илә ишарә едәк. Онда $\overline{M_1M}=\bar{r}_1(x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\overline{M_1M_2}=\bar{r}_2(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ вә $\overline{M_1M_3}=\bar{r}_3(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ векторлары һәмин мүстәви үзәриндә јерләшәр. Бу о заман олар ки, һәмин векторлар компланар олсун. Бу векторларын компланарлыг шәрти (III, § 12)

$$\bar{r}_1\ \bar{r}_2 \cdot \bar{r}_3 = 0$$

вә ја

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (1)$$

шәклиндә јазылыр. Алдығымыз тәнлик ахтарылан тәнликдир, јә'ни верилмиш M_1, M_2 вә M_3 нөгтәләриндән кечән мүстәвинин тәнлијидир.

Инди бир хүсуси һала бахаг. Тутаг ки, мүстәви $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$ вә $M_3(0, 0, c)$ нөгтәләриндән кечир. Онда онун тәнлији

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

олачагдыр. Бурадан

$$bc(x-a)+acy+abz=0,$$
$$bcx+acy+abz=abc,$$

алынан бәрабәрлијин һәр ики тәрәфини сағ тәрәфдәки abc әдәдинә бөлмәклә

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (2)$$

мүнасибәтини аларыг. (2) тәнлијинә мүстәвинин *парчаларла тәнлији* дејилир.

Мисал. $M_1(1, 0, 2)$, $M_2(-1, 2, 1)$ вә $M_3(2, 3, 4)$ нөгтәләриндән кечән мүстәвинин тәнлијини тапмалы.

(1) бәрабәрлијинә көрә һәмин мүстәвинин тәнлијини јазаг:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-2 \\ -1-1 & 2-0 & 1-2 \\ 2-1 & 3-0 & 4-2 \end{vmatrix} = 0$$

вә ја

$$7x \pm 3y - 8z \pm 9 = 0,$$

§ 6. ИКИ МҮСТӘВИ АРАСЫНДАКЫ БУЧАГ

Тәнликләри ујғун олараг

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \qquad (1)$$

вә

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \qquad (2)$$

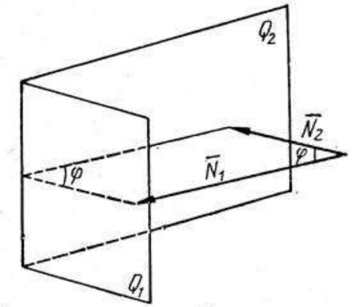
олан Q_1 вә Q_2 мүстәвиләри арасындакы бучағы тапаг. Бу мүстәвиләрин әмәлә кәтирдији икиүзлү бучағын өлчүлдүјү хәтти бучаг һәмин мүстәвиләрин

$$N_1=A_1\bar{i}+B_1\bar{j}+C_1\bar{k}$$

вә $\bar{N}_2=A_2\bar{i}+B_2\bar{j}+C_2\bar{k}$

нормаллары арасындакы бучаға бәрабәрдир (50-чи шәкил). $\bar{N}_1$ вә $\bar{N}_2$ векторлары арасындакы φ бучағы исә

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{N}_1, \bar{N}_2)}{|\bar{N}_1|\cdot|\bar{N}_2|}$$



Шәкил 50.

вә ја

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} \qquad (3)$$

дүстуру илә тә'јин олунур.

Бу дүстура әсасән (1) вә (2) мүстәвиләринин паралеллик вә перпендикулјарлыг шәртләрини мүәјјән едәк. Q_1 вә Q_2 мүстәвиләри паралел олдугда онларын нормаллары олан $\bar{N}_1$ вә $\bar{N}_2$ векторлары коллинеардыр. Бурадан һәмин мүстәвиләрин паралеллик шәртләри алыныр:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Мүстәвиләр перпендикулјар олдугда $\bar{N}_1\perp\bar{N}_2$ вә (3) дүстуруна әсасән:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

§ 7. ФӘЗАДА ДҮЗ ХӘТЛӘ МҮСТӘВИНИН ГАРШЫЛЫГЛЫ ВӘЗИЈЈӘТИ

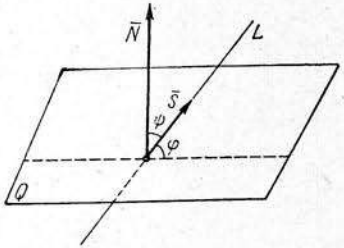
I. Тутаг ки, фәзада тәнлији

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \qquad (1)$$

олан L дүз хәтти вә тәнлији

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

олан Q мүстәвиси верилмишдир. L дүз хәттинин $\bar{s} = m\bar{i} + n\bar{j} + p\bar{k}$ истигамәтләндиричи вектору илә (2) мүстәвисинин $\bar{N} = A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}$ нормалы арасындакы бучаг ψ оларса, онда һәмин дүз хәтлә мүстәви арасындакы φ бучағыны



Шәкил 51.

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$$

мүнасибәтиндән тапмаг олар (51-чи шәкил).

Бурадан:

$$\sin\varphi = \cos\psi = \frac{(\bar{s},\ \bar{N})}{|\bar{s}| \cdot |\bar{N}|}$$

вә ја

$$\sin\varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \qquad (3)$$

Верилмиш L дүз хәттинин Q мүстәвисинә перпендикулјар олмасы онун $\bar{s}$ истигамәтләндиричи векторунун $\bar{N}$ вектору илә коллинеар олмасы демәкдир: $\bar{N} = \lambda\bar{s}$. Бурадан верилмиш L дүз хәттинин (2) мүстәвисинә *перпендикулјар олмасы шәрти* алыныр:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (4)$$

L дүз хәттинин (2) мүстәвисинә *паралел олмасы шәрти* $\varphi = 0$ вә ја (3) дүстуруна көрә

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad (5)$$

олачагдыр.

II. Верилмиш (1) дүз хәтти илә (2) мүстәвисинин кәсишмә нөгтәсини нечә тапмаг олар?

Бу мәсәләни һәлл етмәк үчүн (1) дүз хәттинин тәнлијини

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases} \qquad (6)$$

параметрик шәклиндә көтүрәк вә бу гијмәтләри (2) тәнлијиндә дәјишәнләрин јеринә јазаг:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (Am + Bn + Cp)t = 0. \qquad (7)$$

Верилмиш дүз хәтт мүстәвијә паралел олмадыгда $Am + Bn + Cp \neq 0$ олар вә (7) бәрабәрлијиндән t параметринин дүз хәтлә мүстәвинин кәсишмә нөгтәсинә ујғун јеканә t_0 гијмәтини тапа биләрик:

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}.$$

Бу гијмәти (6) бәрабәрликләриндә t-нин јеринә јазараг, дүз хәтлә мүстәвинин кәсишмә нөгтәсинин координатларыны тапарыг:

$$x'_0 = x_0 + mt_0,\ y'_0 = y_0 + nt_0,\ z'_0 = z_0 + pt_0.$$

Әкәр $Am + Bn + Cp = 0$ вә $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ бәрабәрликләри ејни заманда өдәниләрсә, онда (7) бәрабәрлијини t параметринин истәнилән гијмәти өдәјәр: $0 + 0 \cdot t = 0$. Бу һалда дүз хәтт мүстәви үзәриндә јерләшәр.

$$Am + Bn + Cp = 0 \quad \text{вә} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

олдугда исә t-нин (7) бәрабәрлијини өдәјән гијмәтини тапмаг мүмкүн дејилдир, јә'ни бу һалда верилмиш дүз хәтлә мүстәви кәсишмир.

III. Фәзада һәр бир дүз хәттә ики мүстәвинин кәсишмәси кими бахмаг мүмкүн олдуғундан, һәр бир дүз хәтти

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (8)$$

кими тә'јин етмәк олар.

(8) тәнликләриндән истәнилән λ параметри васитәсилә

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \qquad (9)$$

тәнлијини дүзәлдәк. λ-нын һәр бир гијмәтиндә (9) тәнлији мүстәви тәнлијидир. Бу мүстәвиләрин һамысы (8) дүз хәттиндән кечир ((8) системини өдәјән һәр бир нөгтәнин координатлары (9) тәнлијини дә өдәјир).

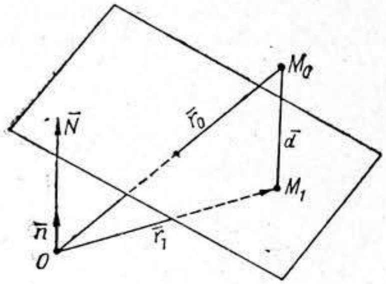
Верилмиш дүз хәтдән кечән бүтүн мүстәвиләр чохлуғуна *мүстәвиләр дәстәси* дејилир. Ајдындыр ки, (9) тәнлији (8) дүз хәттиндән кечән мүстәвиләр дәстәсинин тәнлијидир.

§ 8. НӨГТӘДӘН МҮСТӘВИЈӘ ГӘДӘР ОЛАН МӘСАФӘ

Фәзада верилмиш $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нөгтәсиндән

$$(\bar{r},\ \bar{n}) - p = 0 \qquad (1)$$

тәнлији илә верилмиш мүстәвијә гәдәр олан d мәсафәсини тапаг. Бу мәгсәдлә M_0 нөгтәсиндән мүстәвијә перпендикулјар ендирәк вә перпендикулјарын мүстәвини кәсдији нөгтәни $M_1(x_1, y_1, z_1)$ илә ишарә едәк (52-чи шәкил). M_0 нөгтәсинин радиус-вектору $\bar{r}_0$, M_1 нөгтәсинин радиус-вектору исә $\bar{r}_1$ олсун. M_1 нөгтәси (1) мүстәвиси үзәриндә јерләшдијиндән онун радиус-вектору (1) тәнлијини өдәјәр:



Шәкил 52.

$$(\bar{r}_1, \bar{n}) = p. \qquad (2)$$

Гејд едәк ки, $\bar{d} = \overline{M_1M_0}$ вектору илә мүстәвинин нормалы истигамәтиндә олан ваһид $\bar{n}$ вектору коллинеар олдуғундан, ахтарылан мәсафәни

$$d = |(\bar{d}, \bar{n})| \qquad (3)$$

шәклиндә тапмаг олар. Шәкилдән ајдындыр ки, верилмиш M_0 нөгтәси илә O координат башланғычы (1) мүстәвисинин мүхтәлиф тәрәфләриндә јерләшдикдә $\bar{d}$ вә $\bar{n}$ векторлары ејни истигамәтли, экс һалда исә мүхтәлиф истигамәтли олур. Буна көрә дә биринчи һалда $(\bar{d}, \bar{n})$ скалјар һасили мүсбәт, икинчи һалда исә мәнфидир.

$\bar{d}$ векторуну $\bar{r}_1 + \bar{d} = \bar{r}_0$ бәрабәрлијиндән тапараг, $\bar{d} = \bar{r}_0 - \bar{r}_1$ гијмәтини (3) бәрабәрлијиндә јеринә јазаг:

$$d = |(\bar{r}_0 - \bar{r}_1, \bar{n})| = |(\bar{r}_0, \bar{n}) - (\bar{r}_1, \bar{n})|.$$

(2) мүнасибәтини нәзәрә алсаг

$$d = |(\bar{r}_0, \bar{n}) - p|. \qquad (4)$$

Бу дүстуру дүзбучаглы координатларла јазмаг үчүн $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}$ вә $\bar{n} = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\cos\beta + \bar{k}\cos\gamma$ олдуғуну нәзәрә алмаг лазымдыр. Онда (4) дүстуру

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p| \qquad (5)$$

шәклини алар. Демәли, верилмиш $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсиндән (1) мүстәвисинә гәдәр олан мәсафәни тапмаг үчүн нөгтәнин координатларыны мүстәвинин ујғун нормал тәнлијиндә x, y, z әвәзинә јазыб, сол тәрәфдә алынан ифадәни мүтләг гијмәтчә көтүрмәк лазымдыр.

Мүстәвинин

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

тәнлији үмуми шәкилдә верилдикдә, ону

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

нормаллашдырычы вуруғуна вурараг, әввәлчә нормал тәнлик шәклинә кәтирмәк, сонра да (5) дүстуруну тәтбиг етмәк лазымдыр. Бу һалда

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \qquad (6)$$

дүстуруну аларыг.

Мисал. $M_0(2, 1, 3)$ нөгтәсиндән

$$3x + 4y - 5z + 2 = 0$$

мүстәвисинә гәдәр олан мәсафәни тапмалы.

(6) дүстуруна көрә

$$d = \frac{|3\cdot2+4\cdot1-5\cdot3+2|}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{3}{\sqrt{40}} = \frac{3}{2\sqrt{10}}.$$

VIII ФӘСИЛ

ИКИТӘРТИБЛИ ӘЈРИЛӘР ВӘ СӘТҺЛӘР

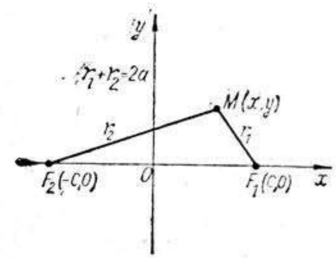
§ 1. ЕЛЛИПС

Мүстәви үзәриндә јерләшән биртәртибли чәбри хәттин дүз хәтт олдуғуну VI фәсилдә көрдүк. Орада дүз хәттин мүхтәлиф нөв тәнликләрини вә мүәјјән хассәләрини әтрафлы тәдгиг етмишик. Инди икитәртибли чәбри хәтләрин (әјриләрин) бир сыра садә нөвләрини вә үмуми тәнлијини тәдгиг едәк. Икитәртибли әјриләрин ән садә нөвү еллипсдир.

Тә'риф. *Мүстәви үзәриндә фокус адланан верилмиш ики F_1 вә F_2 нөгтәсиндән мәсафәләринин чәми сабит әдәд олан нөгтәләрин һәндәси јеринә еллипс дејилир.*

Еллипсин тәнлијини чыхармаг үчүн мүстәви үзәриндә дүзбучаглы координат системи көтүрәк вә еллипсин фокусларынын абсис оху үзәриндә координат башланғычына нәзәрән симметрик јерләшдијини фәрз едәк (53-чү шәкил). Онда еллипс үзәриндә јерләшән ихтијари $M(x, y)$ нөгтәси үчүн:

$$MF_1 + MF_2 = 2a. \qquad (1)$$



Шәкил 53.

Бурада $2a$ илә тә'рифдә көстәрилән сабит әдәд ишарә олунмушдур. $F_1F_2 = 2c$ гәбул етсәк, онда $2a > 2c$, $F_2(-c, 0)$ вә $F_1(c, 0)$

олар. Бу һалда ики нөгтә арасындакы мәсафә дүстуруна көрә

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

вә

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

(1) бәрабәрлијинә әсасән:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a. \qquad (2)$$

Бу, еллипсин ахтарылан тәнлијидир.

Еллипсин (2) тәнлијини садә шәклә кәтирмәк үчүн ону радикаллардан гуртармаг лазымдыр. Бу мәгсәдлә радикалын бирини сағa көчүрәрәк, алынан

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини квадрата јүксәлдирик:

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2,$$

$$-4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Ахырынчы бәрабәрлији јенидән квадрата јүксәлтсәк:

$$c^2x^2 + 2cxa^2 + a^4 = a^2x^2+2cxa^2 + a^2c^2 + a^2y^2,$$

$$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

вә ја

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Бурадан:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1. \qquad (3)$$

$a>c$ олдуғундан $a^2-c^2=b^2$ гәбул етмәк олар. Онда (3) тәнлији

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (4)$$

шәклиндә јазылар. (4) тәнлијинә еллипсин *каноник тәнлији* дејилир. Бу тәнлијә әсасән еллипсин формасыны араштырмаг олар.

(4) тәнлијиндән

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$$

вә бурадан

$$-a \leqslant x \leqslant a, \quad -b \leqslant y \leqslant b. \qquad (5)$$

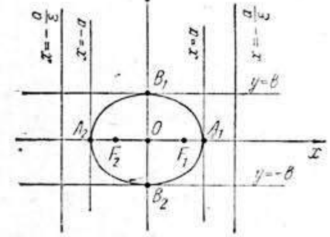
Бу көстәрир ки, еллипс әјриси (5) бәрабәрсизликләри илә тә'јин олунан дүзбучаглы дахилиндә јерләшир (54-чү шәкил).

Бундан башга $M(x, y)$ нөгтәси еллипсин үзәриндә оларса, јә'ни нөгтәнин координатлары (4) тәнлијини өдәјәрсә, онда һәмин нөгтә илә координат охларына вә координат башланғычына көрә симметрик олан $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$ вә $M_3(-x, -y)$ нөгтәләри дә еллипсин үзәриндә олар. Демәли, еллипс әјриси координат охларына нәзәрән симметрик әјридир. Буна көрә дә онун биринчи рүбдә јерләшән һиссәсини, јә'ни (4) тәнлијиндән алынан

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant a) \qquad (6)$$

функсијасынын графикини гурмаг кифајәтдир. (6) бәрабәрлијиндән ајдындыр ки, $x=a$ олдугда $y=0$ олур, $x=0$ олдугда исә $y=b$ олур. x аргументи 0-дан a-ја кими артдыгда y дәјишәни b-дән 0-а кими азалыр.

Бунлара әсасән еллипсин биринчи рүбдә јерләшән A_1B_1 гөвсү вә координат охларына нәзәрән симметрик олдуғундан бүтүн еллипс гурулур (54-чү шәкил).



Шәкил 54.

Координат охлары еллипсин симметрија охларыдыр. Еллипсин симметрија охларынын кәсишмә нөгтәсинә онун *мәркәзи* дејилир.

A_1, A_2, B_1 вә B_2 нөгтәләри еллипсин тәпәләри, A_1A_2 вә B_1B_2 парчалары исә еллипсин ујғун олараг *бөјүк* вә *кичик охлары* адланыр. Бөјүк охун узунлуғу $2a$, кичик охун узунлуғу $2b$-дир. Бә'зән a вә b әдәдләринә еллипсин ујғун олараг *бөјүк* вә *кичик јарымохлары* дејилир.

Еллипсин формасы $\frac{a}{b}$ нисбәтиндән вә ја еллипсин *екссентриситети* адланан

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

кәмијјәтиндән асылыдыр. $0<c<a$ олдуғундан $0<\varepsilon<1$ олар. $b=a$ олдугда (јә'ни $\varepsilon=0$ олдугда) (4) тәнлији

$$x^2 + y^2 = a^2$$

1349—10

кими чеврә тәнлијинә чеврилир, јә'ни еллипс a радиуслу чеврәјә чеврилир. $b=0$ олдугда (јә'ни $\varepsilon=1$ олдугда) еллипс әјриси икиләшмиш A_1A_2 парчасына (бөјүк оха) чеврилир.

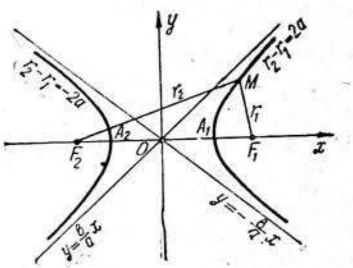
Еллипс фокусларынын јерләшдији симметрија охуна онун *фокал оху* дејилир. (4) еллипси үчүн фокал ох абсис охудур.

Еллипсин фокал охуна перпендикулјар олан $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ вә $x=\frac{a}{\varepsilon}$ дүз хәтләри онун *директрисләри* адланыр. $0<\varepsilon<1$ олдуғундан $\frac{a}{\varepsilon}>a$ олар. Демәли, еллипсин директрисләринин бири A_1 тәпәсинин сағындан, о бири исә A_2 тәпәсинин солундан кечир вә еллипси кәсмирләр.

§ 2. ҺИПЕРБОЛА

Тә'риф. *Фокус адланан верилмиш ики F_1 вә F_2 нөгтәсиндән мәсафәләринин фәрги мүтләг гијмәтчә сабит кәмијјәт олан нөгтәләрин һәндәси јеринә һипербола дејилир.*

Тә'рифдә көстәрилән сабит әдәд фокуслар арасындакы мәсафәдән кичик олмалыдыр (нијә?).



Шәкил 55.

Һиперболанын тәнлијини чыхармаг үчүн јенә дә тә'рифдә көстәрилән мүсбәт сабити $2a$, фокуслар арасындакы мәсафәни $2c$ вә фокусларын абсис оху үзәриндә координат башланғычына нәзәрән симметрик јерләшдијини гәбул едәк (55-чи шәкил). Онда тә'рифә көрә $F_1(c, o)$, $F_2(-c, o)$ вә $M(x, y)$ нөгтәләри үчүн:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

вә ја

$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Бурадан:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a. \qquad (1)$$

(1) тәнлији һиперболанын ахтарылан тәнлијидир. Бу тәнлији (§ 1) кими садәләшдирсәк, јенә дә еллипсин тәнлији

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \qquad (2)$$

мүнасибәтини аларыг. Бу һалда, $a<c$ олдуғундан $a^2-c^2=-b^2$ гәбул едәрәк (2) тәнлијини

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

шәклиндә јазмаг олар.

(3) тәнлијинә һиперболанын *каноник тәнлији* дејилир. Инди һиперболанын формасыны арашдыраг.

(3) тәнлијиндән ајдындыр ки, $y=0$ олдугда $x=\pm a$, јә'ни һипербола абсис охуну $A_1(a, 0)$ вә $A_2(-a, 0)$ нөгтәләриндә кәсир. Бу нөгтәләрә һиперболанын *тәпәләри* дејилир. $x=0$ олдугда $y^2=-b^2$, бурадан $y=\pm bi$ алыныр ки, бу да һиперболанын ординат охуну һеч бир нөгтәдә кәсмәдијини көстәрир.

Еллипс кими һипербола әјриси дә координат охларына нәзәрән симметрикдир. Буна көрә онун да биринчи рүбдә јерләшән һиссәсини гурмаг кифајәтдир.

(3) тәнлијиндән ајдындыр ки,

$$\frac{x^2}{a^2} \geqslant 1, \quad x^2 \geqslant a^2, \quad |x| \geqslant a,$$

јә'ни шагули $x=-a$ вә $x=a$ дүз хәтләри арасындакы золагда һиперболанын һеч бир нөгтәси јерләшмир. (3) бәрабәрлијиндән:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}, \quad x \geqslant a.$$

Бурада $x=a$ олдугда $y=0$ вә x аргументи a-дан башлајараг артдыгда y кәмијјәти дә артыр. Бу заман x-ин бүтүн гијмәтләриндә һәмишә

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} < \frac{b}{a}x = Y$$

бәрабәрсизлији доғрудур вә x артдыгча һипербола әјриси $Y=\frac{b}{a}x$ дүз хәттинә гејри-мәһдуд олараг јахынлашыр.

Доғрудан да,

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} =$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

олдуғундан x аргументи гејри-мәһдуд олараг артдыгда, јә'ни $x\to\infty$-да, фәрг азалараг сыфра јахынлашыр:

$$Y - y = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \to 0 \quad (x\to\infty).$$

һипербола әјрисинә гејри-мәһдуд олараг јахынлашан $y=\frac{b}{a}x$ дүз хәттинә онун *асимптоту* дејилир.

Дејиләнләрә әсасән һиперболанын биринчи рүбдә јерләшән һиссәси вә һиперболанын координат охларына нәзәрән симметрик олмасындан истифадә едәрәк, бүтүн һипербола әјриси гурулур (55-чи шәкил).

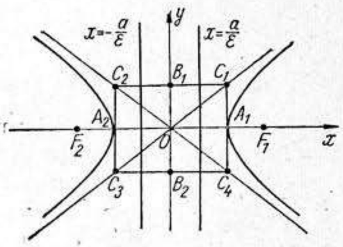
Шәкилдән ајдындыр ки, һипербола әјриси ортаг нөгтәси олмајан ики һиссәдән ибарәтдир. Һиперболанын ики асимптоту вардыр. Бу асимптотларын тәнлији:

$$y=\frac{b}{a}x$$

вә

$$y=-\frac{b}{a}x.$$

Координат охлары һиперболанын симметрија охларыдыр. Һиперболанын симметрија охларынын кәсишмә нөгтәсинә онун *мәркәзи* дејилир.



Шәкил 56.

A_1A_2 вә B_1B_2 парчаларына һиперболанын ујғун олараг *һәгиги* вә *хәјали* охлары дејилир (56-чы шәкил). Һиперболанын һәгиги охунун узунлуғу $2a$-ја, хәјали охунун узунлуғу исә $2b$-јә бәрабәрдир. a вә b әдәдләри һиперболанын ујғун олараг *һәгиги* вә *хәјали јарымохлары* адланыр.

$C_1C_2C_3C_4$ дүзбучаглысына һиперболанын *әсас дүзбучаглысы* дејилир. Бу дүзбучаглынын тәрәфләри $2a$ вә $2b$-јә бәрабәрдир. Һиперболанын асимптотлары онун әсас дүзбучаглысынын диагоналлары үзрә јөнәлмишдир. Һипербола өз әсас дүзбучаглысынын гаршы-гаршыја дуран ики C_1C_4 вә C_2C_3 тәрәфләринә тохунур. Әсас дүзбучаглы гурулдугдан сонра һиперболаны гурмаг асандыр.

Һиперболанын формасы $\frac{b}{a}$ нисбәтиндән вә ја *онун ексцентриситети* адланан

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

кәмијјәтиндән асылыдыр. $c>a$ олдуғундан $\varepsilon>1$.

$a=b$ олдугда һиперболанын тәнлији

$$x^2-y^2=a^2 \qquad (4)$$

шәклиндә јазылар. Бу һалда һиперболаја *бәрабәртәрәфли һипербола* дејилир. Бәрабәртәрәфли һиперболанын асимптотлары бир-биринә перпендикулјар олуб, симметрија охлары арасындакы бучаглары јарыја бөлүр.

Һипербола фокусларынын јерләшдији оха онун *фокал оху* дејилир.

Тәнликләри $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ вә $x=\frac{a}{\varepsilon}$ олан дүз хәтләр фокал оха перпендикулјар олуб, һиперболанын тәпәләри илә координат башланғычы арасындан кечир. Чүнки $\varepsilon>1$ олдуғундан $\frac{a}{\varepsilon}<a$. Бу дүз хәтләрә *һиперболанын директрисләри* дејилир.

Тәнликләри ујғун олараг

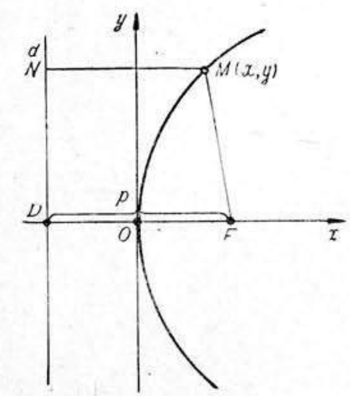
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{вә} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

олан һиперболалар *гошма һиперболалар* адланыр. Гошма һиперболаларын асимптотлары үст-үстә дүшүр. Ики һипербола гошма олдугда биринчисинин һәгиги оху икинчисинин хәјали оху вә тәрсинә, икинчисинин һәгиги оху биринчисинин хәјали оху олар.

§ 3. ПАРАБОЛА

Т ә р и ф. *Фокус адланан верилмиш F нөгтәсиндән вә директрис адланан верилмиш d дүз хәттиндән ејни узаглыгда олан нөгтәләрин һәндәси јеринә парабола дејилир.*

Параболанын тәнлијини чыхармаг үчүн F фокусунун абсис оху үзәриндә јерләшдијини вә d директрисинин һәмин оха перпендикулјар олдуғуну гәбул едәк (57-чи шәкил). Фокусла директрис арасындакы мәсафә $FD=p$ олсун. Фәрз едәк ки, координат башланғычы FD парчасынын орта нөгтәсиндә јерләшир. Онда $F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, $D\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$ вә параболанын ихтијари $M(x,\ y)$ нөгтәси үчүн:



Шәкил 57

$$MF=MN$$

вә ја

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Бурадан

$$x^2-xp+\left(\frac{p}{2}\right)^2+y^2=x^2+xp+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

вә јахуд

$$y^2=2px. \qquad (1)$$

(1) тәнлијинә параболанын *каноник тәнлији* дејилир. p кәмијјәтинә параболанын параметри дејилир. Параболанын формасыны онун (1) тәнлијинә әсасән мүәјјән етмәк олар.

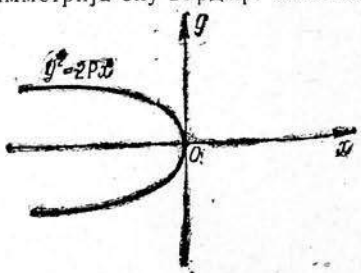
(1) тәнлијиндән ајдындыр ки, парабола әјриси координат башланғычындан кечир: $O(0, 0)$ нөгтәсинин координатлары тәнлији өдәјир. $y^2\geqslant 0$ вә $2p>0$ олдуғундан (1) тәнлијинә көрә $x\geqslant 0$, јә'ни парабола әјриси ординат охунун сағ тәрәфиндә јерләшир.

$M(x, y)$ нөгтәси параболанын үзәриндә јерләширсә, онда абсис охуна нәзәрән онунла симметрик олан $M(x, -y)$ нөгтәси дә параболанын үзәриндә јерләшәр. Бу көстәрир ки, парабола әјриси абсис охуна нәзәрән симметрикдир.

(1) тәнлијинә көрә

$$y=\pm\sqrt{2px}$$

олдуғундан x аргументи гејри-мәһдуд артдыгча $|y|$ кәмијјәти дә гејри-мәһдуд артар. Дејиләнләрә әсасән парабола әјриси гурулур (57-чи шәкил). Дедијимиз кими (1) парабола әјрисинин бир симметрија оху вардыр. O нөгтәси онун *тәпә нөгтәси*, Ox оху исә *фокал оху* адланыр.



Шәкил 58.

(1) параболасы илә ординат охуна нәзәрән симметрик олан вә абсис охунун мәнфи тәрәфинә јөнәлмиш парабола

$$y^2=-2px$$

тәнлији илә тә'јин олунар (58-чи шәкил).

$$x^2=2py$$

вә

$$x^2=-2py$$

тәнликләри илә тә'јин олунан парабола әјриләринин симметрија оху ординат охудур вә онлар абсис охуна нәзәрән симметрик јерләшмишләр.

§ 4. ЕЛЛИПС, ҺИПЕРБОЛА ВӘ ПАРАБОЛА КОНУС КӘСИКЛӘРИДИР

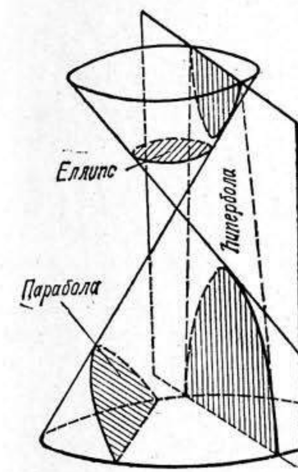
Еллипс, һипербола вә парабола әјриләринин бир сыра үмуми чәһәтләри вардыр. Онларын үчү дә икитәртибли чәбри әјриләрдир. Чүнки онларын һәр бири Декарт координат системиндә икидәрәчәли тәнликлә тәсвир олунур.

Еллипс, һипербола вә парабола әјриләри дүз даирәви конусу мүстәвиләрлә кәсдикдә дә алыныр. Буна көрә дә һәмин әјриләри *конус кәсикләри* адландырырлар.

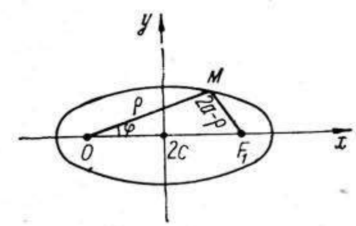
Дүз даирәви конусун тәпәсиндән кечмәјән мүстәвиләрлә кәсијинә бахаг (59-чу шәкил).

Конусун һеч бир доғуранына паралел олмајан мүстәви онун анчаг бир ојуғуну кәсирсә, онда кәсикдә еллипс әјриси алыныр. Конусун доғуранларындан биринә паралел олан мүстәви онун анчаг бир ојуғуну кәсирсә, онда кәсикдә парабола әјриси алынар. Әкәр мүстәви конусун һәр ики ојуғуну кәсирсә, онда кәсикдә һипербола әјриси алыныр.

Бу тәклифләрин һамысы аналитик һәндәсә курсунда исбат олунур.



Шәкил 59.



Шәкил 60.

Дедикләримиздән ајдындыр ки, даирәви конусун мүхтәлиф вәзијјәтләрдә олан мүстәвиләрлә кәсији еллипс, һипербола вә парабола әјриләри ола биләр.

§ 5. КОНУС КӘСИКЛӘРИНИН ПОЛЈАР КООРДИНАТ СИСТЕМИНДӘ ТӘНЛИКЛӘРИ

Конус кәсикләри олан еллипс, һипербола вә парабола әјриләринин полјар координатларда тәнлијини чыхармаг үчүн әввәлчә еллипси көтүрәк вә фәрз едәк ки, полјус онун сол фокусунда (F_2-дә) јерләшмишдир. Онун үзәриндә јерләшән истәнилән M

нөгтәсинин координатлары $\rho = OM$ вә $\varphi = \angle F_1OM$ олар (60-чы шәкил). F_1OM үчбучағына косинуслар теоремини тәтбиг етсәк:

$$(F_1M)^2 = (OM)^2 + (OF_1)^2 - 2OM\cdot OF_1\cdot\cos\varphi.$$

Еллипсин тә'рифинә көрә $F_1M = 2a-\rho$ вә $OF_1 = 2c$ олдуғундан

$$(2a-\rho)^2 = \rho^2 + (2c)^2 - 2\rho\cdot 2c\cdot\cos\varphi$$

вә ја

$$\rho = \frac{a^2-c^2}{a-c\cos\varphi}. \qquad (1)$$

$a^2-c^2=b^2$ вә $\frac{c}{a}=\varepsilon$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\rho = \frac{b^2}{a-c\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1-\frac{c}{a}\cos\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1-\varepsilon\cos\varphi}.$$

вә гыса олмасы үчүн $\frac{b^2}{a}=p$ ишарәсини гәбул етсәк, онда:

$$\rho=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \qquad (2)$$

Полјусу һиперболанын фокусларындан бириндә вә параболанын фокусунда јерләшдирәрәк ејни мүһакимә илә јохламаг олар ки, һиперболанын да, параболанын да полјар координатларда тәнлији елә һәмин (2) тәнлијидир. (2) тәнлији $\varepsilon<1$ олдугда еллипси, $\varepsilon>1$ олдугда һиперболаны ифадә едир.

p кәмијјәтинә конус кәсикләринин фокал параметри дејилир. Еллипс вә һипербола әјриләри үчүн p фокал параметри a вә b јарымохларындан

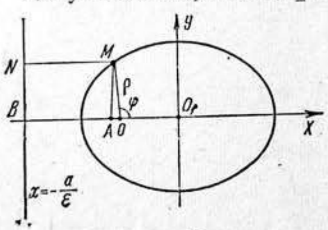
$$p=\frac{b^2}{a}$$

шәклиндә асылыдыр. Параболанын

$$y^2=2px$$

тәнлијиндәки p параметри илә онун полјар координатларда јазылмыш (2) тәнлијиндәки p параметри ејнидир.

Конус кәсикләринин үмуми бир хассәләри дә вардыр. Бу хассәни мүәјјән етмәк үчүн һәмин әјриләрин һәр һансы биринин (мәсәлән, еллипсин) үзәриндә ихтијари M нөгтәсинин јерләшән бир фокусдан (мәсәлән, сол фокусдан) вә һәмин фокуса ујғун директрисдән (сол директрисдән) олан мәсафәләрини һесаблајаг (61-чи шәкил).



Шәкил 61.

Мә'лумдур ки, еллипсин директрисләринин онун мәркәзиндән олан мәсафәси $\frac{a}{\varepsilon}$-на бәрабәрдир. Буна көрә дә $BO_1=\frac{a}{\varepsilon}$. Көстәрәк ки, сол директрисин сол фокусдан олан мәсафәси $\frac{p}{\varepsilon}$-на бәрабәрдир, јә'ни

$$OB=\frac{p}{\varepsilon}.$$

Буну исбат етмәк үчүн $p=\frac{b^2}{a}$ бәрабәрлијини

$$pa=a^2-c^2 \quad (b^2=a^2-c^2)$$

шәклиндә јазаг. Бурадан

$$pa+c^2=a^2,\quad p\cdot\frac{a}{c}+c=a\cdot\frac{a}{c}$$

вә $\varepsilon=\frac{c}{a}$ олдуғундан:

$$\frac{p}{\varepsilon}+c=\frac{a}{\varepsilon},\quad \frac{p}{\varepsilon}=\frac{a}{\varepsilon}-c.$$

$BO_1=\frac{a}{\varepsilon}$ вә $OO_1=c$ олдуғундан

$$BO=BO_1-OO_1=\frac{a}{\varepsilon}-c=\frac{p}{\varepsilon}.$$

Инди MN мәсафәсини һесабламаг олар:

$$NM=BA=BO-AO=\frac{p}{\varepsilon}-AO.$$

AO мәсафәсини AOM үчбучағындан тапмаг олар:

$$AO=\rho\cos(180^\circ-\varphi)=-\rho\cos\varphi.$$

Онда

$$NM=\frac{p}{\varepsilon}+\rho\cos\varphi. \qquad (3)$$

(2) тәнлијини

$$\rho-\rho\varepsilon\cos\varphi=p,$$

$$\rho=p+\varepsilon\rho\cos\varphi=\varepsilon\left(\frac{p}{\varepsilon}+\rho\cos\varphi\right) \qquad (4)$$

кими јазсаг вә $MN=\frac{p}{\varepsilon}+\rho\cos\varphi$, $MO=\rho$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда (4) бәрабәрлијиндән:

$$\frac{MO}{MN}=\varepsilon. \qquad (5)$$

Демәли, еллипсин истәнилән нөгтәсинин һәр һансы фокуса вә она ујғун директрисә гәдәр олан мәсафәләринин нисбәти сабит кәмијјәт олуб ε-на (екссентриситетә) бәрабәрдир. Һипербола вә парабола әјриләринин дә белә хассәси вардыр.

Беләликлә, конус кәсикләри олан еллипс, һипербола вә парабола әјриләринин ашағыдакы үмуми хассәсини аларыг: бу әјриләрин һәр биринин истәнилән нөгтәсинин фокуса вә ујғун директрисә гәдәр олан мәсафәләринин нисбәти сабит кәмијјәт олуб ε-на (һәмин әјринин екссентриситетинә) бәрабәрдир. Бу хассәни конус кәсикләринин тә'рифи дә һесаб етмәк олар: фокус адланан нөгтәдән вә директрис адланан дүз хәтдән олан мәсафәләринин нисбәти сабит кәмијјәт олан бүтүн нөгтәләрин һәндәси јеринә еллипс, һипербола вә парабола әјриләри дејилир (сабит кәмијјәт олан ε нисбәти $\varepsilon<1$ олдугда еллипс, $\varepsilon=1$ олдугда парабола вә $\varepsilon>1$ олдугда һипербола олур).

§ 6. ИКИТӘРТИБЛИ ӘЈРИЛӘРИН ҮМУМИ ТӘНЛИЈИНИН ТӘДГИГИ

1. Икитәртибли әјриләрин үмуми тәнлији верилмиш Oxy дүзбучаглы Декарт координат системиндә

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

шәклиндә јазылыр. Бу тәнликдә A, B вә C әмсалларынын үчү дә ејни заманда сыфра бәрабәр ола билмәз, чүнки әкс һалда (1) тәнлији биртәртибли олар.

Oxy координат системини өз башланғычы әтрафына α бучағы гәдәр фырламагла јени $O\tilde{x}\tilde{y}$ координат системи алсаг, онда көһнә x, y координатлары илә јени $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ координатлары арасында

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha, \\ y = \tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha \end{cases}$$

мүнасибәти олар (VI, § 1). Јени координат системиндә (1) тәнлији

$$A(\tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha)^2 + 2B(\tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha)(\tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha) + C(\tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha)^2 + 2D(\tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha) + 2E(\tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha) + F = 0$$

шәклиндә јазылар. Бу ифадәни садәләшдирмәклә

$$A_1\tilde{x}^2 + 2B_1\tilde{x}\tilde{y} + C_1\tilde{y}^2 + 2D_1\tilde{x} + 2E_1\tilde{y} + F = 0 \qquad (2)$$

тәнлијини аларыг; бурада

$$A_1 = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha, \qquad (3)$$

$$C_1 = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cdot\cos\alpha + C\cos^2\alpha, \qquad (4)$$

$$B_1 = B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (A-C)\sin\alpha\cdot\cos\alpha. \qquad (5)$$

Инди α бучағыны елә сечәк ки, B_1 әмсалы сыфра бәрабәр олсун (әлбәттә, $B\neq 0$ һесаб едирик, чүнки әкс һалда бу әмәлијјаты апармаға еһтијач олмазды). Бу мәгсәдлә α бучағыны

$$B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (A-C)\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0,$$

$$B\cos 2\alpha - \frac{A-C}{2}\sin 2\alpha = 0,$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A-C}{2B}$$

бәрабәрлијиндән тә'јин етмәк лазымдыр. $A=C$ олдугда $\cos 2\alpha = 0$ вә $\varphi = \frac{\pi}{4}$ көтүрмәк олар. Бу һалда (2) тәнлији

$$A_1\tilde{x}^2 + C_1\tilde{y}^2 + 2D_1\tilde{x} + 2E_1\tilde{y} + F = 0 \qquad (6)$$

кими садә шәкил алар.

2. Әкәр (6) тәнлијиндә A_1 вә C_1 әдәдләри сыфырдан фәрглидирсә, онда $O\tilde{x}\tilde{y}$ координат системини паралел көчүрмәклә (охларын истигамәтини дәјишмәдән) елә јени OXY координат системи ала биләрик ки, бу координат системиндә (6) тәнлији

$$A_1X^2 + C_1Y^2 + F_1 = 0 \qquad (7)$$

кими олар. Доғрудан да, (6) тәнлијини

$$A_1\left[\tilde{x}^2 + 2\frac{D_1}{A_1}\tilde{x} + \left(\frac{D_1}{A_1}\right)^2\right] + C_1\left[\tilde{y}^2 + 2\frac{E_1}{C_1}\tilde{y} + \left(\frac{E_1}{C_1}\right)^2\right] + \left[F - A_1\left(\frac{D_1}{A_1}\right)^2 - C_1\left(\frac{E_1}{C_1}\right)^2\right] = 0$$

вә ја

$$A_1\left(\tilde{x} + \frac{D_1}{A_1}\right)^2 + C_1\left(\tilde{y} + \frac{E_1}{C_1}\right)^2 + F_1 = 0$$

кими јазсаг вә

$$X = \tilde{x} + \frac{D_1}{A_1}, \quad Y = \tilde{y} + \frac{E_1}{C_1}$$

гәбул етсәк, онда (7) тәнлијини аларыг.

$A_1 = 0$ вә $C_1 \neq 0$ олдугда, (6) тәнлији $Y = \tilde{y} + \frac{E_1}{C_1}$, $X = \tilde{x}$ әвәзләмәси илә

$$C_1Y^2 + 2D_1X + F_1 = 0 \qquad (8)$$

тәнлијинә, $A_1\neq 0$ вә $C_1=0$ олдугда исә $Y=\tilde{y}$, $X=\tilde{x}+\frac{D_1}{A_1}$ әвәзләмәси илә (6) тәнлији

$$A_1X^2+2E_1Y+F_2=0 \qquad (9)$$

тәнлијинә кәтирилир.

Беләликлә, биз көстәрмиш олуруг ки, икитәртибли әјриләрин (1) үмуми тәнлијини һәмишә (7) вә ја (8), (9) тәнликләринин бири шәклинә кәтирмәк олар.

3. Ајдындыр ки, (1) тәнлијини (7) (вә ја (8) вә (9)) шәклинә кәтирмәк үчүн Oxy координат системини ардычыл олараг фырламалы вә паралел көчүрмәли олдуг. Көстәрәк ки, бу чевирмәләр заманы

$$\delta=AC-B^2 \quad \text{вә} \quad \delta_1=A+C \qquad (10)$$

кәмијјәтләри дәјишмир, јә'ни инвариант галыр.

Координат системинин паралел көчүрүлмәси заманы A, B вә C әмсаллары дәјишмәдијиндән δ вә δ_1 кәмијјәтләринин инвариант галмасы ајдындыр. Бу тәклифин координат системинин фырланмасы заманы доғру олдуғуну исбат едәк.

(3) вә (4) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә топласаг

$$A_1+C_1=A+C \qquad (11)$$

аларыг ки, бу да δ_1 кәмијјәтинин инвариант олдуғуну көстәрир.

(3) вә (4) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә чыхсаг вә алынан

$$A_1-C_1=(A-C)\cos 2\alpha+2B\sin 2\alpha$$

бәрабәрлијини квадрата јүксәлдәрәк

$$2B_1=-(A-C)\sin 2\alpha+2B\cos 2\alpha$$

бәрабәрлијинин квадраты илә топласаг

$$(A_1-C_1)^2+4B_1^2=(A-C)^2+4B^2 \qquad (12)$$

бәрабәрлијини аларыг. (11) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини квадрата јүксәлдәрәк, алынан бәрабәрликдән (12) бәрабәрлијини тәрәф-тәрәфә чыхсаг

$$A_1C_1-B_1^2=AC-B^2$$

мүнасибәтини аларыг. Демәли, координат системинин фырланмасы заманы $\delta=AC-B^2$ кәмијјәти дә инвариант галыр.

(1) тәнлији $\delta=AC-B^2$ инвариант кәмијјәтинин ишарәсинә көрә ашағыдакы нөвләрә бөлүнүр: $\delta=AC-B^2>0$ олдугда (1) тәнлијинә *еллиптик*, $\delta<0$ олдугда *һиперболик*, $\delta=0$ олдугда *параболик тәнлик* дејилир. Бу нөвләрин һәр бирини ајрылыгда тәдгиг едәк.

4. Еллиптик тәнликләр. Бу һалда (1) тәнлији (7) шәклинә кәтирилир вә $\delta=AC-B^2=A_1C_1>0$ олмалыдыр. Үмумилији

азалтмадан $A_1>0$ вә $C_1>0$ гәбул етмәк олар. Онда $H=-F_1$ гәбул етмәклә (7) тәнлијини

$$A_1X^2+C_1Y^2=H \qquad (13)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурада үч һал мүмкүндүр:

1) $H>0$. Онда (13) тәнлијини

$$\frac{X^2}{\frac{H}{A_1}}+\frac{Y^2}{\frac{H}{C_1}}=1$$

вә $a=+\sqrt{\frac{H}{A_1}}$, $b=+\sqrt{\frac{H}{C_1}}$ гәбул етмәклә

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу еллипс тәнлијидир.

Демәли, бу һалда (7) тәнлији вә буна көрә дә (1) тәнлији еллипс тә'јин едир.

2) $H<0$. Бу һалда (13) тәнлији

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1 \qquad (14)$$

тәнлијинә кәтирилир. (14) тәнлијини һеч бир нөгтәнин координатлары өдәмир. Буна көрә дә, дејирләр ки, (14) тәнлији хәјали еллипсин тәнлијидир.

3) $H=0$. Онда (13)-дән алынан

$$A_1X^2+C_1Y^2=0 \qquad (15)$$

тәнлијини анчаг $O(0, 0)$ нөгтәсинин координатлары өдәјәр. Демәли, бу һалда (15) тәнлији вә буна көрә дә (1) тәнлији анчаг бир нөгтәни тә'јин едир. Бу заман дејирләр ки, (7) вә ја (1) тәнлији чырлашмыш еллипсин тәнлијидир.

Беләликлә, һәр бир икитәртибли еллиптик тәнлик ја еллипс, ја хәјали еллипс вә јахуд да чырлашмыш еллипс тә'јин едир.

5. Һиперболик тәнликләр. $\delta=AC-B^2=A_1C_1<0$ олдуғундан (7) тәнлијиндә A_1 вә C_1 әмсаллары мүхтәлиф ишарәли олар. Үмумилији азалтмадан $A_1>0$ вә $C_1<0$ олдуғуну гәбул едәк.

Бу һалда да (7) тәнлијини (13) шәклиндә јазмаг вә H әдәдинә көрә үч һала бахмаг лазымдыр:

1) $H>0$. Онда һәмин тәнлији

$$\frac{X^2}{\frac{H}{A_1}}-\frac{Y^2}{-\frac{H}{C_1}}=1$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурада $a = +\sqrt{\frac{H}{A_1}}$ вә $b = +\sqrt{-\frac{H}{C_1}}$ гәбул етсәк, онда ашағыдакы һипербола тәнлијини аларыг:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2) $H < 0$. Бу һалда (13) тәнлијини

$$\frac{\frac{y^2}{\frac{H}{C_1}}} - \frac{X^2}{-\frac{H}{A_1}} = 1$$

шәклиндә јазараг $a = +\sqrt{-\frac{H}{A_1}}$ вә $b = +\sqrt{\frac{H}{C_1}}$ әдәдләри үчүн

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{X^2}{a^2} = 1$$

мүнасибәтини аларыг. Бу да һиперболанын каноник тәнлијидир.

3) $H = 0$. Бу заман (13) тәнлији

$$A_1X^2 + C_1y^2 = 0$$

шәклини алар. $A_1 > 0$ вә $C_1 < 0$ олдуғундан тәнлијин сол тәрәфини

$$(\sqrt{A_1}X + \sqrt{-C_1}y)(\sqrt{A_1}X - \sqrt{-C_1}y) = 0$$

кими вуруглара ајырмаг олар. Бурадан

$$\sqrt{A_1}X + \sqrt{-C_1}y = 0, \quad \sqrt{A_1}X - \sqrt{-C_1}y = 0$$

бәрабәрликләри алыныр ки, бунлар да координат башланғычында кәсишән ики дүз хәтти ифадә едир. Демәли, $H=0$ олдугда (13) тәнлији кәсишән ики дүз хәтти тә'јин едир. Бу һалда дејирләр ки, (13) тәнлији чырлашмыш һиперболаны тә'јин едир.

Нәтичәдә аларыг ки, һәр бир икитәртибли һиперболик тәнлик ја һипербола, ја да чырлашмыш һипербола (ики кәсишән дүз хәтти) тә'јин едир.

6. Параболик тәнликләр. Параболик тәнлик үчүн $\delta = AC - B^2 = A_1C_1 = 0$ олмалыдыр. Демәли, ја $A_1 \neq 0$, $C_1 = 0$, ја да $A_1 = 0$, $C_1 \neq 0$. Биз биринчи һалы тәдгиг едәк (икинчи һал аналожи гајда илә өјрәнилир).

Фәрз едәк ки, $A_1 \neq 0$ вә $C_1 = 0$. Онда (7) тәнлији (9) тәнлијинә кәтирилир:

$$A_1X^2 + 2E_1y + F_2 = 0. \qquad (9)$$

Бурада ики һал мүмкүндүр:

1) $E_1 \neq 0$. Тәнлији

$$A_1X^2 + 2E_1\left(y + \frac{F_2}{2E_1}\right) = 0$$

кими јазсаг вә $X = x'$, $y + \frac{F}{2E_1} = y'$ чевирмәсини апарсаг, онда:

$$A_1x'^2 + 2E_1y' = 0. \qquad (16)$$

Бурада A_1 вә E_1 әдәдләри мүхтәлиф ишарәли олсалар, онда (16) тәнлији

$$x'^2 = 2p'y', \quad p' = -\frac{E_1}{A_1}$$

кими јазылар ки, бу да параболанын каноник тәнлијидир. A_1 вә E_1 әдәдләри ејни ишарәли олсалар, онда јенидән $x' = x''$ вә $y' = -y''$ чевирмәсини апармагла (16) тәнлијини

$$x'' = 2p''y'', \quad p'' = \frac{E_1}{A_1}$$

шәклинә кәтирмәк олар. Алынан бу тәнлик дә параболанын каноник тәнлијидир.

Демәли, $E_1 \neq 0$ олдугда (9) тәнлији парабола тә'јин едир.

2) $E_1 = 0$. Бу һалда (9) тәнлији

$$A_1X^2 + F_2 = 0$$

шәклиндә олар. Бурадан:

$$X^2 = -\frac{F_2}{A_1}. \qquad (17)$$

A_1 вә F_2 әдәдләри мүхтәлиф ишарәли олсалар, онда (17) тәнлији ики паралел

$$X = +\sqrt{-\frac{F_2}{A_1}} \quad \text{вә} \quad X = -\sqrt{-\frac{F_2}{A_1}}$$

дүз хәтти тә'јин едир.

A_1 вә F_2 әдәдләри ејни ишарәли олсалар, онда (17) тәнлијини һеч бир нөгтәнин координатлары өдәјә билмәз. Бу һалда, дејирләр ки, һәмин тәнлик ики паралел хәјали дүз хәтти тә'јин едир.

Үмумијјәтлә $E_1 = 0$ олдугда дејирләр ки, (9) тәнлији чырлашмыш парабола тә'јин едир.

Демәли, һәр бир икитәртибли параболик тәнлик ја парабола, ја да чырлашмыш парабола тә'јин едир.

7. Әввәлки бәндләрдә апардығымыз тәдгигатлар ашағыдакы тәклифин доғру олдуғуну көстәрир:

һәр бир икитәртибли (1) тәнлији ја еллипс (ади, хәјали вә ја чырлашмыш), ја һипербола (ади вә ја чырлашмыш), ја да парабола (ади вә ја чырлашмыш) тә'јин едир.

§ 7. СӘТҺ ВӘ ОНУН ТӘНЛИЈИ

Һәндәсәдә сәтһ дә хәтт кими мүәјјән хассәни өдәјән нөгтәләрин һәндәси јери кими баша дүшүлүр. Бу хассәләри аналитик олараг ифадә етмәк үчүн фәзада дүзбучаглы $Oxyz$ Декарт координат системи көтүрүлүр.

Сәтһин ихтијари M нөгтәсинин координатларыны x, y вә z илә ишарә едәрәк, сәтһ нөгтәләринин үмуми хассәсини һәмин x, y, z кәмијјәтләри васитәсилә аналитик олараг ифадә етмәк мүмкүн олдугда сәтһин тәнлији алыныр. Беләликлә, x, y вә z координатлары васитәсилә тәнлик гурулур вә бу тәнлији анчаг һәмин сәтһин нөгтәләринин координатлары өдәјир. Буну даһа дәгиг ашағыдакы кими ифадә етмәк олар.

Тутаг ки, фәзада (s) сәтһи верилмишдир. (s) сәтһинин верилмиш координат системиндә тәнлији елә

$$F(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

тәнлијинә дејилир ки, һәмин сәтһ үзәриндә јерләшән бүтүн нөгтәләрин координатлары бу тәнлији өдәјир, сәтһ үзәриндә јерләшмәјән һеч бир нөгтәнин координатлары исә ону өдәмир. Әкәр $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсинин координатларыны (1) тәнлијинин сол тәрәфиндә x, y вә z әвәзинә јаздыгда

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

ејнилији алынырса, онда дејирләр ки, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нөгтәсинин координатлары (1) тәнлијини өдәјир.

Ајдындыр ки, һәр бир тәнлик, үмумијјәтлә, мүәјјән бир сәтһи тә'јин едән һәндәси хассәнин аналитик јазылышыдыр.

Бурада бир сыра мүстәсна һаллары нәзәрә алмаг лазымдыр. Верилмиш (1) тәнлији ола биләр ки, ади мә'нада һеч бир сәтһи тә'јин етмир вә ја анчаг бир нөгтәни тә'јин едир. Мәсәлән,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 0$$

тәнлијини һеч бир нөгтәнин координатлары өдәмир (тәнлик хәјали сәтһ тә'јин едир).

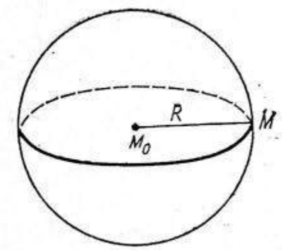
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 0$$

тәнлији анчаг M_0 (1, 3, —2) нөгтәсини тә'јин едир. Башга һеч бир нөгтәнин координатлары бу тәнлији өдәмир. (1) тәнлији (s) сәтһинин тәнлијидирсә, онда (s) сәтһи, координатлары һәмин тәнлији өдәјән нөгтәләрин һәндәси јери олар.

Демәли, верилмиш сәтһин тәнлијини тапмаг үчүн һәмин сәтһи тә'јин едән һәндәси хассәнин (x, y, z васитәсилә) дүстур шәклиндә ифадәсини тапмаг лазымдыр. Мәсәлән, мәркәзи $M_0(a, b, c)$ нөгтәсиндә олан R радиуслу сферанын тәнлији

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \qquad (2)$$

олачагдыр (62-чи шәкил). Доғрудан да, һәмин сфера $M_0(a, b, c)$ нөгтәсиндән R мәсафәдә јерләшән бүтүн $M(x, y, z)$ нөгтәләринин һәндәси јеридир: $M_0M = R$. Бу хассәнин аналитик шәкилдә ифадәси (2) тәнлији олар (бурада M_0 вә M нөгтәләри арасындакы мәсафә тапылмышдыр).



Шәкил 62.

(2) тәнлији x, y вә z дәјишәнләринә көрә икидәрәчәли тәнликдир. x, y вә z дәјишәнләринә көрә икидәрәчәли олан тәнликлә тә'јин олунан *сәтһә икитәртибли сәтһ* дејилир. Икитәртибли сәтһләрин бир сыра садә нөвләрини биз кәләчәкдә көстәрәчәјик.

Сәтһләр өз тәнликләринә көрә ики нөв ола биләр: чәбри вә транссендент сәтһләр.

Верилмиш сәтһи тә'јин едән (1) тәнлијинин сол тәрәфи x, y вә z дәјишәнләринә нәзәрән n-дәрәчәли чоһһәдли олдугда һәмин сәтһә *n-тәртибли чәбри сәтһ* дејилир. Чәбри олмајан сәтһләрә *транссендент сәтһләр* дејилир.

Чәбри сәтһләрин тәртиби Декарт координат системләринин чеврилмәсинә нәзәрән инвариант кәмијјәтдир.

Биртәртибли чәбри сәтһин үмуми тәнлији:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3)$$

Бу тәнлик исә мүстәви тә'јин едир (VII, § 4). Демәли, биртәртибли чәбри сәтһ мүстәвидир.

Гејд етмәк лазымдыр ки, фәзада һәр бир хәтт (о чүмләдән дүз хәтт) ја параметрик шәкилдә, ја да ики сәтһин кәсишмәси кими верилә биләр. Мәсәлән, $f_1(x, y, z) = 0$ вә $f_2(x, y, z) = 0$ сәтһләринин кәсишмәси олан хәтт

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

тәнликләр системи васитәсилә тә'јин едилир. Фәзада дүз хәтт исә ики мүстәвинин кәсишмәси кими тә'јин олунур.

Сәтһин тәнлијинин мә'лум олмасы онун хассәләрини тәдгиг етмәк үчүн бөјүк әһәмијјәтә маликдир. Тәнлији мә'лум олан сәтһин хассәләри аналитик методла тәдгиг олуна биләр.

1349—11

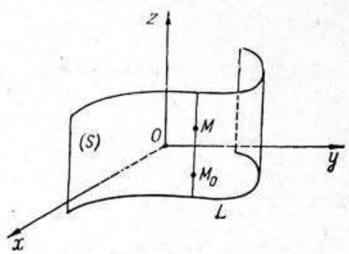
§ 8. СИЛИНДРИК СӘТҺЛӘР

Мә'лумдур ки, *верилән дүз хәттә паралел галан вә верилән L хәттини кәсән мүтәһәррик дүз хәттин чыздығы сәтһә силиндрик сәтһ* дејилир. Бу һалда L хәтти сәтһин *јөнәлдичиси*, һәрәкәт едән дүз хәттин бүтүн мүмкүн вәзијјәтләри исә сәтһин *доғуранлары* адланыр.

Әкәр верилән дүз хәтт олараг фәзада координат охларынын бирини көтүрсәк, онда доғуранлары һәмин оха паралел олан силиндрик сәтһ аларыг. Верилмиш

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

тәнлији, доғуранлары Oz охуна паралел олан силиндрик сәтһи тә'јин едир. Доғрудан да, (1) тәнлијинин тә'јин етдији сәтһи (s) илә вә онун истәнилән нөгтәсини $M_0(x_0, y_0, z_0)$ илә ишарә етсәк (63-чү шәкил), онда истәнилән $M(x_0, y_0, z)$ нөгтәси (бурада z истәнилән әдәддир) дә һәмин сәтһ үзәриндә јерләшәр (координатлары (1) тәнлијини өдәдији үчүн). Бу о демәкдир ки, M_0 нөгтәсиндән кечән вә Oz охуна паралел олан дүз хәтт тамамилә (s) сәтһи үзәриндә јерләшир, јә'ни (s) сәтһи, доғуранлары Oz охуна паралел олан силиндрик сәтһдир.



Шәкил 63.

Гејд едәк ки, (1) тәнлији Oxy мүстәвиси үзәриндә (s) сәтһинин L јөнәлдичи хәттини тә'јин едир. Бу хәттин фәза координат системинә көрә тәнлији,

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

олар. Дедикләримиздән ајдындыр ки,

$$F_1(x, z) = 0 \qquad (2)$$

тәнлији доғуранлары Oy охуна паралел олан силиндрик сәтһин,

$$F_2(y, z) = 0$$

тәнлији исә доғуранлары Ox охуна паралел олан силиндрик сәтһин тәнлијидир.

Јөнәлдичи олараг Oxy мүстәвиси үзәриндә јерләшән мүхтәлиф әјриләри көтүрмәклә мүхтәлиф силиндрик сәтһләр алмаг олар. Белә әјриләр олараг икитәртибли әјриләри көтүрмәк даһа мүнасибдир.

Еллиптик силиндр,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тәнлији илә тә'јин олунмуш вә доғуранлары Oz охуна паралел олан силиндрә дејилир. Еллиптик силиндрин јөнәлдичиси Oxy мүстәвиси үзәриндә јерләшән еллипсдир.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вә

$$y^2 = 2px$$

тәнликләри илә тә'јин олунан вә доғуранлары Oz охуна паралел олан силиндрик сәтһләрә ујғун олараг *һиперболик вә параболик силиндр* дејилир.

Еллиптик, һиперболик вә параболик силиндрләрә икитәртибли силиндрләр дејилир.

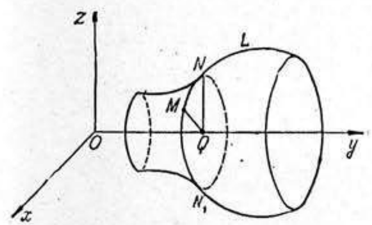
§ 9. ФЫРЛАНМА СӘТҺЛӘРИ

Фәрз едәк ки, Oyz мүстәвисинин сағ јарым һиссәси ($y > 0$) үзәриндә јерләшән вә тәнлији

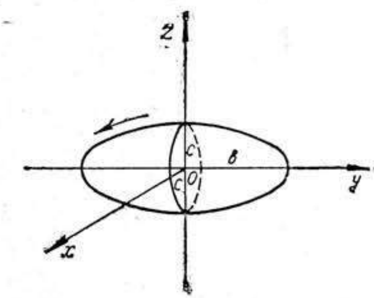
$$\begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

олан L хәтти верилмишдир. Бу хәттин Oy оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин тәнлијини тапаг.

L хәтти үзәриндә ихтијари $N(O, У, Z)$ нөгтәси көтүрәк. L хәтти Oy оху әтрафына фырланаркән онун үзәриндәки $N(O, У, Z)$ нөгтәси NMN_1 чеврәсини чызар. Бу чеврә $y = У$ мүстәвиси үзәриндәдир вә мәркәзи $Q(O, У, O)$ нөгтәсиндәдир (64-чү шәкил).



Шәкил 64.



Шәкил 65.

Һәмин чеврәнин тәнлијини тапмаг үчүн $Q(O, У, O)$ илә $N(O, У, Z)$ арасындакы $QN = Z$ мәсафәсинин чеврәнин радиусу олдуғуну вә чеврә үзәриндәки ихтијари $M(x, y, z)$ нөгтәсинин Q-дән олан

мәсафәсинин дә һәмин радиуса бәрабәр олдуғуну нәзәрә алмаг лазымдыр. Онда чеврәнин тәнлији

$$x^2 + z^2 = Z^2, \quad y = Y \tag{2}$$

олар. $N(O, Y, Z)$ нөгтәси L хәтти үзәриндә олдуғундан онун координатлары (1) тәнлијини өдәјәр:

$$f(Y, Z) = 0.$$

(2) бәрабәрлијиндәки гијмәтләри ахырынчы тәнликдә јеринә јазсаг:

$$f(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \tag{3}$$

(3) тәнлији фырланмадан алынан сәтһин тәнлијидир.

Демәли, Oyz мүстәвиси үзәриндә јерләшән L әјрисинин Oy оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин тәнлијини алмаг үчүн һәмин әјринин $f(y, z)$ тәнлијиндә z кәмијјәтини $\sqrt{x^2+z^2}$ илә әвәз етмәк лазымдыр.

Бу гајда дикәр координат охлары әтрафында фырланмадан алынан сәтһләр үчүн дә доғрудур. Oxy мүстәвиси үзәриндә јерләшән вә тәнлији $\varphi(x, y) = 0$ олан әјринин Ox оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин тәнлији

$$\varphi(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0 \tag{4}$$

олар. Һәмин әјринин Oy оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин тәнлији исә

$$\varphi(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0 \tag{5}$$

олачагдыр.

Икитәртибли әјриләрин (еллипсин, һиперболанын вә параболанын) өз симметрија охлары әтрафында фырланмасындан алынан фырланма сәтһләринин тәнлијини (3)—(5) мүнасибәтләринә әсасән тапмаг олар.

1. *Фырланма еллипсоидләри.* Oyz мүстәвиси үзәриндә јерләшән

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

еллипсинин Oy оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин (65-чи шәкил) тәнлији

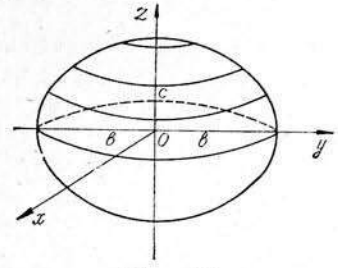
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2 + x^2}{c^2} = 1, \tag{6}$$

Oz оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин тәнлији

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

олар (66-чы шәкил).

$b > c$ олдугда (6) еллипсоидинә *узанмыш*, (7) еллипсоидинә исә *сыхылмыш фырланма еллипсоиди* дејилир. $b = c$ олдугда фырланма еллипсоидләри *сфераја* чеврилир.



Шәкил 66.

2. *Фырланма һиперболоидләри.* Oyz мүстәвиси үзәриндә јерләшән

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

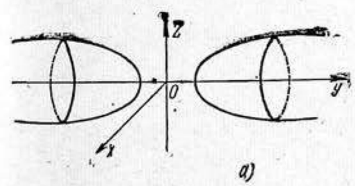
һиперболасынын Oy вә Oz охлары әтрафында фырланмасындан алынан вә тәнликләри ујғун олараг

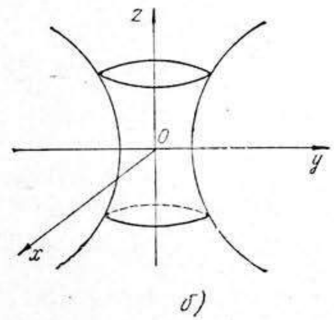
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2 + z^2}{c^2} = 1$$

вә

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

олан фырланма сәтһләринә ујғун олараг *икиојуглу* вә *бирројуглу фырланма һиперболоидләри* дејилир (67-чи шәкил, *а*, *б*).





Шәкил 67.

3. *Фырланма параболоидләри.* Oyz мүстәвиси үзәриндә јерләшән вә тәнлији

$$y^2 = 2pz$$

олан параболанын Oz симметрија оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһин тәнлији

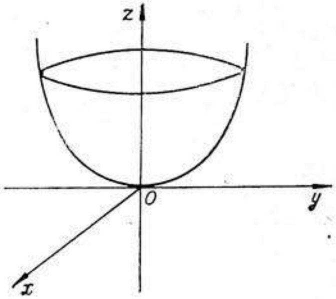
$$x^2 + y^2 = 2pz$$

олар. Бу сәтһә *фырланма параболоиди* дејилир (68-чи шәкил).

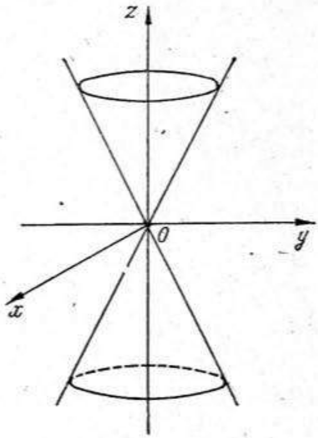
4. *Фырланма конусу.* Oyz мүстәвиси үзәриндә јерләшән вә тәнликләри

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

олан ики кәсишән дүз хәттин Oz оху әтрафында фырланмасындан алынан сәтһә *фырланма конусу* дејилир. Фырланма конусунун тәнлији



Шәкил 68.



Шәкил 69.

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

олар (69-чу шәкил).

§ 10. ИКИТӘРТИБЛИ СӘТҺЛӘРИН КАНОНИК ТӘНЛИКЛӘРИ

Икитәртибли сәтһләрин үмуми тәнлији

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + \\ + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0 \qquad (1)$$

шәклиндә јазылыр. Икитәртибли әјриләрин үмуми тәнлијини тәдгиг етдијимиз елементар үсулла (1) тәнлијини дә тәдгиг етмәк вә ону садә шәклә кәтирмәк олар. Икитәртибли сәтһләрин (1) үмуми тәнлијинин садә шәклә кәтирилмәсинин башга бир үсулуну да биз V фәслин 9-чу параграфында көстәрмишик. Орада көстәрдик ки, верилмиш координат системини елә чевирмәк олар ки, алынан јени координат системиндә (1) тәнлији

$$A_1X^2 + B_1Y^2 + C_1Z^2 + D_1 = 0 \qquad (2),$$

шәклиндә јазылар. Сонра исә A_1, B_1, C_1 вә D_1 әмсалларынын гијмәтләринә әсасән (2) тәнлијинин һансы нөв сәтһи ифадә етдијини тә'јин етмәк олур.

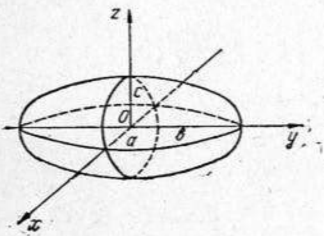
Икитәртибли сәтһләрин ашағыдакы нөвләри вардыр.

1. *Еллипсоид.* Каноник тәнлији

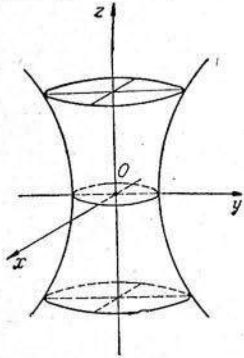
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

олан икитәртибли сәтһә *еллипсоид* дејилир (70-чи шәкил). a, b вә c әдәдләри еллипсоидин *јарымохлары* адланыр. Еллипсоидин јарымохлары мүхтәлиф олдугда она *үчохлу еллипсоид* дејилир.

Еллипсоидин һәр һансы ики јарымоху бәрабәр олдугда фырланма еллипсоиди алыныр.



Шәкил 70.



Шәкил 71.

$a=b=c$ олдугда еллипсоид сфераја чеврилир.

2. *Биројуглу һиперболоид,* каноник тәнлији

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

олан икитәртибли сәтһә дејилир (71-чи шәкил).

a, b, c әдәдләри биројуглу һиперболоидин јарымохлары адланыр. $a=b$ оларса, (4) һиперболоиди биројуглу фырланма һиперболоидинә чеврилир.

3. *Икиојуглу һиперболоид,* каноник тәнлији

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (5)$$

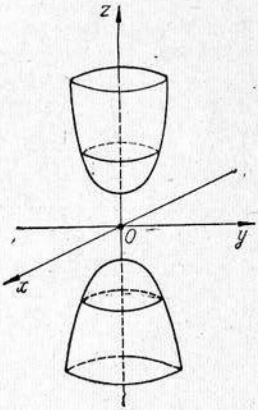
олан икитәртибли сәтһә дејилир (72-чи шәкил).

$a=b$ олдугда (5) һиперболоиди икиојуглу фырланма һиперболоидинә чеврилир.

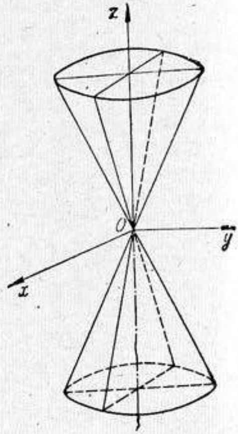
4. *Конус,* каноник тәнлији

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{6}$$

олан икитәртибли сәтһә дејилир (73-чү шәкил). Бу сәтһ координат башланғычына вә координат мүстәвиләринә нәзәрән симметрикдир. $a=b$ олдугда (6) конусу фырланма конусуна чеврилир.



Шәкил 72.

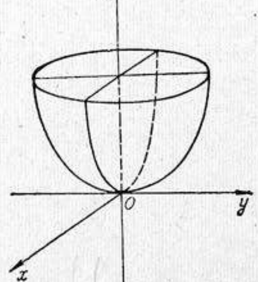


Шәкил 73.

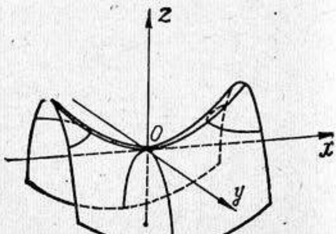
5. *Еллиптик параболоид,* каноник тәнлији

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \tag{7}$$

олан икитәртибли сәтһдир (74-чү шәкил). O нөгтәсинә еллиптик параболоидин *тәпәси*, p, q әдәдләринә исә *параметрләри* дејилир.



Шәкил 74.



Шәкил 75.

6. *Һиперболик параболоид*, каноник тәнлији

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \tag{8}$$

$$(p>0, q>0)$$

олан икитәртибли сәтһдир. Бу чох мүрәккәб сәтһдир. Онун формасыны тә'јин етмәк үчүн координат мүстәвиләринә паралел кәсикләрдән истифадә етмәк олар (75-чи шәкил).

Исбат етмәк олар ки, *һәр бир икитәртибли (1) тәнлији ашағыдакы доггуз икитәртибли сәтһдән бирини тә'јин едир: 1) еллипсоид, 2) биројуглу һиперболоид, 3) икиојуглу һиперболоид, 4) конус, 5) еллиптик параболоид, 6) һиперболик параболоид, 7) еллиптик силиндр, 8) һиперболик силиндр, 9) параболик силиндр.*

Бу тәклифин исбатыны аналитик һәндәсә курсларында тапмаг олар.

II ҺИССӘ

БИРДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАЛАРЫН ДИФЕРЕНСИАЛ ҺЕСАБЫ

IX ФӘСИЛ

ЧОХЛУГ, КӘМИЈЈӘТ ВӘ ӘДӘД

§ 1. ЧОХЛУГ

Һәр елм саһәсинин өзүнә мәхсус анлајышлары вардыр. Елмдә јени анлајышлар, мә'лум олан анлајышлар васитәсилә тә'јин (тә'риф) едилир, лакин елә анлајышлар да вардыр ки, онлара тә'риф вермәк мүмкүн дејилдир. Бунлара *әсас* вә ја *ибтидаи анлајышлар* дејилир. Әсас анлајышлар изаһ олунур вә хассәләри өјрәнилир.

Чохлуг ријазијјатын әсас анлајышларындан биридир. Ону да садә анлајышларла тә'јин етмәк мүмкүн дејилдир. Буна көрә дә чохлуға ријазијјатда тә'риф верилмир, ону анчаг изаһ едир, әсас хассә вә әламәтләрини көстәрирләр.

Ејни әламәти вә ја хассәси олан әшјалар, објектләр чохлуг тәшкил едир. Мәсәлән, бир мәктәбдә охујан шакирдләр чохлуғу, чохүзлүләр чохлуғу, там әдәдләр чохлуғу вә с.

Һәр бир чохлуг ону тәшкил едән елементләрдән ибарәтдир. Адәтән, чохлуглар бөјүк һәрфлә (A, B, X, $У$, ...), онлары тәшкил едән елементләр исә кичик һәрфлә (a, b, x, y, ...) ишарә едилир. X чохлуғу x елементләриндән тәшкил олунмушдурса, ону

$$X = \{x\}$$

шәклиндә јазырлар. Верилмиш A чохлуғу мүхтәлиф a_1, a_2, ..., a_n, ... кими елементләрдән ибарәт олдугда, ону

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$$

шәклиндә јазырлар. Чохлуг мүхтәлиф үсулла верилә биләр. Чохлуг бә'зән ону тәшкил едән елементләрин үмуми хассәсини көстәрмәклә тә'јин олунур.Мәсәлән, 2-јә бөлүнән натурал әдәдләр чохлуғу:

$$\{2, 4, ..., 2n, ...\},$$

тәк натурал әдәдләр чохлуғу:

$$\{1, 3, ..., 2n+1, ...\}$$

вә с.

Бундан сонра $\{x|...\}$ символу илә мө'тәризә дахилиндәки шагули хәттин сағ тәрәфиндә көстәрилән хассәни өдәјән бүтүн x елементләри чохлуғуну ишарә едәчәјик.

Чохлуглары мүгајисә етмәк үчүн гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг анлајышындан истифадә олунур.

Тә'риф. *X чохлуғунун һәр бир x елементинә $У$ чохлуғунун јалныз бир y елементини ујғун гојмаг мүмкүн олдугда вә бу ујғунлуг заманы $У$ чохлуғунун һәр бир y елементи X чохлуғунун јалныз бир x елементинә ујғун гојулмуш олдугда, дејирләр ки, X вә $У$ чохлуглары арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг вардыр. Елементләри арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг олан чохлуглара ејникүчлү вә ја еквивалент чохлуглар* дејилир.

X вә $У$ чохлугларынын ејникүчлү олмасы

$$X \approx У$$

шәклиндә јазылыр. Ајдындыр ки, еквивалентлик мүнасибәтинин симметриклик (јә'ни һәр бир X чохлуғунун өзүнә еквивалент олмасы: $X \approx X$), рефлексивлик ($X \approx У$ олдугда $У \approx X$) вә транзитивлик ($X \approx У$ вә $У \approx Z$ олдугда $X \approx Z$) хассәләри вардыр.

Мисал 1. $X_0 = \{1, 2, 3\}$ вә $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ чохлуглары ејникүчлүдүр:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow & \uparrow\downarrow \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}$$

Там мүсбәт әдәдләрә *натурал әдәдләр* дејилир. Натурал әдәдләр чохлуғуну

$$N = \{1, 2, ..., n, ...\}$$

илә, n-дән бөјүк олмајан натурал әдәдләр чохлуғуну исә

$$N_n = \{1, 2, ..., n\}$$

илә ишарә едәк.

Тә'риф. *$X \sim N_n$ мүнасибәтини өдәјән n әдәди олдугда X чохлуғуна сонлу чохлуг* дејилир. Демәли, сонлу чохлуг сонлу сајда елементләрдән тәшкил олунмушдур. Сонлу чохлуғун елементләрини көстәрмәк мүмкүн олдуғундан, ону

$$A = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{вә ја} \quad A = \{a_1, a_2, a_3\}$$
$$X = (1, 2, 4, 5, 6) \quad \text{вә ја} \quad X = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

вә с. кими јазырлар. Ајдындыр ки, һәр бир сонлу чохлуғун елементләринин сајы натурал әдәдлә ифадә олунур.

Т ә'р и ф. *Сонлу олмајан чохлуға, јә'ни елементләринин сајы һеч бир натурал әдәдлә ифадә олуна билмәјән чохлуға сонсуз чохлуг* дејилир. Мәсәлән,

$$X = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \right\}$$

сонсуз чохлугдур. Бә'зән, сонсуз чохлуғун елементләри «сонсуз сајдадыр» кими дә дејирләр.

Натурал әдәдләр чохлуғу илә ејнијүчлү олан чохлуға һесаби чохлуг дејилир. Беләликлә, һесаби $X = \{x\}$ чохлуғу илә $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ чохлуғу арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг јаранаркән, n әдәдинә X чохлуғунун ујғун олан елементини x_n илә ишарә етмәк олар. Онда X чохлуғунун бүтүн елементләри натурал әдәдләрлә нөмрәләнмиш олур. Буна көрә дә чох заман, бүтүн елементләрини натурал әдәдлә нөмрәләмәк мүмкүн олан сонсуз чохлуға *һесаби чохлуг* дејилир.

Һесаби олмајан сонсуз чохлуға *гејри-һесаби* (вә ја *һесаби олмајан) чохлуг* дејилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, ејникүчлү олан ики сонлу чохлуғун елементләринин сајы бәрабәрдир. Белә тәклиф «мүәјјән мә'нада» сонсуз чохлуглар үчүн дә доғрудур. Мәсәлән, ејникүчлү олан $X = \{n^2\}$ вә $У = \{2n\}$ сонсуз чохлугларынын елементләри ејни «сајдадыр», лакин онларын елементләринин «сајыны» ифадә едән натурал әдәд јохдур.

Верилмиш x_0 елементинин X чохлуғуна дахил олмасы $x_0 \in X$, дахил олмамасы исә $x_0 \overline{\in} X$ шәклиндә јазылыр.

Т ә'р и ф. *X чохлуғунун һәр бир x елементи У чохлуғунун да елементи олдугда (јә'ни $x \in X \to x \in У$) X-ә У-ин алтчохлуғу (вә ја алтһиссәси) дејилир вә $X \subset У$ шәклиндә јазылыр.*

Т ә'р и ф. *$X \subset У$ вә $У \subset X$ олдугда, X вә У чохлугларына бәрабәр чохлуглар дејилир вә $X = У$ шәклиндә јазылыр.*

X вә У чохлугларынын һеч олмаса биринә дахил олан бүтүн елементләр чохлуғуна һәмин чохлугларын бирләшмәси вә ја чәми дејилир вә $X \cup У$ шәклиндә јазылыр:

$$X \cup У = \{x \mid x \in X \text{ вә ја } x \in У\}.$$

Сонлу сајда $X_к$ $(к = 1, 2, \ldots, n)$ чохлугларынын бирләшмәси $\bigcup_{к=1}^{n} X_к$ шәклиндә јазылыр вә $\bigcup_{к=1}^{n} X_к = \{x \mid x \in X_к,$ $к$-нын һеч олмаса бир $1 \leqslant к \leqslant n$ гијмәтиндә$\}$ кими тә'јин едилир. Һесаби сајда $X_к$ $(к = 1, 2, \ldots)$ чохлугларынын бирләшмәси исә $\bigcup_{к=1}^{\infty} X_к = \{x \mid x \in X_к$, $к$-нын һеч олмаса бир $к = 1, 2, \ldots$ гијмәтиндә$\}$ кими тә'јин олунур.

Мисал 2. $X = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ вә $У = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ чохлугларынын чәмини јазаг:

$$X \cup У = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}.$$

Мисал 3. Истәнилән X чохлуғу үчүн

$$X + X = X,$$
$$X + X + X = X \text{ вә с. олар.}$$

Гејд едәк ки, чохлуг вериләркән ону тәшкил едән елементләрин һансы ардычыллыгла дүзүлмәси нәзәрә алынмыр.

Т ә'р и ф. *X чохлуғунун У чохлуғуна дахил олмајан бүтүн елементләриндән дүзәлмиш чохлуға һәмин чохлугларын тоположи фәрги дејилир* вә $X \setminus У$ (вә ја $X - У$) шәклиндә ишарә олунур:

$$X \setminus У = \{x \mid x \in X, \ \ x \overline{\in} У\}$$

$У \subset X$ олдугда $X \setminus У$ фәргинә У чохлуғунун X чохлуғунда (вә ја X чохлуғуна гәдәр) тамамлајычысы дејилир вә СУ (вә ја $C_x У$) илә ишарә олунур.

X вә У чохлугларынын һәр икисинә дахил олан (онларын ортаг елементләри олан) бүтүн елементләрдән дүзәлмиш чохлуға һәмин чохлугларын кәсишмәси вә ја һасили дејилир вә $X \cap У$ шәклиндә јазылыр:

$$X \cap У = \{x \mid x \overline{\in} X, \ \ x \in У\}.$$

Сонлу сајда $X_к$ $(к = 1, 2, \ldots, n)$ чохлугларынын кәсишмәси $\bigcap_{к=1}^{n} X_к$ илә көстәрилир вә

$\bigcap_{к=1}^{n} X_к = \{x \mid x \in X_к$ $к$-нын бүтүн $1 \leqslant к \leqslant n$ гијмәтләриндә$\}$ кими тә'јин едилир. Аналожи олараг

$\bigcap_{к=1}^{\infty} X_к = \{x \mid x \in X_к$ $к$-нын бүтүн $к = 1, 2, \ldots$ гијмәтләриндә$\}$.

Мисал 4. Истәнилән X чохлуғу үчүн

$$X \cap X = X,$$
$$X \cap X \cap X = X \text{ вә с. олар.}$$

Мисал 5. $X = \{1, 2, 4, 5, 6\}$ вә $У = \{1, 2, 3, 4, 8\}$ чохлуглары үчүн $X \setminus У = \{5, 6\}$ вә $X \cap У = \{1, 2, 4\}$.

§ 2. ЧОХЛУГЛАР ҺАГГЫНДА ТЕОРЕМЛӘР

Тутаг ки, $A = \{a\}$ һесаби чохлугдур. Онун елементләрини натурал әдәдләрлә нөмрәләмәк олар:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

Бу чохлуг чох заман $A = \{a_n\}$ кими дә јазылыр.

Т е о р е м 1. ***Һесаби A чохлуғунун истәнилән сонсуз B алтһиссәси дә һесаби чохлугдур.***

И с б а т ы. A чохлуғунун B-јә дахил олан ән кичик индексли һәдди a_{n_1} олсун. Нөмрәси n_1-дән бөјүк олан һәдләр ичәрисиндә

B-jə дахил олан ән кичик нөмрәли һәдди a_{n_2} $(n_2 > n_1)$ илә ишарә едәк. Бу просеси давам етдирсәк

$$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_к}, ...\} = \{a_{n_к}\}$$

аларыг ки, бу да $B \sim N$ олдуғуну көстәрир.

Теорем 2. ***Сонлу вә ја һесаби сајда һесаби чохлугларын бирләшмәси һесаби чохлугдур.***

Исбаты. Тутаг ки, $A_1, A_2, ..., A_m$ верилмиш һесаби чохлуглардыр. Онлары

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, ...\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ...\}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$A_m = \{a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}, ...\}$$

шәклиндә јазсаг $A = \bigcup\limits_{к=1}^{m} A_к$ чохлуғунун елементләрини

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{41}, ...$$

кими нөмрәләмәк олар. Бурадан $A \sim N$ олмасы ајдындыр.

Һесаби сајда $A_1, A_2, ..., A_m, ...$ чохлугларынын бирләшмәсинин бүтүн елементләрини дә һәмин гајда илә нөмрәләмәк олар.

Инди сонсуз онлуг кәсрләр чохлуғуна бахаг. Тутаг ки, a һәр һансы там әдәд, a_i $(i = 1, 2, ...)$ исә $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ шәртләрини өдәјән ихтијари там әдәдләрдир.

$\alpha = a, a_1 a_2 ... a_n ...$ шәклиндә ифадәјә *сонсуз онлуг кәср* дејилир.

Теорем 3. ***Бүтүн сонсуз онлуг кәсрләр чохлуғу гејри-һесабидир.***

Исбаты. Бүтүн сонсуз онлуг кәсрләр чохлуғуну $A = \{\alpha\}$ илә ишарә едәк. A-нын гејри-һесаби олмасыны исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк. Тутаг ки, онун бүтүн α елементләрини натурал әдәдләрлә нөмрәләмәк олар:

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ..., \qquad (1)$$

бурада

$$\alpha_к = a^{(к)}, a_1^{(к)}, a_2^{(к)} ... a_n^{(к)} ...$$
$$(к = 1, 2, ...).$$

Инди $b_к \neq a_к^{(к)}$ вә $0 \leqslant b_к \leqslant 9$ $(к = 1, 2, ...)$ шәртләрини өдәјән там $b_к$ әдәдләри сечәк вә ихтијари там b әдәдини көтүрәрәк

$$\beta = b, b_1 b_2 ... b_n ... \qquad (2)$$

сонсуз онлуг кәсрини јазаг.

Ихтијари $к$ үчүн $b_к \neq a_к^{(к)}$ олмасындан ајдындыр ки, (2) сонсуз онлуг кәсри (1) кәсрләринин сырасында јохдур. Бу исә фәрзијјәмизә зиддир. Демәли, A чохлуғу гејри-һесабидир.

§ 3. КӘМИЈЈӘТ ВӘ ОНУН ӨЛЧҮСҮ

Тәбиәти өјрәнән һәр бир елмин өзүнә мәхсус сәчијјәви кәмијјәтләри вардыр. Мәсәлән, истилик тутуму, мүгавимәт, тә'чил вә с. физики кәмијјәтләрдир, парчанын узунлуғу, саһә, һәҹм вә с. исә һәндәси кәмијјәтләрдир.

Бу кәмијјәтләрин һамысы үчүн бир сәчијјәви ҹәһәт вардыр: *һәр бир кәмијјәт өз ҹинсиндән (нөвүндән) олан өлчү ваһиди илә өлчүлә билир.* Һәр бир өлчмә просесинин нәтиҹәси, бахылан кәмијјәтин өлчү ваһидинә нисбәтини көстәрән адсыз бир әдәдлә ифадә олунур. Бу әдәдә верилмиш кәмијјәтин *әдәди гијмәти* (вә ја садәҹә олараг *гијмәти*) дејилир. Демәли, *һәр бир әдәдә өлчмә нәтиҹәси* кими бахмаг олар.

Кәмијјәтин ифадә олундуғу өлчү ваһидинә онун *өлчүсү* дејилир. Мәсәлән, узунлуг сантиметр (*см*) вә ја метрлә (*м*) ифадә олундуғу үчүн сантиметр вә ја метр узунлуг кәмијјәтинин өлчүсүдүр. Квадрат сантиметр ($см^2$) вә ја квадрат метр ($м^2$) исә саһә өлчүсүдүр. Килограм күтлә өлчүсүдүр.

Анҹаг ejни өлчүсү олан кәмијјәтләри топламаг вә чыхмаг олар. Бу һалда ҹәмин (вә фәргин) өлчүсү топлананларын өлчүсүнүн ejни олар. Мүхтәлиф өлчүлү кәмијјәтләри исә һәмишә вурмаг вә бөлмәк олар. Бу һалда гисмәтин өлчүсү бөлүнәнин өлчүсүнүн бөләнин өлчүсүнә нисбәтинә, һасилин өлчүсү исә вуругларын өлчүләри һасилинә бәрабәр олар.

Ријазијјатда әсасән өлчүсүз, адсыз кәмијјәтләрә бахылыр. Ejни өлчүлү ики кәмијјәтин нисбәти өлчүсүз кәмијјәтдир.

Ријазијјат елминин өјрәндији өлчүсүз кәмијјәтләрин—адсыз әдәдләрин «өлчү ваһиди» 1 әдәдидир.

Демәли, ријазијјатда кәмијјәтләрин һеч бир физики мә'на вә кejфијјәтләри нәзәрә алынмыр, онлара абстрактлашдырылараг, үмумијјәтлә, бир ријази кәмијјәт кими бахырлар. Буна көрә дә ријазијјатда һәмишә символик олараг һәр һансы һәрфлә (a, b, x, y, ...) ишарә олунмуш абстракт (адсыз) кәмијјәтләрдән данышылыр. Беләликлә, јаранмыш ријази нәзәријјәләр исә мүхтәлиф тәбиәтли кәмијјәтләрин тәдгигиндә һәр заман тәтбиг олуна билир. Ријазијјатын да бир елм кими үстүнлүјү, универсаллығы, инсанларын әмәк фәалијјәтинин бүтүн саһәләринә мүвәффәгијјәтлә тәтбиг олунмасындадыр.

Бир сыра буржуа алимләри ријазијјатын абстрактлығы хүсусијјәтиндән истифадә етмәклә ону идеалистҹәсинә изаһ едирләр. Һалбуки, бу абстрактлыг ријазијјатын мәзмун вә инкишафыны диалектик-материалистҹәсинә анламаг лазым кәлдијини көстәрир. В. И. Ленин дејир: «Тәфәккүр конкретдән абстракта јүксәлиркән... һәгигәтдән узаглашмајыб, она јахынлашыр. *Материја,*

тәбиәт *гануну* абстраксијасы, ... вә и. а. абстраксијасы; бир сөзлә бүтүн елми абстраксијалар (чәфәнк абстраксијалар дејил, дүзкүн, чидди абстраксијалар) тәбиәти даһа дәрин, даһа дүзкүн, даһа долғун әкс етдирир». «Чанлы сејрдән абстракт тәфәккүрә вә бундан практикаја — *һәгигәти* дәрк етмәјин, објектив реаллығы дәрк етмәјин диалектик јолу беләдир»*.

Ријази кәмијјәтләр ики нөв — сабит вә дәјишән олур.

Һәмишә (јахуд да, мүәјјән просес дөврүндә) ејни бир әдәди гијмәти олан кәмијјәтә *сабит кәмијјәт*, мүхтәлиф әдәди гијмәтләр ала билән кәмијјәтләрә исә *дәјишән кәмијјәт* дејилир. Ајдындыр ки, сабит кәмијјәтә һәмишә ејни бир әдәди гијмәт алан дәјишән кәмијјәт кими дә бахмаг олар.

Истәнилән чеврә узунлуғунун өз диаметринә нисбәти олан кәмијјәт ($\pi = 3{,}1415926535...$), Евклид мүстәвиси үзәриндә бүтүн үчбучагларын дахили бучагларынын чәми олан 180° кәмијјәти, 5 әдәди вә с. сабит кәмијјәтдир. Сабит кәмијјәтләрин өзләрини дә ики синфә бөлмәк олар. Бүтүн просесләр заманы (јә'ни һәмишә) ејни бир гијмәти олан кәмијјәтә *мүтләг сабит кәмијјәт* (мәсәлән, 15, π вә с.), мүхтәлиф просесләр дөврүндә мүхтәлиф сабит әдәди гијмәтләри олан кәмијјәтләрә (бу кәмијјәтин һәр просес дөврүндә гијмәти сабитдир) *параметр* дејилир. Верилмиш чеврә үзрә кәсилмәдән (фасиләсиз) фырланан һәр һансы нөгтәнин кетдији мәсафә дәјишән кәмијјәтә мисал ола биләр. Тәбиәтдә дәјишән кәмијјәтләр истәнилән гәдәрдир.

§ 4. ҺӘГИГИ ӘДӘДЛӘР ЧОХЛУҒУ

Һәгиги әдәдләр али ријазијјатын әсасыны тәшкил едир; онлар гәдимдән инсанларын һәјат тәләбаты вә еһтијачы нәтичәсиндә јаранмышдыр.

«Истәр әдәд анлајышы, истәрсә фигур анлајышы башга халис тәфәккүрдән әмәлә кәлмәмиш, анчаг харичи аләмдән көтүрүлмүшдүр»**.

«Бүтүн башга елмләр кими, ријазијјат да инсанларын әмәли тәләбатларындан: торпаг саһәләрини вә габларын тутумуну өлчмәкдән, вахтын һесабланмасындан вә механикадан әмәлә кәлмишдир»***.

Инсанлар илк дәфә натурал әдәдләрдән истифадә етмишләр. Натурал әдәдләр чохлуғунда топлама вә вурма әмәлләри һәмишә апарыла биләр: истәнилән ики натурал әдәдин чәми вә һасили јенә дә натурал әдәддир. Лакин натурал әдәдләр чохлуғунда чыхма вә бөлмә әмәлләри һәмишә апарыла билмир. Ики натурал әдәдин фәрги вә нисбәти натурал әдәд олмаја да биләр. Буна көрә дә натурал әдәдләр чохлуғуна јени әдәдләр (сыфыр,

* В. И. Ленин. «Фәлсәфә дәфтәрләри», Азәрнәшр, 1964, сәһ. 171.
** Ф. Енкелс. «Анти-Дүринг», Азәрнәшр, 1953, сәһ. 34.
*** Јенә орада.

там мәнфи әдәдләр, мүсбәт вә мәнфи кәсрләр) әлавә едәрәк, ону кенишләндирмәк зәрурijјәти гаршыја чыхмышдыр. Беләликлә, $R = \{r\}$ расионал әдәдләр чохлуғу јаранмышдыр. R чохлуғу мәнфи вә мүсбәт ишарәли бүтүн там әдәдләрдән, кәсрләрдән вә сыфырдан тәшкил олунмушдур. Мә'лумдур ки, һәр бир расионал r әдәди p вә q кими ики там әдәдин нисбәти $r = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ шәклиндә көстәрилир.

Теорем. ***Бүтүн расионал әдәдләр чохлуғу һесабидир.***

Исбаты. $\frac{p}{\kappa}$ $(p = 1, 2, ...)$ шәклиндә олан бүтүн расионал кәсрләр чохлуғуну E_κ илә ишарә едәк. E_κ һесаби чохлугдур. Ајдындыр ки, һәр бир мүсбәт расионал әдәд E_κ $(\kappa = 1, 2, ...)$ чохлугларынын һеч олмазса бирисинә дахилдир. Һесаби сајда һесаби E_κ чохлугларынын (§ 2, теорем 2) бирләшмәси $\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} E_\kappa$ һесаби олдуғундан бүтүн мүсбәт расионал әдәдләр чохлуғу һесабидир. Бурадан мәнфи расионал әдәдләр чохлуғунун вә бүтүн расионал әдәдләр чохлуғунун һесаби олмасы ајдындыр.

Сонралар ријазијјатын инкишафы көстәрмишдир ки, узунлуғун өлчүлмәси, тәнликләрин һәлл едилмәси вә с. кими чох садә мәсәләләрин һәлли расионал әдәдләр чохлуғунда мүмкүн дејилдир. Буна көрә дә расионал әдәдләр чохлуғуна јени әдәдләр әлавә едиләрәк ону кенишләндирмәк зәрурijјәти гаршыја чыхмышдыр. Беләликлә, расионал әдәдләр (R чохлуғу) вә јени дахил едилән (вә иррасионал әдәдләр адланан) әдәдләр бирликдә һәгиги әдәдләр чохлуғуну әмәлә кәтирир. Иррасионал әдәдләр чохлуғуну I вә һәгиги әдәдләр чохлуғуну H илә ишарә едәк, онда:

$$H = R \cup I.$$

Иррасионал әдәдләрин бир-биринә еквивалент бир чох тә'рифләри вардыр. Бу тә'рифләрин һәр биринә әсасланараг һәгиги әдәдләр нәзәријјәси гурулур вә бу нәзәријјә елми шәкилдә әсасландырылыр.

Ријазијјатда һәгиги әдәдләрин Дедекинд[1], Кантор[2], Вејерштрасс[3] вә б. нәзәријјәләри вардыр.

Биз бурада һәгиги әдәдләрә сонсуз онлуг кәср кими тә'риф верәрәк, һәгиги әдәдләр нәзәријјәсини гурмағын мүмкүн олдуғуну гысача шәрһ едәчәјик.

[1] Рихард Дедекинд (1831—1916) алман ријазијјатчысыдыр.
[2] Мүасир чохлуглар нәзәријјәсинин баниси олан Кеорг Кантор (1845—1918) мәшһур алман ријазијјатчысыдыр.
[3] Карл Вејерштрасс (1815—1897) мәшһур алман ријазијјатчысыдыр.

1349—12

Тутаг ки, a ихтијари там эдэд вэ $a_1, a_2, \dots$ эдэдлэри $0 \leqslant a_k \leqslant 9$ ($k = 1, 2, \dots$) шэртини өдэјэн там эдэдлэрдир.

Мэ'лумдур ки,

$$a, a_1 \, a_2 \dots a_n \dots$$

шэклиндэ ифадэјэ *сонсуз онлуг кэср* дејилир.

Т э'р и ф. *Һэр бир сонсуз онлуг*

$$\alpha = a, a_1 \, a_2 \dots a_n \dots \tag{1}$$

кэсринэ һэгиги эдэд дејилир. а эдэдинэ һэгиги α эдэдинин там һиссэси дејилир.

(1) кэсринин һэр һансы n-дэн сонра кэлэн рэгэмлэри сыфра бэрабэр, јэ'ни $a_k = 0$ ($k = n+1, n+2, \dots$) олдугда, она *сонлу онлуг кэср* дејилир вэ

$$\alpha_n = a, a_1 \, a_2 \dots a_n \tag{2}$$

шэклиндэ көстэрилир. Ајдындыр ки, һэр бир сонлу (2) онлуг кэсри бир расионал эдэд ифадэ едир:

$$\alpha_n = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n}.$$

Бу расионал эдэди, јэ'ни (2) сонлу онлуг кэсрини (1) эдэдинин *ашағы јахынлашмасы* (кичик галмагла она јахынлашан),

$$\alpha_n^* = \alpha_n + \frac{1}{10^n}$$

расионал эдэдини исэ (1) эдэдинин *јухары јахынлашмасы* (бөјүк олараг она јахынлашан) адландыраг.

Инди һэгиги эдэдлэр үзэриндэ эмэллэри вэ һэгиги эдэдлэрин мүгајисэ олунма гајдасыны изаһ едэк.

Ики һэгиги

$$\alpha = a, a_1 \, a_2 \dots a_n \dots$$

вэ

$$\beta = b; b_1 \, b_2 \dots b_n \dots \tag{3}$$

эдэдлэринин там һиссэлэри вэ ујғун онлуг рэгэмлэри бэрабэр, јэ'ни

$$a = b, \quad a_n = b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

олдугда, онлара бэрабэр һэгиги эдэдлэр дејилир вэ $\alpha = \beta$ кими јазылыр.

Бундан башга, ашағыдакы һалда да ики һэгиги эдэд бэрабэр һесаб едилир. α эдэдинин дөврүнү тэшкил едэн 9 рэгэмлэринин һамысыны сыфырла, бүтүн 9 рэгэмлэринин билаваситэ габағында дуран рэгэми ваһид гэдэр артырдыгда алынан β эдэди α-ја бэрабэр һесаб едилир. Башга сөзлэ,

$$a = a, a_1 \, a_2 \dots a_m \, (9)$$

вэ

$$\beta = a, a_1 \, a_2 \dots a_m \, (0) + \frac{1}{10^m}$$

эдэдлэри бэрабэр һесаб едилир.

Һэгиги эдэдлэри мүгајисэ едэркэн сонлу онлуг кэсри дөврү сыфырлар олан сонсуз онлуг кэср һесаб етмэк лазымдыр. Мэсэлэн,

$$\frac{3}{10} = 0{,}300\dots = 0{,}3\,(0)$$

вэ

$$\frac{3}{10} = 0{,}299\dots = 0{,}2\,(9)$$

эдэдлэри бэрабэрдир.

Верилмиш (1) вэ (3) эдэдлэри үчүн

$$\alpha_n > \beta_n^*$$

бэрабэрсизлијинин өдэнилдији һэр һансы $n \geqslant 0$ олдугда, дејирлэр ки, α эдэди β эдэдиндэн бөјүкдүр: $\alpha > \beta$.

Һэр бир α эдэди өзүнүн јухары вэ ашағы јахынлашмасы арасында јерлэшир:

$$\alpha_n \leqslant \alpha \leqslant \alpha_n^* \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Елэчэ дэ

$$\alpha_n^* - \alpha_n = \frac{1}{10^n}$$

олмасындан ајдындыр ки,

$$0 \leqslant \alpha - \alpha_n \leqslant \frac{1}{10^n} \quad \text{вэ} \quad 0 \leqslant \alpha_n^* - \alpha \leqslant \frac{1}{10^n} \tag{4}$$

вэ буна көрэ дэ α эдэдинин јухары вэ ашағы јахынлашмаларыны онун 10^{-1} һэддинэ гэдэр дэгигликлэ тэгриби гијмэти һесаб етмэк олар. n артдыгча (4) бэрабэрсизликлэринин сағ тэрэфи азалыр. Бундан башга,

$$\alpha - \alpha_n \to 0 \quad \text{вэ} \quad \alpha_n^* - \alpha \to 0 \quad (n \to \infty)$$

олмасы көстэрир ки, α эдэдини расионал α_n вэ α_n^* эдэдлэри илэ јахынлашдырмаг олар:

$$\alpha \approx \alpha_n \qquad \text{вэ} \qquad \alpha_n^* \approx \alpha.$$

$$\alpha = a, a_1 \, a_2 \dots a_n \dots$$

вә

$$\beta = b, b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

әдәдләринин *чәми* n-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$\alpha_n + \beta_n \leqslant \gamma \leqslant \alpha^*_n + \beta^*_n$$

бәрабәрсизликләрини өдәјән γ әдәдинә дејилир, $\alpha \geqslant 0$ вә $\beta \geqslant 0$ әдәдләринин *һасили* n-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$\alpha_n \beta_n \leqslant \gamma \leqslant \alpha^*_n \beta^*_n$$

бәрабәрсизликләрини өдәјән γ әдәдинә дејилир.

Һәгиги әдәдләр чохлуғунда чыхма вә бөлмә әмәлләри топлама вә вурма әмәлләринин тәрси кими тә'јин олунур.

Орта мәктәбин ријазијјат курсундан мә'лумдур ки, һәр бир расионал әдәд сонсуз дөври онлуг кәср (сонлу онлуг кәсри дөврү сыфырлар олан сонсуз дөври онлуг кәср-һесаб едирик) шәклиндә көстәрилир. Тәрсинә, һәр бир сонсуз дөври онлуг кәср исә расионал әдәд ифадә едир.

Демәли, расионал әдәдләр чохлуғу сонсуз дөври онлуг кәсрләр чохлуғу илә үст-үстә дүшүр. Дөври олмајан сонсуз онлуг кәсрләр (вә ја белә кәсрләрлә ифадә олунан әдәдләр) чохлуғу исә иррасионал әдәдләр чохлуғуну тәшкил едир. Иррасионал әдәдләрә $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π вә с. мисал ола биләр.

Верилмиш тә'рифә әсасланараг һәгиги әдәдләрин бүтүн хассәләрини мүәјјән етмәк олар. Бу хассәләрин јалныз бир нечәсини бурада көстәрәк.

I. Низамлылыг хассәси

Бош олмајан $X = \{x\}$ чохлуғунун истәнилән ики $x_1 \in X$ вә $x_2 \in X$ елементләри арасында үч $x_1 < x_2$, $x_1 > x_2$ вә $x_1 = x_2$ мүнасибәтиндән анчаг бири өдәниләрсә вә ејни заманда, $x_1 < x_2$ вә $x_2 < x_3$ олмасындан $x_1 < x_3$ чыхырса, онда һәмин чохлуға *низамлы чохлуг* дејилир.

Һәгиги әдәдләрин бәрабәр, бөјүк вә кичик ($=$, $>$, $<$) олмасына јухарыда вердијимиз тә'рифләр һәгиги әдәдләр чохлуғуну низамламаға имкан верир. Һәмин тә'рифләрә әсасән исбат етмәк олар ки, һәгиги әдәдләр чохлуғу низамлы чохлугдур, јә'ни һәгиги әдәдләр үчүн ашағыдакы хассә доғрудур.

Истәнилән һәгиги a вә b әдәдләри үчүн ашағыдакы үч мүнасибәтдән анчаг бири доғру ола биләр:

$$a<b, \quad a=b, \quad a>b.$$

Бу заман $a<b$ вә $b<c$ оларса, онда $a<c$ олмалыдыр.

II. Сыхлыг хассәси

Истәнилән ики мүхтәлиф һәгиги a вә b әдәди арасында һеч олмазса бир һәгиги c әдәди вардыр. Јә'ни $a<b$ (вә ја $a>b$) олдугда елә һәгиги c әдәди вар ки, $a<c<b$ ($a>c>b$) олур. Мәсәлән, $a<b$ олдугда $c = \frac{a+b}{2}$ әдәди $a<c<b$ бәрабәрсизлијини өдәјир. Бурадан ајдындыр ки, ики мүхтәлиф һәгиги әдәд арасында сонсуз сајда һәгиги әдәд вардыр.

III. Архимед хассәси

Ики мүхтәлиф $a > 0$ вә $b > 0$ һәгиги әдәди үчүн елә натурал n әдәди вар ки, $na > b$ олар.

IV. Гејри-һесаби олмасы

Бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу гејри-һесабидир.

Бу хассәнин доғрулуғу јухарыда исбат едилмиш 3-чү теоремдән вә һәгиги әдәдләрин тә'рифиндән ајдындыр.

Һәгиги әдәдләр чохлуғу расионал вә иррасионал әдәдләр чохлуғунун бирләшмәсиндән ибарәт олдуғундан вә расинал әдәдләр чохлуғунун һесаби олмасындан, иррасионал әдәдләр чохлуғунун гејри-һесаби олмасы ајдындыр.

Һәгиги әдәдләр чохлуғунун бундан башга бир сыра мүһүм хассәләри дә вардыр. Онларын бә'зиләрини сонра нәзәрдән кечирәчәјик.

§ 5. ДҮЗ ХӘТТ ҮЗӘРИНДӘ КООРДИНАТ СИСТЕМИ. ӘДӘД ОХУ ВӘ ЛОГАРИФМИК ШКАЛА.

Һәгиги әдәдләр һәндәси оларag әдәд вә ја координат охунун нөгтәләри илә көстәрилир.

Үзәриндә мүсбәт истигамәт тә'јин олунмуш дүз хәттә *ох* дејилир (шәкил 76, *а*). Инди мүстәви үзәриндә јерләшән һәр һансы дүз хәтт, бу дүз хәтт үзәриндә башланғыч адланан O нөгтәси вә мүсбәт истигамәт (дүз хәттин ики мүмкүн истигамәтиндән бирини) көтүрәк. Һәмин дүз хәтт (вә ја ох) үзәриндә узунлуғу өлчмәк үчүн бир дүз хәтт парчасыны өлчү ваһиди сечәк вә ону башланғычы O нөгтәсиндә олмагла дүз хәттин мүсбәт истигамәти үзрә јерләшдирәк. Узунлуғу ваһидә бәрабәр олан бу парчанын сон уч нөгтәси B олсун.

Верилмиш дүз хәтт үзәриндә башланғыч адланан O нөгтәси, өлчү ваһиди вә мүсбәт истигамәт сечилдикдә дејирләр ки, һәмин дүз хәтт үзәриндә координат системи тә'јин олунмушдур. Бу һалда дүз хәттә *координат оху*, O нөгтәсинә исә *координат башланғычы* дејилир (III, § 6). Инди координат оху үзәриндә истәнилән M нөгтәси көтүрәк. OM парчасыны ваһид OB парчасы илә

өлчдүкдә нәтичә бир x әдәди илә ифадә олунур. OM парчасынын истигамәти OB-нин истигамәти илә ејни олдугда һәмин x әдәди мүсбәт $(x>0)$, мүхтәлиф олдугда исә мәнфи $(x<0)$ һесаб едилир. M нөгтәси O илә үст-үстә дүшдүкдә $x=0$ олур. Белә тә'јин олунан x әдәдинә OM парчасынын гијмәти дејилир вә $x=OM$ илә ишарә олунур.

Тәрсинә, һәр бир һәгиги x әдәди үчүн ох үзәриндә елә јеканә M нөгтәси вар ки, $x = OM$ олур. $x>0$ олдугда M нөгтәси O нөгтәсинин охун мүсбәт истигамәти тәрәфиндә, $x<0$ олдугда исә O нөгтәсинин охун мүсбәт истигамәтинин әкс тәрәфиндә јерләшәр.

Беләликлә, һәр бир һәгиги әдәдә охун мүәјјән бир нөгтәси вә тәрсинә, охун һәр бир нөгтәсинә бир һәгиги әдәд ујғун олур. Бу һалда верилмиш оха *әдәд оху*, M нөгтәсинә ујғун олан һәгиги x әдәдинә һәмин нөгтәнин координаты (латынча со—бирликдә, ordinatus—низамланмыш, мүәјјән демәкдир) вә M нөгтәсинә x әдәдинин *һәндәси көстәрилиши* дејилир. x әдәдинин M нөгтәсинин координаты олмасы $M(x)$ шәклиндә јазылыр.

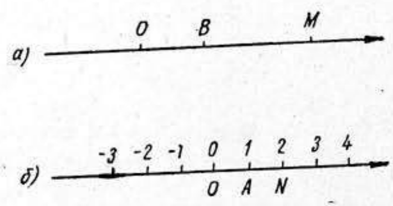
Адәтән, әдәд оху үфүги дүз хәтт вә онун үзәриндә мүсбәт истигамәт солдан сағa тәрәф көтүрүлүр.

Ајдындыр ки, һәгиги әдәдләр чохлуғу илә әдәд охунун нөгтәләри чохлуғу арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг вардыр (§ 1). Буна көрә дә чох заман ријази анализдә «һәгиги» x әдәдини әдәд оху үзәриндә көстәрән «нөгтә» әвәзинә «x нөгтәси» ишләдилир. Бу да һеч бир гарышыглыға сәбәб олмур.

Һәгиги әдәдләри әдәд охунун нөгтәләри илә көстәрдикдә онларын бир сыра хассәләри даһа ајдын көрүнүр. Бу заман һәгиги әдәдләрин низамлылыг вә башга хассәләри позулмур. a вә b һәгиги әдәдләри арасында $a<b$ мүнасибәти олдугда a әдәдини әдәд оху үзәриндә көстәрән $M(a)$ нөгтәси, b әдәдини көстәрән $N(b)$ нөгтәсиндән солда јерләшәр.

Гејд едәк ки, бүтүн һәгиги әдәдләри әдәд оху үзәриндә көстәрән нөгтәләр һәмин оху (дүз хәтти) тамамилә долдурур. Бу, һәгиги әдәдләр чохлуғунун кәсилмәзлик (вә ја тамлыг) хассәсини һәндәси олараг ифадә едир.

Һәгиги әдәдләри һәндәси көстәрмәк үчүн ишләдилән әдәд оху бәрабәр һиссәләрә бөлүндүјүндән (76-чы шәкил, б), јә'ни мүнтәзәм шкала олдуғундан өлчүлү кәмијјәтләри дә һәмин ох үзәриндә һәндәси көстәрмәк олар. Бу һалда өлчү ваһиди олараг сечилән парчаја һәмин кәмијјәтин адына ујғун ад верилир. Мәсәлән, ох үзәриндә күтлә һәндәси көстәрилирсә, онда O нөгтәсинә $m=0$ г, A нөгтәсинә $m=1$ г, N нөгтәсинә $m=2$ г вә с. ујғун олар.



Шәкил 76.

Мүнтәзәм шкаланын бир хүсусијјәтини гејд етмәк лазымдыр. Һәндәси силсилә вә ја гүввәт функсијасы шәклиндә сүр'әтлә дәјишән кәмијјәтин мүәјјән интервалда дәјишмә характерини һәндәси олараг әјани көрмәк үчүн мүнтәзәм шкала чох заман әлверишли олмур. Чүнки өлчү ваһиди бөјүк көтүрүлдүкдә координат башланғычындан узаг нөгтәләрдә дәјишән кәмијјәтин графики чертјожа јерләшмир. Өлчү ваһиди чох кичик олдугда исә графикин координат башланғычына јахын һиссәләринә әсасән кәмијјәтин дәјишмә характерини көрмәк чәтин олур. Буна көрә дә белә һалларда мүнтәзәм олмајан шкаладан, мәсәлән, логарифмик шкаладан истифадә етмәк даһа әлверишлидир. Бу һалда $x>1$ әдәдини логарифмик шкала үзәриндә сечилмиш мүәјјән нөгтәдән сағa $\gamma \lg x$ мәсафәдә јерләшән нөгтә илә, $0<x<1$ әдәдини исә һәмин нөгтәдән солда $\gamma|\lg x|$ мәсафәдә јерләшән нөгтә илә көстәрирләр (γ, сечилмиш мүтәнасиблик әмсалыдыр). Логарифмик шкала логарифмик функсијанын хассәсинә әсасланыр (әдәд бөјүдүкчә онун логарифми нисбәтән аз сүр'әтлә артыр: $\lg 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1000 = 3$, ...).

Биз, бу китабда, ријази кәмијјәтләри һәндәси көстәрмәк үчүн әдәд охундан (мүнтәзәм шкаладан) истифадә едәчәјик.

§ 6. ӘДӘДИ ЧОХЛУҒУН ХҮСУСИ НӨВЛӘРИ

Чохлуғун бүтүн елементләри һәгиги әдәдләр олдугда она *әдәди чохлуг* дејилир. Натурал әдәдләр чохлуғу N, расионал әдәдләр чохлуғу R, иррасионал әдәдләр чохлуғу I вә с. әдәди чохлуға мисал ола биләр.

Әдәди чохлугларын чох ишләнән бир сыра хүсуси нөвләрини гејд едәк.

Мүхтәлиф a вә b һәгиги әдәдләрини көтүрәрәк $a<b$ олдуғуну гәбул едәк.

Тә'риф. *$a<x<b$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн һәгиги x әдәдләри чохлуғуна интервал дејилир вә (a, b) илә ишарә едилир: $(a, b) = \{x | a<x<b\}$.*

Чохлуғун өзүнә дахил олмајан a вә b әдәдләринә *интервалын учлары*, $(b—a)$ фәргинә исә *интервалын узунлуғу* дејилир.

Һәндәси олараг, (a, b) интервалы әдәд оху үзәриндә a вә b нөгтәләри арасында јерләшән нөгтәләр чохлуғундан ибарәтдир (77-чи шәкил).

Мисал 1. $-1<x<1$ бәрабәрсизлијини өдәјән x әдәдләри чохлуғу

$$(-1, 1) = \{x | -1<x<1\}$$

интервалыны тәшкил едир.

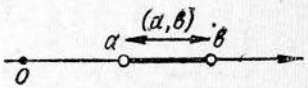
Тә'риф. *$a\leqslant x\leqslant b$ бәрабәрсизлијини өдәјән x әдәдләри чохлуғуна парча вә ја сегмент дејилир. Парча $[a, b]$ шәклиндә көстәрилир:*

$$[a, b] = \{x | a\leqslant x\leqslant b\}.$$

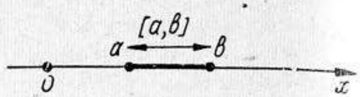
a вә *b* *әдәдләринә парчанын учлары, b—a фәргинә исә парчанын узунлуғу дејилир.*

Ајдындыр ки, (a, b) интервалы илә $[a, b]$ парчасынын узунлуглары бәрабәрдир.

Һәндәси олараг $[a, b]$ парчасы дедикдә әдәд оху үзәриндә *a* вә *b* нөгтәләри вә онларын арасында јерләшән бүтүн нөгтәләр чохлуғу баша дүшүлүр (78-чи шәкил).



Шәкил 77.



Шәкил 78.

Мисал 2. $-1 \leqslant x \leqslant 1$ бәрабәрсизлијини өдәјән *x* әдәдләри чохлуғу $[-1, 1]$ парчасыны тәшкил едир:

$$[-1, 1] = \{x | -1 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Тә'риф. $a \leqslant x < b$ бәрабәрсизлијини өдәјән *x* әдәдләри чохлуғуна *солдан гапалы јарыминтервал*, $a < x \leqslant b$ бәрабәрсизлијини өдәјән *x* әдәдләри чохлуғуна исә *сағдан гапалы јарыминтервал* дејилир. Бунлар ујғун олараг ашағыдакы кими ишарә едилир:

$$[a, b) = \{x | a \leqslant x < b\} \quad \text{вә} \quad (a, b] = \{x | a < x \leqslant b\}.$$

Ајдындыр ки, ујғун олараг солдан вә сағдан гапалы $[a, b)$ вә $(a, b]$ јарыминтервалларынын узунлуглары бәрабәрдир, $b—a$ фәрги онларын узунлуғудур.

Јени ишарәләр дә гәбул едәк.

Бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу $(-\infty, \infty)$ шәклиндә көстәрилир. Бурадакы ∞ «сонсузлуг» әдәд дејилдир, анчаг символик ишарәдир. Онун ајрылыгда һеч бир мә'насы јохдур. Она мүәјјән тәклиф вә ифадәләрдә мә'на верилир. Чох заман бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғуну $-\infty < x < \infty$ шәклиндә ишарә едирләр. Гејд етмәк лазымдыр ки, ахырынчы мүнасибәт сонсузлуг ишарәсинин һәгиги әдәдләрлә бир нөв әлагәсини дә мүәјјән едир.

Һәр һансы һәгиги *a* әдәдиндән бөјүк олан бүтүн әдәдләр чохлуғу $(a, +\infty)$ илә ишарә едилир. *a* әдәдиндән кичик олмајан бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғуну исә $[a, +\infty]$ илә ишарә едәчәјик (*a* әдәди ахырынчы чохлуға дахилдир). Ејни гајда илә $(-\infty, a)$ вә $(-\infty, a]$ әдәди чохлугларыны да тә'јин етмәк олар.

Мисал 3. $-3 \leqslant x < \sqrt{2}$ мүнасибәтини өдәјән һәгиги *x* әдәдләри чохлуғу солдан гапалы $[-3, \sqrt{2})$ јарыминтервалыны тәшкил едир.

Әдәди чохлуғун бахдығымыз нөвләри арасында белә бир мүнасибәт вардыр: *һәр бир интервал истәнилән парча, јарымох вә бүтүн әдәд оху илә еквивалентдир.*

шәклиндә јазылар. Сонра исә A_1, B_1, C_1 вә D_1 әмсалларынын гијмәтләринә әсасән (2) тәнлијинин һансы нөв сәтһи ифадә етдијини тә'јин етмәк олур.

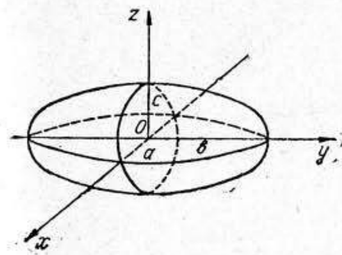
Икитәртибли сәтһләрин ашағыдакы нөвләри вардыр.

1. *Еллипсоид.* Каноник тәнлији

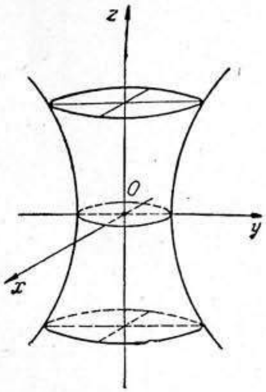
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3)$$

олан икитәртибли сәтһә *еллипсоид* дејилир (70-чи шәкил). a, b вә c әдәдләри еллипсоидин *јарымохлары* адланыр. Еллипсоидин јарымохлары мүхтәлиф олдугда она *үчохлу еллипсоид* дејилир.

Еллипсоидин һәр һансы ики јарымоху бәрабәр олдугда фырланма еллипсоиди алыныр.



Шәкил 70.



Шәкил 71.

$a=b=c$ олдугда еллипсоид сфераја чеврилир.

2. *Биројуглу һиперболоид,* каноник тәнлији

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

олан икитәртибли сәтһә дејилир (71-чи шәкил).

a, b, c әдәдләри биројуглу һиперболоидин јарымохлары адланыр. $a=b$ оларса, (4) һиперболоиди биројуглу фырланма һиперболоидинә чеврилир.

3. *Икиојуглу һиперболоид,* каноник тәнлији

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (5)$$

олан икитәртибли сәтһә дејилир (72-чи шәкил).

$a=b$ олдугда (5) һиперболоиди икиојуглу фырланма һиперболоидинә чеврилир.

Бу теорем 1-чи теорем кими исбат олунур.

Теорем 3. ***$|x|>M$ олдугда $x>M$, $x<-M$ бәрабәрсизликләринин бири өдәнилмәлидир.***

Теоремин доғрулуғу мүтләг гијмәтин тә'рифиндән ајдындыр.

Теорем 4. ***Ики һәгиги әдәд чәминин мүтләг гијмәти, һәмин әдәдләрин мүтләг гијмәтләри чәминдән бөјүк дејилдир:***

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|. \qquad (4)$$

Исбаты. Бурада ики һал ола биләр:

1) $x+y>0$. Онда мүтләг гијмәтин тә'рифинә көрә $|x+y|=x+y$ вә (1) бәрабәрсизликләринин икинчисинә әсасән:

$$|x+y|=x+y\leqslant|x|+|y|.$$

2) $x+y<0$. Бу һалда да

$$|x+y|=-(x+y)=(-x)+(-y)\leqslant|x|+|y|.$$

Бунунла да теорем исбат олунур.

Гејд. Исбат етдијимиз 4-чү теорем сонлу сајда ихтијари һәгиги әдәдләрин чәми үчүн дә доғрудур:

$$|x_1+x_2+\dots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\dots+|x_n|. \qquad (5)$$

Бу тәклифи ријази индуксија методу илә 4-чү теоремдән истифадә етмәклә асанлыгла исбат етмәк олар.

Теорем 5. ***Ики һәгиги әдәдин фәргинин мүтләг гијмәти, онларын мүтләг гијмәтләри фәргиндән кичик дејилдир:***

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|. \qquad (6)$$

Исбаты. 4-чү теоремә көрә

$$|x|=|(x-y)+y|\leqslant|x-y|+|y|$$

вә бурадан

$$|x|-|y|\leqslant|x-y|.$$

Теорем 6.

$$|x-y|\geqslant||x|-|y|| \qquad (7)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Исбаты. Әввәлки теоремә әсасән

$$|x-y|\geqslant|x|-|y|$$

вә

$$|x-y|=|y-x|\geqslant|y|-|x|.$$

Бурадан да (7) бәрабәрсизлији алыныр.

Т е о р е м 7. ***Ики һәгиги әдәд һасилинин мүтләг гијмәти һәмин әдәдләрин мүтләг гијмәтләринин һасилинә бәрабәрдир:***

$$|xy| = |x| \cdot |y|. \qquad (8)$$

Доғрудан да, $x>0$ вә $y>0$ олдугда $xy>0$ вә $|x \cdot y| = xy = |x| \cdot |y|$.

$x>0$ вә $y<0$ олдугда исә $xy<0$ вә јенә дә $|x \cdot y| = -(xy) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$. Арды ајдындыр.

Н ә т и ҹ ә. Сонлу сајда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ әдәдләри үчүн

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_n|.$$

Доғрудан да, (8) мүнасибәтинә көрә

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2 \cdot \ldots \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3 \cdot \ldots x_n| = \ldots = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \ldots \cdot |x_n|.$$

Т е о р е м 8. ***Ики һәгиги әдәдин нисбәтинин мүтләг гијмәти һәмин әдәдләрин мүтләг гијмәтләри нисбәтинә бәрабәрдир:***

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, \qquad (y \neq 0). \qquad (9)$$

Теоремин исбаты ашкардыр.

Мисал 2. Бәрабәрсизлији һәлл един: $|x-3|<2$.

1-чи теоремә көрә

$$-2<x-3<2.$$

Бу бәрабәрсизликләрин бүтүн тәрәфләринә 3 әдәдини әлавә етсәк

$$1<x<5.$$

Мисал 3. Бәрабәрсизлији һәлл един:

$$|2x-1|<3,$$
$$-3<2x-1<3,$$
$$-2<2x<4$$

вә ја

$$-1<x<2.$$

§ 8. ЭТРАФ АНЛАЈЫШЫ

Т ә' р и ф. *Верилмиш һәгиги x_0 әдәдини (вә ја һәндәси олараг x_0 нөгтәсини) өз дахилинә алан һәр бир интервала һәмин әдәдин әтрафы дејилир.* (α, β) интервалы x_0 әдәдинин әтрафы олдугда $\alpha<x_0<\beta$ мүнасибәти өдәнилир.

$(-1, 1)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $(-1, 3)$ вә $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ интервалларынын һәр бири 0 нөгтәсинин әтрафыдыр.

$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$ интервалына x_0 әдәдинин (нөгтәсинин) ε-әтрафы, x_0 әдәдинә ε-әтрафын мәркәзи, ε әдәдинә исә ε-әтрафын радиусу дејилир.

Ашкардыр ки, x_0 нөгтәсинин ε-әтрафында јерләшән һәр бир x әдәди үчүн $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$ мүнасибәти өдәнилир. Бу бәрабәрсизликләрин бүтүн тәрәфләринә $-x_0$ әдәдини әлавә етсәк:

$$-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon. \qquad (1)$$

(1) мүнасибәти исә јухарыда исбат етдијимиз 1-чи теоремә (§ 7) көрә

$$|x - x_0| < \varepsilon \qquad (2)$$

бәрабәрсизлији илә еквивалентдир.

Демәли, x_0 нөгтәсинин ε-әтрафында јерләшән ихтијари x әдәди үчүн (2) бәрабәрсизлији өдәнилир.

Гејд едәк ки, x_0 әдәдинин ихтијари (α, β)-әтрафы дахилиндә јерләшән һәмишә мүәјјән ε—әтраф вардыр. Буна инанмаг үчүн ε әдәди олараг $\beta-x_0$ вә $x_0-\alpha$ әдәдләринин һәр бириндән кичик мүсбәт әдәди көтүрмәк кифајәтдир.

Т ә' р и ф. *$X=\{x\}$ әдәди чохлуғуну көтүрәк. Верилмиш $x_0 \in X$ нөгтәсинин X чохлуғуна тамамилә дахил олан һәр һансы әтрафы варса, онда x_0 нөгтәсинә X чохлуғунун дахили нөгтәси дејилир.*

x_0 нөгтәсинин истәнилән әтрафында һәм X чохлуғуна дахил олан вә һәм дә дахил олмајан нөгтәләр јерләширсә, онда x_0 нөгтәсинә X чохлуғунун сәрһәд нөгтәси дејилир. Чохлуғун бүтүн сәрһәд нөгтәләри чохлуғуна һәмин чохлуғун сәрһәдди дејилир.

Мисал 1. $X=[a, b]$ $(a<b)$ чохлуғунун $a<x_0<b$ бәрабәрсизлијини өдәјән һәр бир нөгтәси (елементи) һәмин чохлуғун дахили нөгтәсидир. a вә b нөгтәләри исә һәмин чохлуғун сәрһәд нөгтәләридир вә чохлуғун өзүнә дахилдир.

Мисал 2. $X=(a, b)$ чохлуғунун һәр бир нөгтәси һәмин чохлуғун дахили нөгтәсидир. a вә b нөгтәләри јенә дә чохлуғун сәрһәд нөгтәләридир, лакин бу һалда онлар чохлуғун өзүнә дахил дејилдир.

Мисал 3. $X=\{0, 1, 2\}$ чохлуғунун бүтүн нөгтәләри һәмин чохлуғун сәрһәд нөгтәләридир.

Т ә' р и ф. *x_0 нөгтәсинин истәнилән әтрафында X чохлуғунун һәмин нөгтәдән фәргли һеч олмазса бир нөгтәси варса, онда x_0 нөгтәсинә X чохлуғунун лимит нөгтәси дејилир.* Ајдындыр ки, бу тә'рифи белә дә демәк олар: *x_0 нөгтәсинин истәнилән әтрафында X чохлуғунун сонсуз сајда нөгтәси јерләшдикдә она һәмин чохлуғун лимит нөгтәси дејилир.*

Чохлуғун лимит нөгтәләринин сајы сонлу вә ја сонсуз ола биләр, јахуд да һеч лимит нөгтәси олмаја биләр. Нәһајәт, верилмиш чохлуғун лимит нөгтәләри һәмин чохлуғун өзүнә дахил ола дә биләр, олмаја да биләр. X чохлуғуна дахил олан x_0 нөгтәсинин һәмин чохлуғун һеч бир елементи јерләшмәјән әтрафы ол-

дугда, x_0 нөгтәсинә X чохлуғунун *изолә едилмиш нөгтәси* дејилир.

Мисал 4. $X = [a, b]$ чохлуғунун бүтүн нөгтәләри өзүнүн лимит нөгтәсидир вә һәмин чохлуға дахилдир.

Мисал 5. $X = (a, b)$ чохлуғунун бүтүн нөгтәләри вә a, b нөгтәләри онун лимит нөгтәләридир. Бу чохлуғун лимит нөгтәләринин бир һиссәси, јә'ни (a, b) интервалы, һәмин чохлуғун өзүнә дахилдир; $(a, b) \subset X$, a вә b нөгтәләри исә һәмин чохлуғун өзүнә дахил дејилдир.

Мисал 6. Сонлу $X = \{0, 1, 2\}$ чохлуғунун һеч бир лимит нөгтәси јохдур. 0, 1 вә 2 нөгтәләринин һәр бири X чохлуғунун изолә едилмиш нөгтәсидир.

Бүтүн лимит нөгтәләри өзүнә дахил олан чохлуға *гапалы чохлуг* дејилир. Гапалы чохлуға $[a, b]$ парчасы мисал ола биләр.

§ 9. МӘҺДУД ВӘ ГЕЈРИ-МӘҺДУД ЧОХЛУГЛАР

Т ә' р и ф. *$X = \{x\}$ әдәди чохлуғунун бүтүн елементләри һәр һансы сабит M әдәдиндән бөјүк олмадыгда, јә'ни ихтијари $x \in X$ үчүн*

$$x \leqslant M \tag{1}$$

бәрабәрсизлији өдәнилдикдә, һәмин чохлуға јухарыдан мәһдуд чохлуг дејилир. (1) *бәрабәрсизлијини өдәјән сабит M әдәдинә X чохлуғунун јухары сәрһәди дејилир. X чохлуғунун јухары сәрһәдләринин ән кичијинә, јә'ни ашағыдакы ики шәрти өдәјән M_0 әдәдинә һәмин чохлуғун дәгиг јухары сәрһәди дејилир:*

1) *истәнилән $x \in X$ үчүн*

$$x \leqslant M_0$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

2) *ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн X чохлуғунун елә x_0 елементи вар ки, $x_0 > M_0 - \varepsilon$ бәрабәрсизлији өдәнилир.*

X чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәди $M_0 = \sup X$ илә ишарә олунур. sup ишарәси латынча мә'насы «ән јүксәк (ән бөјүк)» олан supremum сөзүндән көтүрүлмүшдүр.

Т ә' р и ф. *X чохлуғунун бүтүн елементләри һәр һансы сабит m әдәдиндән кичик олмадыгда, јә'ни һәр бир $x \in X$ үчүн*

$$x \geqslant m \tag{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилдикдә, X чохлуғуна ашағыдан мәһдуд чохлуг дејилир. Ашағыдакы ики шәрти өдәјән m_0 әдәдинә X чохлуғунун *дәгиг ашағы сәрһәди* дејилир:

1) *истәнилән $x \in X$ үчүн $x \geqslant m_0$ бәрабәрсизлији өдәнилир.*

2) *ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн X чохлуғунун елә x_0 елементи вар ки, $m_0 + \varepsilon > x_0$.*

Бурадан ајдындыр ки, X чохлуғунун дәгиг ашағы сәрһәди онун ашағы сәрһәдләриндән ән бөјүјүдүр. X чохлуғунун дәгиг ашағы сәрһәди

$$m_0 = \inf X$$

илә ишарә едилир; inf ишарәси латынча мә'насы «ән ашағы (ән кичик)» олан infimum сөзүндән көтүрүлмүшдүр.

Т ә' р и ф. *Ашағыдан вә јухарыдан мәһдуд олан чохлуға мәһдуд чохлуг дејилир.*

Тә'рифдән ајдындыр ки, X чохлуғу мәһдуддурса, онда елә сабит M әдәди вар ки, X чохлуғунун бүтүн x елементләри үчүн

$$|x| \leqslant M \tag{3}$$

бәрабәрсизлији вә ја

$$-M \leqslant x \leqslant M \tag{4}$$

мүнасибәти өдәнилир. Буну мәһдуд чохлуғун тә'рифи кими дә гәбул етмәк олар.

Доғрудан да, истәнилән $x \in X$ үчүн (4) (вә ја еквивалент (3)) мүнасибәти өдәнилдикдә, X чохлуғу ашағыдан (мәсәлән, $-M$ әдәди илә) вә јухарыдан (мәсәлән, M әдәди илә) мәһдуд олар.

Т ә' р и ф. *Мәһдуд олмајан чохлуға гејри-мәһдуд чохлуг дејилир.*

Демәли, X чохлуғунун гејри-мәһдуд олмасы о демәкдир ки, истәнилән мүсбәт M әдәди үчүн һәмин чохлуғун елә $x_0 \in X$ елементи вар ки,

$$|x_0| > M$$

олур. Чохлуғун ашағыдан вә ја јухарыдан гејри-мәһдуд олмасынын тә'рифини аналожи олараг сөјләмәк олар. Буну охучулара һәвалә едирик.

Ајдындыр ки, јухарыдан гејри-мәһдуд чохлуғун дәгиг јухары вә ашағыдан гејри-мәһдуд чохлуғун дәгиг ашағы сәрһәди јохдур.

Мисал 1. Натурал әдәдләр чохлуғу $N = \{1, 2, ..., n, ...\}$ ашағыдан мәһдуддур:

$$n \geqslant 1 \quad (n = 1, 2, ...).$$

Јухарыдан исә гејри-мәһдуддур. Бундан əлавә N чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәди јохдур.

Мисал 2. $X = [a, b]$ вә $X = (a, b)$ $(a < b)$ чохлуглары ашағыдан вә јухарыдан мәһдуддур. Һәр ики чохлуг үчүн:

$$a = \inf X \quad \text{вә} \quad b = \sup X.$$

Мисал 3. Расионал әдәдләр чохлуғу һәм ашағыдан вә һәм дә јухарыдан гејри-мәһдуддур. Буна көрә дә һәмин чохлуғун дәгиг ашағы вә дәгиг јухары сәрһәди јохдур.

Белә бир суал гаршыја чыхыр: һансы чохлугларын дәгиг ашағы вә дәгиг јухары сәрһәди вардыр? Ашағыдакы теорем бу суала чаваб верир.

Теорем. ***Јухарыдан (ашағыдан) мәһдуд олан һәр бир чохлуғун дәгиг јухары (ашағы) сәрһәди вардыр.***

Теоремин исбатыны даһа мүкәммәл ријази анализ курсларындан өјрәнмәк олар.

X ФӘСИЛ

ТӘГРИБИ ҺЕСАБЛАМА ЕЛЕМЕНТЛӘРИ

§ 1. КӘМИЈЈӘТЛӘРИН ТӘГРИБИ ГИЈМӘТИ

Тәбиәтдә мөвчуд олан бүтүн чисимләр, һадисәләр вә просесләр бир-бирилә мүәјјән әлагә вә мүнасибәтләрлә бағлыдыр. Бу әлагә вә мүнасибәтләрин ән әсас вә мүһүм оланлары ријази дүстурлар шәклиндә ифадә олунур.

Беләликлә, тәбиәтдәки просес вә һадисәләрин табе олдуглары әсас ганунлары өјрәнмәк үчүн онлары ифадә едән ријази мәсәлә вә мүнасибәтләри тәдгиг етмәк лазым кәлир. Һәр бир ријази мәсәләни һәлл етмәздән әввәл онун һәллинин варлығыны, јеканәлијини вә дајанаглығыны, башга сөзлә, мәсәләнин коррект гојулдуғуну мүәјјән едирләр. Сонра исә һәмин мәсәләнин һәллини тапмаға чалышырлар. Бир чох ријази мәсәләләрин һәллини бә'зән дәгиг вә ашкар шәкилдә тапмаг мүмкүн олмур вә ја бу чох техники чәтинликләрлә әлагәдар олур. Белә һалларда һәмин мәсәләләри тәгриби үсулларла һәлл етмәјә чалышырлар.

Бундан башга, практики ишләрдә раст кәлән ријази мәсәләләри һәлл етмәк үчүн верилән әдәдләрин чоху өлчмә нәтичәсиндә алындығындан тәгриби олур. Узунлуг, саһә, һәчм, күтлә вә с. кими кәмијјәтләри өлчәркән әсасән тәгриби әдәдләр алыныр. Мәсәлән, квадрат шәклиндә вә тәрәфинин узунлуғу $a = 3{,}17$ *м* олан отағын саһәси

$$S = a^2 = 10{,}0489\ м^2$$

һесаб олунур. Бу һесаблама заманы верилән 3,17 әдәди отағын узунлуғуну өлчәркән тәгриби олараг алынмышдыр. Чүнки һеч бир отаг идеал квадрат (вә ја дүзбучаглы) шәклиндә дејилдир. Буна көрә дә онун өлчүләри әслиндә тәгриби олараг көтүрүлүр.

Беләликлә, јухарыдакы һесабламаны апармаг үчүн верилән 3,17 әдәди вә нәтичәдә алдығымыз 10,0489 әдәди тәгриби әдәдләрдир.

Тәгриби әдәдләр үзәриндә апарылан ријази әмәлләрә *тәгриби һесаблама* дејилир. Һазырда мүкәммәл тәгриби һесаблама нәзәријјәси јарадылмышдыр.

Нәһајәт, верилмиш тәгриби әдәдләр үзәриндә ријази әмәлләр апаркән вә бә'зи һесабламаларда әдәдләри јуварлаглашдыраркән мүәјјән хәталар алыныр. Јүксәк дәгиглик тәләб едән мәсәләләрин һәллиндә белә хәталары һесабламағы вә ја гијмәтләндирмәји бачармаг лазымдыр. Һәр һансы мәсәләни һәлл едәркән алынан нәтичә о вахт јарарлы һесаб едилир ки, бу нәтичәни көстәрән әдәдин хәтасы мә'лум олсун.

Бу фәсилдә бизим мәгсәдимиз тәгриби әдәдләрин хәтасы, хәтанын нөвләри вә гијмәтләндирилмәси, тәгриби әдәдләр үзәриндә апарылан һесаб әмәлләри заманы алынан хәтанын гијмәтләндирилмәси вә с. һаггында гыса мә'лумат вермәкдир.

§ 2. ӘСИЛ ХӘТА ВӘ МҮТЛӘГ ХӘТА

Тә'риф. *Верилмиш a_0 әдәдинин тәгриби гијмәти a олдугда*

$$\Delta = a - a_0$$

фәргинә тәгриби a әдәдинин әсил хәтасы дејилир. a_0 әдәдинин тәгриби гијмәти a олдугда, дејирләр ки, a_0 әдәди тәгрибән (вә ја тәгриби олараг) a-ја бәрабәрдир вә буну

$$a_0 \approx a \qquad (1)$$

шәклиндә јазырлар. Мәсәлән, $\pi = 3{,}14159...$ әдәдинин тәгриби гијмәти олараг 3,14 әдәдини көтүрмәк олар:

$$\pi = 3{,}14.$$

Бу һалда

$$\Delta = -0{,}00159... .$$

Гејд едәк ки, Δ әдәдинә бә'зән (1) тәгриби бәрабәрлијинин дә әсил хәтасы дејирләр.

Тәгриби һесаблама нәзәријјәсиндә тәгриби әдәдләрин әсил хәтасы анлајышындан чох аз истифадә олунур. Чүнки, практики ишләрдә тәгриби һесабланан кәмијјәтләрин чох вахт дәгиг гијмәтләри мә'лум олмур. Буна көрә дә тәгриби әдәдләрин (вә ја бәрабәрликләрин) мүтләг хәтасы анлајышы верилир.

Тә'риф.

$$|a - a_0| \leqslant \Delta_a \qquad (2)$$

бәрабәрсизлијини өдәјән һәр бир кичик Δ_a әдәдинә тәгриби a әдәдинин вә ја тәгриби (1) бәрабәрлијинин мүтләг хәтасы дејилир.

Бурадан ајдындыр ки, тәгриби a әдәдинин Δ_a мүтләг хәтасы биргијмәтли тә'јин олунмур. Мәсәлән, $a = \pi$-нин тәгриби гијмәти олан 3,14 әдәдинин мүтләг хәтасы олараг $\Delta_a = 0{,}0016$, $\Delta_a = 0{,}002$, $\Delta_a = 0{,}003$ вә с. көтүрмәк олар.

Апарылан тәгриби һесабламаларда бурахылан хәтаны гијмәтләндирмәк үчүн мүтләг хәтаны бөјүк әдәд көтүрмәјин әһәмијјәти јохдур. Буна көрә дә тәгриби a әдәдинин мүтләг хәтасы

1349—13

олараг (2) бәрабәрсизлијини өдәјән әдәдләрин мүмкүн гәдәр кичијини көтүрмәк лазымдыр.

Тәгриби әдәдин әсил хәтасы (вә ја дәгиг гијмәти) мә'лум олмадығы һалда онун мүтләг хәтасы мә'лум ола биләр. Мәсәлән, һәр һансы узунлуғу өлчәркән 0,1 *см*-дән чох сәһв етмәдијимизи билсәк, онда өлчүлән узунлуғун дәгиг гијмәтини билмәдән мүтләг хәтанын

$$\Delta_a \leqslant 0{,}1 \text{ см}$$

олдуғуну һөкм едә биләрик. Бу һалда узунлуғун дәгиг гијмәти мә'лум олмадығындан тәгриби узунлуғун әсил хәтасы да мә'лум дејилдир.

Бә'зән (1) тәгриби бәрабәрлијинин мүтләг хәтасыны көстәрмәк үчүн ону

$$a_0 = a \pm \Delta_a$$

шәклиндә јазырлар.

(2) бәрабәрсизлији өдәнилдикдә дејирләр ки, тәгриби a әдәди a_0 әдәдини Δ_a дәгиглији илә көстәрир.

Гејд едәк ки, әсил вә мүтләг хәта адлы әдәдләрдир, онлар кәмијјәтин өлчүлдүјү ваһидлә өлчүлүр.

§ 3. ӘСИЛ НИСБИ ХӘТА ВӘ НИСБИ ХӘТА

Тәгриби әдәдләрин мүтләг хәтасы апарылан өлчмә просесинин нә дәрәҹәдә дәгиг олмасыны характеризә етмир. Мәсәлән, отағын вә карандашын узунлугларыны өлчәркән һәр ики һалда мүтләг хәтанын $\Delta_a = 0{,}1$ *см* олмасы өлчмәнин ејни дәгигликлә апарылмасыны көстәрмир. Отағын узунлуғуну өлчәркән мүтләг хәтанын 0,1 *см* олмасы өлчмә просесинин јүксәк дәгигликлә апарылдығыны көстәрдији һалда, карандашын узунлуғуну өлчәркән мүтләг хәтанын һәмин әдәд олмасы өлчмәнин нисбәтән кобуд апарылдығыны көстәрир.

Бундан башга, мүтләг хәтанын әксәр һалда адлы әдәд олмасы һесабламаларда мүнасиб олмур. Чүнки бу һалда мүтләг хәтанын гијмәти өлчү системиндән асылы олараг дәјишир. Бурадан ајдындыр ки, өлчмәнин дәгиглик дәрәҹәсини мүәјјәнләшдирмәк үчүн әсил мүтләг хәтанын вә мүтләг хәтанын гијмәтини өлчүлән кәмијјәтин дәгиг вә ја тәгриби гијмәти илә мүгајисә етмәк лазымдыр.

Тә'риф. *Тәгриби a әдәдинин әсил мүтләг хәтасынын һәмин әдәдин өзүнә нисбәтинә a әдәдинин әсил нисби хәтасы дејилир вә*

$$\delta = \frac{a - a_0}{a} \tag{1}$$

илә ишарә олунур.

Тәгриби a әдәдинин дәгиг a_0 гијмәти вә ја әсил мүтләг хәтасы чох заман мә'лум олмадығындан онун әсил нисби хәтасындан истифадә етмәк мүмкүн олмур. Буна көрә дә тәгриби әдәдин нисби хәтасы анлајышы верилир.

Тә'риф. *Тәгриби a әдәдинин мүтләг хәтасынын әдәдин мүтләг гијмәтинә нисбәтинә a әдәдинин нисби хәтасы дејилир вә*

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \tag{2}$$

илә ишарә олунур.

Тә'рифдән ајдындыр ки, нисби хәта һәмишә адсыз әдәдлә ифадә олунур. Адәтән, о, фаизлә көстәрилир. Тәгриби әдәди 100% һесаб етсәк, нисби хәта фаизлә ифадә олунар.

Нисби хәта тәгриби әдәдләри вә һәм дә мүхтәлиф өлчү просесләрини даһа дәгиг характеризә едир. (2) бәрабәрлијиндән алынан

$$\Delta_a = \delta_a\,|a|$$

мүнасибәти көстәрир ки, тәгриби әдәдин мүтләг вә нисби хәталары арасында дүз мүтәнасиб асылылыг вардыр. Нисби хәта мә'лум олдугда исә мүтләг хәтаны онун васитәсилә тапмаг олар.

$a \approx a_0$ олдуғундан нисби хәтаны бә'зән

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a_0|} \tag{3}$$

дүстуру илә тә'јин едирләр.

Гејд. Тәгриби әдәдин мүтләг вә нисби хәталарына бә'зән ујғун олараг тәгриби әдәдин *лимит мүтләг хәтасы* вә *лимит нисби хәтасы* дејилир.

Мисал 1. $a_0 = 2{,}1514$ әдәдини үч рәгәмә гәдәр јуварлаглашдырдыгда алынан мүтләг вә нисби хәтаны тапмалы.

Ајдындыр ки, $a = 2{,}15$ вә

$$\Delta_a = |a_0 - a| = 0{,}0014 = 0{,}14 \cdot 10^{-2}.$$

Нисби хәта исә

$$\delta_a = \frac{0{,}14 \cdot 10^{-2}}{2{,}15} = \frac{14}{215} \cdot 10^{-2} = 0{,}65 \cdot 10^{-3}$$

кими һесабланыр.

§ 4. ТӘГРИБИ ӘДӘДЛӘРИН ЈАЗЫЛЫШЫ

Мә'лумдур ки, һәр бир мүсбәт a әдәди сонлу вә ја сонсуз онлуг кәср шәклиндә көстәрилир:

$$a = \alpha_m \cdot 10^m + \alpha_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + \alpha_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1} + \cdots, \tag{1}$$

бурада $\alpha_к$ әдәдләри $0 \leqslant \alpha_к \leqslant 9$ шәртини өдәјир вә a әдәдинин *онлуг рәгәмләри* адланыр. (1) јазылышында m, һәр һансы там

ədəddir və a ədədinin jүksək onluг mərtəbəsini көстəрир ($\alpha_m \neq 0$). Məsələn,

$$132,145... = 1\cdot10^2+3\cdot10+2\cdot10^0+1\cdot10^{-1}+4\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}+...$$

Адәтән, тәгриби әдәдләр сонлу онлуг кәср шәклиндә көтүрүлүр:

$$a = \alpha_m\cdot10^m+\alpha_{m-1}\cdot10^{m-1}+...+\alpha_{m-n+1}\cdot10^{m-n+1}. \qquad (2)$$

Бу һалда сахланмыш $\alpha_m, \alpha_{m-1}, ..., \alpha_{m-n+1}$ ($\alpha_m \neq 0$) онлуг рәгәмләринин һамысы тәгриби a әдәдинин *гијмәтли рәгәмләри* адланыр. Гијмәтли рәгәмләрин бир нечәси сыфыр да ола биләр. Тәгриби әдәдин гијмәтли рәгәмләри солдан саға һесабланыр: α_m биринчи, α_{m-1} икинчи, α_{m-2} үчүнчү вә с. гијмәтли рәгәмләрдир.

Үмумијјәтлә, онлуг кәср шәклиндә көстәрилмиш тәгриби әдәдин сыфырдан фәргли бүтүн онлуг рәгәмләри, бу рәгәмләр арасында јерләшән сыфырлар вә сахланмыш мәртәбәләр ваһидинин олмадығыны көстәрән сыфырлар һәмин әдәдин гијмәтли рәгәмләри адланыр. Мәсәлән,

$$a = 5\cdot10^{-3}+3\cdot10^{-4}+1\cdot10^{-5}+0\cdot10^{-6} = 0,005310$$

әдәдинин дөрд гијмәтли рәгәми (5, 3, 1, 0) вардыр. 5 рәгәминин гаршысындакы сыфырлар исә гијмәтли рәгәмләр һесаб олунмур.

$$a = 3\cdot10^6+2\cdot10^5+0\cdot10^4+1\cdot10^3+0\cdot10^2 = 3201000$$

тәгриби әдәдинин исә беш гијмәтли рәгәми вардыр (3, 2, 0, 1, 0). Јенә дә ахырынчы ики сыфыр гијмәтли рәгәм һесаб олунмур.

Беләликлә, тәгриби әдәдин јазылышына дахил олан (јә'ни, сыфырдан фәргли рәгәмин әввәлиндә дуран вә әдәдин сонунда мәчһул рәгәмләр әвәзинә гојулан) вә онун онлуг рәгәмләрини көстәрмәк үчүн истифадә олунан сыфырлар һәмин әдәдин гијмәтли рәгәмләри һесаб олунмур.

Мәсәлән, 0,00013 әдәдиндә 1-дән әввәл јазылан сыфырлар гијмәтли рәгәмләр һесаб олунмур. Бу әдәдин ики гијмәтли (1, 3) рәгәми вардыр. 0,3560 әдәдиндә 3-дән әввәл јазылан сыфыр гијмәтли рәгәм дејилдир. 6-дан сонра кәлән сыфыр исә һәмин әдәддә 10^{-4} мәртәбәсинин сахланылдығыны көстәрир. Буна көрә дә 0,3560 әдәдинин дөрд гијмәтли (3, 5, 6, 0) рәгәми вардыр. Әкәр һәмин әдәддә 6-дан сонра кәлән сыфыр гијмәтли рәгәм олмасса, онда ону 0,356 шәклиндә јазмаг лазымдыр.

Гејд едәк ки, әдәдләрин сонунчу сыфырдан фәргли онлуг рәгәминдән сонра кәлән сыфырларын мүхтәлиф мә'насы олур. Бу сыфырлар әдәдин гијмәтли рәгәмләри ола да биләр, олмаја да биләр. Тәгриби әдәдин ади јазылышындан буну билмәк мүмкүн дејилдир. Мәсәлән, 3850000 шәклиндә јазылмыш әдәдин нечә гијмәтли рәгәми олдуғуну демәк чәтиндир. Буна көрә дә тәгриби әдәдләри елә јазмаг гәбул олунмушдур ки, онун гијмәтли рәгәмләрини тә'јин етмәк мүмкүн олсун. Јухарыдакы әдәдин үч гијмәтли рәгәми олдугда ону $385\cdot10^4$ шәклиндә, дөрд гијмәтли рәгәми олдугда $3850\cdot10^3$ вә с. шәклиндә јазырлар. Онда 0,00056701 әдәдини $0,00056701 = 56,701\cdot10^{-5}$ шәклиндә јазмаг олар.

Һесаблама вә ја өлчмә нәтичәсиндә алынан тәгриби әдәдләрин бүтүн рәгәмләри ејни дәрәчәдә е'тибарлы олмур. Буна көрә дә тәгриби әдәдләрин дәгиг онлуг рәгәмләри анлајышыны вермәк лазым кәлир.

Тәгриби әдәдин мүтләг хәтасы онун n-чи гијмәтли рәгәминин ифадә етдији онлуг мәртәбә ваһидинин јарысындан бөјүк олмадыгда, һәмин әдәдин биринчи n сајда гијмәтли рәгәмини дәгиг (вә ја доғру) онлуг рәгәмләр һесаб едирләр. Демәли, (1) тәгриби әдәдинин Δ_a мүтләг хәтасы

$$\Delta_a \leqslant \frac{1}{2}\,10^{m-n+1} \qquad (3)$$

бәрабәрсизлијини өдәдикдә онун биринчи n сајда гијмәтли α_m, $\alpha_{m-1}, ..., \alpha_{m-n+1}$ рәгәмләри һәмин әдәдин дәгиг онлуг рәгәмләри һесаб олунур. (3) бәрабәрсизлијини

$$\Delta_a \leqslant 5\cdot10^{m-n}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Мисал 1. $\pi = 3,14159...$ әдәдинин тәгриби гијмәти олан $a=3,142$ әдәдинин дәгиг гијмәтли дөрд онлуг рәгәми вардыр.

Доғрудан да,

$$\Delta_a = |\pi - 3,142| = |3,14159 - 3,142| < 0,0005$$

вә ја

$$\Delta_a < \frac{1}{2}\,10^{-3} = 0,0005$$

олдуғундан тәгриби a әдәдинин гијмәтли 3, 1, 4, 2 рәгәмләринин һамысы дәгиг онлуг рәгәмләрдир.

Мисал 2. $a_0 = 0,3841$ әдәди верилмишдир. Онун дәгиг гијмәтли ики онлуг рәгәми олан тәгриби гијмәтини тапмалы.

Әкәр $a = 0,38$ көтүрсәк:

$$\Delta_a = |a_0 - a| = 0,0041 < 0,005$$

олар; бу исә тәгриби a әдәдинин 3 вә 8 гијмәтли рәгәмләринин дәгиг онлуг рәгәмләр олдуғуну көстәрир.

Јухарыда дедикләримизә әсасән тәгриби әдәдләрин јазылмасы һаггында ашағыдакы гајданы алмыш олуруг: тәгриби әдәдләр елә јазылмалыдыр ки, онун габагда јазылан сыфырларындан (әлбәттә, белә сыфырлары варса) башга бүтүн рәгәмләри гијмәтли вә дәгиг онлуг рәгәмләр олсун.

Мәсәлән, тәгриби әдәд $a = 3,2354$ шәклиндә јазылмышдырса, бу о демәкдир ки, онун мүтләг хәтасы 0,00005-дән бөјүк дејил вә рәгәмләринин һамысы дәгиг гијмәтли онлуг рәгәмләрдир.

$a = 1{,}240$ тәгриби әдәдинин мүтләг хәтасы 0,0005-дән бөјүк дејилдир. Тәгриби әдәд $a = 190$ олдугда онун мүтләг хәтасы 0,5-дән бөјүк олмамалыдыр. Әкәр бу тәгриби әдәдин чох бөјүк дәгиглији варса, мәсәлән, онун мүтләг хәтасы 0,05-дән бөјүк дејилсә, онда һәмин әдәди $a = 190$ кими дејил, $a = 190{,}0$ кими јазмаг лазымдыр.

Бурадан ајдын олур ки, тәгриби әдәдләр биз сөјләдијимиз гајда илә јазылдыгда онларын шәклинә әсасән мүтләг хәталарынын һүдудуну тә'јин етмәк олур. Тәгриби әдәдләрин нисби хәтасы да онларын дәгиг гијмәтли рәгәмләринин сајына көрә тә'јин едилә биләр.

Тәгриби әдәдин дәгиг гијмәтли онлуг рәгәмләринин сајы вә биринчи гијмәтли рәгәми мә'лум олдугда онун нисби хәтасыны ашағыдакы чәдвәл васитәсилә тә'јин етмәк олар.

Нисби хәталарын (фаизлә ифадә едилмиш) чәдвәли

Дәгиг гијмәтли рәгәмләрин сајы	Биринчи гијмәтли рәгәм								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	50	25	17	13	10	9	8	7	6
2	5	3	2	1,3	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6
3	0,5	0,3	0,2	0,13	0,1	0,09	0,08	0,07	0,06

Нәһајәт, гејд етмәк лазымдыр ки, ријазијјат чәдвәлләриндә тәгриби әдәдләрин анҹаг дәгиг онлуг рәгәмләри көстәрилир. Онларын мүтләг хәтасы исә верилмир. Бу әдәдләрин мүтләг хәтасы онларын шәклинә әсасән јухарыдакы гајда илә тапылыр: чәдвәлдә көстәрилән әдәдин мүтләг хәтасы онун кичик онлуг мәртәбә ваһидинин јарысына бәрабәрдир.

§ 5. ТӘГРИБИ ӘДӘДЛӘРИН ЈУВАРЛАГЛАШДЫРЫЛМА ГАЈДАСЫ

Тутаг ки, онлуг кәср шәклиндә көстәрилмиш тәгриби a әдәди верилмишдир. Бу әдәди аз сајда гијмәтли рәгәми олан башга бир әдәдлә әвәз етмәк үчүн јуварлаглашдырмадан истифадә олунур. Верилмиш әдәди јуварлаглашдырмаг, онун бир вә ја бир нечә сонунчу онлуг рәгәмини атмаг, әдәдин кәср һиссәси олмадыгда исә онун бир вә ја бир нечә сонунчу рәгәмини сыфырла әвәз етмәк демәкдир. Әлбәттә бу заман чалышырлар ки, јуварлаглашдырма хәтасы, јә'ни әввәлки әдәдлә јуварлаглашдырмадан сонра алынан әдәдин фәргинин мүтләг гијмәти ән кичик олсун.

Верилмиш әдәдин биринчи n сајда гијмәтли рәгәмини сахлајыб, бундан сонра галан рәгәмләрини атдыгда вә ја мәртәбәләри сахламаг үчүн онлары сыфырла әвәз етдикдә алынан әдәдә *n-чи рәгәминә гәдәр јуварлаглашдырылмыш әдәд* дејилир. Ајдындыр ки, әдәд верилмиш рәгәминә гәдәр јуварлаглашдырылдыгда о өзүнүн тәгриби гијмәти илә әвәз едилмиш олур.

Әдәдләри јуварлаглашдыраркән ашағыдакы гајдадан истифадә едилир:

1. Әдәдин атылан вә ја сыфырла әвәз едилән рәгәмләринин биринчиси 5-дән кичик олдугда галан рәгәмләр дәјишилмәдән сахланылыр.

2. Әдәдин атылан вә ја сыфырла әвәз едилән рәгәмләринин биринчиси 5-дән бөјүк олдугда галан рәгәмләрин ахырынчысынын үзәринә бир әлавә олунур.

3. Әдәдин атылан вә ја әвәз едилән рәгәмләринин биринчиси 5, башга атылан рәгәмләр ичәрисиндә исә сыфырдан фәргли рәгәмләр олдугда, галан рәгәмләрин ахырынчысынын үзәринә бир әлавә олунур.

4. Әдәдин атылан вә ја әвәз едилән рәгәмләринин биринчиси 5, атылан башга рәгәмләрин һамысы сыфыр олдугда, галан ахырынчы рәгәм чүт олдугда онун өзү дәјишилмәдән сахланылыр, тәк олдугда исә үзәринә бир әлавә олунур.

Бурадан ајдындыр ки, әдәдләри јуварлаглашдыраркән бурахылан хәта онун сахланмыш ахырынчы гијмәтли рәгәминин ифадә етдији онлуг мәртәбә ваһидинин јарысындан бөјүк дејилдир.

Мисал. Верилмиш $\pi = 3{,}1415926535...$ әдәдини 5-чи, 4-чү вә 3-чү мә'налы рәгәминә гәдәр јуварлаглашдырын.

Бу һалда, π-нин тәгриби гијмәти олараг $a_1 = 3{,}1416$ (гајданын 2-чи бәндинә көрә), $a_2 = 3{,}142$ (гајданын 3-чү бәндинә көрә) вә $a_3 = 3{,}14$ (гајданын 1-чи бәндинә көрә) әдәдләрини аларыг. Алынан тәгриби әдәдләрин мүтләг хәтасы исә ујғун олараг ашағыдакы кими олачагдыр:

$$\Delta_{a_1} = |\pi - 3{,}1416| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5},$$

$$\Delta_{a_2} = |\pi - 3{,}142| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta_{a_3} = |\pi - 3{,}14| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-3}.$$

Гејд едәк ки, тәгриби әдәдләрин дәгиглији онун гијмәтли рәгәмләринин сајындан асылы дејил, дәгиг гијмәтли рәгәмләринин сајындан асылыдыр. Буна көрә дә һесаблама заманы алынан сајындан асылыдыр. Буна көрә дә һесаблама заманы алынан тәгриби әдәдләрин дәгиг олмајан артыг гијмәтли рәгәмләри олдугда јуварлаглашдырма васитәсилә онлары атмаг лазымдыр.

§ 6. ТӘГРИБИ ӘДӘДЛӘРИН ТОПЛАНМАСЫ ВӘ ЧЫХЫЛМАСЫ

Фәрз едәк ки, һәр һансы кәмиjjәтләрин дәгиг гиjмәтләри $a_{к}^{(0)}$ $(к = 1, 2, ..., n)$, тәгриби гиjмәтләри исә $a_{к}$ $(к=1, 2, ..., n)$ әдәдләридир. Тәгриби $a_{к}$ әдәдинин мүтләг хәтасы $\Delta_{к}$ олсун.

Әкәр

$$a_0 = \sum_{к=1}^{n} a_{к}^{(0)} \quad (a_{к}^{(0)} > 0)$$

вә

$$a = \sum_{к=1}^{n} a_{к}$$

ишарәләрини гәбул етсәк, мүтләг хәтанын тә'рифинә көрә:

$$|a-a_0| = \left|\sum_{к=1}^{n} (a_{к} - a_{к}^{(0)})\right| \leqslant \sum_{к=1}^{n} |a_{к} - a_{к}^{(0)}| \leqslant$$

$$\leqslant \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + ... + \Delta_{a_n} .$$

Бурадан:

$$\Delta_a = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + ... + \Delta_{a_n} . \qquad (1)$$

Бу нәтичәни ашағыдакы тәклиф шәклиндә сөјләмәк олар:

Тәклиф 1. *Сонлу сајда тәгриби әдәдләрин чәбри чәминин мүтләг хәтасы онларын мүтләг хәталарынын чәминә бәрабәрдир.*

Әкәр тәгриби $a_{к}$ $(к=1, 2, ..., n)$ әдәдләринин һамысынын мүтләг хәталары бир-биринә бәрабәр, jә'ни

$$\Delta_{a_1} = \Delta_{a_2} = ... = \Delta_{a_n} = \Delta$$

оларса, онда (1) дүстуруна әсасән

$$\Delta_a = n\Delta \qquad (2)$$

мүнасибәтини аларыг. Лакин тәгриби әдәдләрин сајы (n) бөјүк әдәд олдугда, онларын чәминин мүтләг хәтасы үчүн (1) дүстуру илә алынан мүтләг хәта бә'зән бөјүдүлмүш олур. Бунун сәбәби одур ки, чох заман һәдләрин сајы бөјүк олдугда, бә'зи тәгриби $a_{к}$ әдәдләри дәгиг $a_{к}^{(0)}$ әдәдләриндән бөјүк, бә'зиләри исә кичик олур. Бунун нәтичәсиндә исә

$$\sum_{к=1}^{n} (a_{к} - a_{к}^{(0)})$$

чәминдә мүхтәлиф ишарәли һәдләр арасында компенсасиjа кечәр вә Δ_a мүтләг хәтасы (1) бәрабәрлиjинин сағ тәрәфиндән кичик олур.

Еһтимал нәзәриjjәсиндә исбат едилмишдир ки, тәгриби $a_{к}$ $(к = 1, ..., n)$ әдәдләринин сајы бөјүк олмагла онларын мүтләг хәталары бир-биринә бәрабәр оларса, онда чәмин мүтләг хәтасы (2) дүстуру илә деjил, Н. Г. Чеботарjовун[1]

$$\Delta_a = \sqrt{3n}\,\Delta \quad (n > 10)$$

гајдасы илә һесабланмалыдыр.

Гејд етмәк лазымдыр ки, әкәр верилмиш тәгриби әдәдләрдән биринин мүтләг-хәтасы јердә галан әдәдләрин мүтләг хәталарындан кифајәт гәдәр бөјүкдүрсә, онда тәгриби әдәдләрин чәминин мүтләг хәтасы һәмин әдәдин мүтләг хәтасына бәрабәр олур. Әлбәттә, бу һалда чәмин онлуг рәгәмләринин сајыны ән бөјүк мүтләг хәтасы олан әдәдин онлуг рәгәмләринин сајына бәрабәр көтүрмәк лазымдыр.

Тәгриби $a_{к} > 0$ $(к = 1, 2, ..., n)$ әдәдләринин чәминин нисби хәтасыны һесабламаг үчүн нисби хәтанын тә'рифиндән (§ 3, (4)) вә (1) дүстурундан истифадә етсәк:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} + ... + \Delta_{a_n}}{a_1 + a_2 + ... + a_n}, \qquad (3)$$

(4) дүстуруна көрә

$$\delta_{a_{к}} = \frac{\Delta_{a_{к}}}{a_{к}} \quad (к = 1, 2, ..., n)$$

олдуғундан

$$\Delta_{a_{к}} = a_{к} \cdot \delta_{a_{к}} .$$

Бу гиjмәти (3) дүстурунда јеринә јазсаг:

$$\delta_a = \frac{a_1 \delta_{a_1} + a_2 \delta_{a_2} + ... + a_n \delta_{a_n}}{a_1 + a_2 + ... + a_n} . \qquad (4)$$

Ашағыдакы

$$\delta = \min \delta_{a_{к}} \quad (к=1, 2, ..., n) \quad \text{вә} \quad \omega = \max \delta_{a_{к}} \quad (к=1, 2, ..., n)$$

ишарәләрини гәбул етсәк, (4) дүстуруна әсасән

$$\delta \leqslant \delta_a \leqslant \omega \qquad (5)$$

мүнасибәтини аларыг.

Беләликлә, ашағыдакы тәклифи исбат етмиш олуруг:

Тәклиф 2. *Ејни ишарәли $a_{к}$ $(к=1, 2, ..., n)$ тәгриби әдәдләринин чәминин нисби хәтасы, топлананларын нисби хәталарынын ән кичиjи илә ән бөјүјү арасында јерләшир:*

$$\delta \leqslant \delta_a \leqslant \omega. \qquad (6)$$

[1] Н. Г. Чеботарјов (1894—1947) совет риjазиjjатчысыдыр.

Инди дә тәгриби a_1 вә a_2 әдәдләри фәргинин нисби хәтасыны һесаблајаг. $a_1 - a_2 = b$ олсун. Онда 1-чи тәклифә көрә

$$\Delta_b = \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2},$$

бурадан да:

$$\delta_b = \frac{\Delta_b}{|b|} = \frac{\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}}{|a_1 - a_2|}. \qquad (7)$$

$a_1 > 0$ вә $a_2 > 0$ әдәдләри бир-биринә јахын олдугда онларын фәрги чох кичик әдәд ола биләр. Бу һалда (7) дүстуру көстәрир ки, һәмин әдәдләрин мүтләг хәтасы кичик олса да онларын фәргинин нисби хәтасы чох бөјүкдүр.

Тәклиф 3. *Ејни ишарәли ики тәгриби әдәдин фәргинин нисби хәтасы онларын һәр биринин нисби хәтасындан чох бөјүк ола биләр.*

Демәли, чох јахын әдәдләри чыхдыгда дәгиглик һәдсиз дәрәчәдә азалыр. Буна көрә дә јахын әдәдләрин чыхылмасы тәләб олунан һесабламаларда ја һәмин әдәдләрин фәргини билаваситә тапмаг, ја да һәмин һесабламаны әввәлчәдән чевирәрәк ону ајры шәклә кәтирмәк мәсләһәтдир.

Мисал. Тәгриби $a_1 = 1{,}263$ вә $a_2 = 1{,}253$ әдәдләринин чәминин вә фәргинин нисби хәтасыны һесабламалы.

Һәмин әдәдләрин јазылышындан ајдындыр ки, $\Delta_{a_1} = 0{,}0005$ вә $\Delta_{a_2} = 0{,}0005$. Бурадан $\Delta_{a_1} + \Delta_{a_2} = 0{,}001$ вә $\delta_{a_1+a_2} = 0{,}0004$. Демәли, $\delta_{a_1+a_2} = 0{,}04\%$.

Фәргин нисби хәтасы үчүн

$$\delta_{a_1-a_2} = \frac{0{,}0005 + 0{,}0005}{0{,}01} = 0{,}1$$

вә јахуд

$$\delta_{a_1-a_2} = 0{,}1 \cdot 100\% = 10\%$$

аларыг. Демәли,

$$\frac{\delta_{a_1-a_2}}{\delta_{a_1+a_2}} = \frac{0{,}1}{0{,}0004} = 250, \quad \delta_{a_1-a_2} = 250 \cdot \delta_{a_1+a_2},$$

јә'ни фәргин нисби хәтасы чәмин нисби хәтасындан 250 дәфә бөјүкдүр.

§ 7. ТӘГРИБИ ӘДӘДЛӘРИН ВУРУЛМАСЫ ВӘ БӨЛҮНМӘСИ

Тутаг ки, a_0 вә b_0 һәр һансы кәмијјәтин дәгиг гијмәтләри, a вә b исә онларын ујғун олараг тәгриби гијмәтләридир. Онда:

$$a_0 = a + \Delta_a \quad \text{вә} \quad b_0 = b + \Delta_b.$$

Бу дәгиг әдәдләрин һәр бирини ашағыдакы шәкилдә көстәрмәк олар:

$$a_0 = a + \Delta_a = a\left(1 + \frac{\Delta_a}{a}\right) = a(1+\delta_a),$$

$$b_0 = b + \Delta_b = b\left(1 + \frac{\Delta_b}{b}\right) = b(1+\delta_b).$$

Бурадан:

$$a_0 \cdot b_0 = ab(1+\delta_a)(1+\delta_b) = ab(1+\delta_a+\delta_b+\delta_a\delta_b).$$

Сонунчу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки ифадәдә, чох кичик олан нисби хәталарын һасилинин чәмләринә нисбәтән чох кичик олдуғуну нәзәрә алараг ону атмаг олар. Онда ахырынчы бәрабәрлији

$$a_0 b_0 = ab(1 + \delta_a + \delta_b)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурадан көрүнүр ки, һасилин нисби хәтасы вуругларын нисби хәталары чәминә бәрабәрдир:

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b.$$

Бу мүнасибәт сонлу сајда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тәгриби әдәдләринин һасили үчүн дә доғрудур.

$r_0 = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ әдәдинин нисби хәтасы

$$\delta_{r_0} = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \ldots + \delta_{a_n} \qquad (1)$$

дүстуру илә һесабланыр.

Көстәрмәк олар ки, тәгриби b әдәди илә $\frac{1}{b}$ әдәдинин нисби хәталары бәрабәрдир. Онда

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

олдуғундан

$$\delta_{a/b} = \delta_a + \delta_{1/b} = \delta_a + \delta_b$$

вә јахуд

$$\delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b \qquad (2)$$

бәрабәрлијини аларыг. Бурадан көрүнүр ки, ики тәгриби әдәдин нисбәтинин нисби хәтасы онларын нисби хәталарынын чәминә бәрабәрдир. (1) вә (2) мүнасибәтләрини ашағыдакы кими үмуми шәкилдә сөјләмәк олар:

Тәклиф 1. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m$ *тәгриби әдәдләр олдугда*

$$r = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m} \qquad (3)$$

ифадэсинин нисби хэтасы

$$\delta_r = \delta_{a_1} + \delta_{a_2} + \dots + \delta_{a_n} + \delta_{b_1} + \delta_{b_2} + \dots + \delta_{b_m} \qquad (4)$$

дүстуру илэ һесабланыр.

Тэгриби эдэдлэрин чэминин мүтлэг хэтасыны һесаблајаркэн (§ 6) $n+m$ эдэди бөјүк олдугда (4) дүстурундан истифадэ етмэк элверишли дејилдир.

Тэгриби a_k, b_j ($k=1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$) эдэдлэринин сајы $(m+n)$ бөјүк эдэддирсэ, онда (3) ифадэсинин нисби хэтасы Н. Г. Чеботарјовун

$$\delta_r = \sqrt{3(n+m)} \cdot \delta \quad (n+m>10) \qquad (5)$$

дүстуру илэ һесабланыр.

Әкэр верилмиш a_k, b_j тэгриби эдэдлэриндэ биринин нисби хэтасы јердэ галан эдэдлэрин нисби хэталарындан кифајэт гэдэр бөјүкдүрсэ, онда (3) ифадэсинин нисби хэтасы һэмин эдэдин нисби хэтасына бэрабэр һесаб едилир. Бу һалда r эдэдинин нисби хэтасында онлуг рэгэмлэрин сајыны эн бөјүк нисби хэтасы олан эдэдин онлуг рэгэмлэринин сајына бэрабэр көтүрмэк лазымдыр.

Эдэдин нисби хэтасы мэ'лум олдугда онун мүтлэг хэтасыны һесабламаг олар.

Т э к л и ф 2. *(3) ифадэсинин Δ_r мүтлэг хэтасы онун δ_r нисби хэтасы васитэсилэ*

$$\Delta_r = |r| \cdot \delta_r \qquad (6)$$

дүстуру илэ һесабланыр.

Мисал. Тэгриби $a_1 = 3{,}49$ вэ $a_2 = 8{,}6$ эдэдлэринин һасилини вэ һасилин мүтлэг вэ нисби хэтасыны тапмалы. $a = a_1 \cdot a_2$ олсун. Эдэдлэрин јазылышына көрэ $\Delta_{a_1} = 0{,}005$ вэ $\Delta_{a_2} = 0{,}05$ олдуғундан:

$$\delta_{a_1} = 0{,}0014 \quad \text{вэ} \quad \delta_{a_2} = 0{,}0058.$$

Бурадан:

$$\delta_a = 0{,}0072 \quad \text{вэ ја} \quad \delta_a = 0{,}72\%, \quad \Delta_a = a \cdot \delta_a = 0{,}21 = 0{,}2.$$

Мүтлэг хэта $\Delta_a = 0{,}2$ олдуғундан a_1 вэ a_2 эдэдлэринин һасилини там эдэдэ гэдэр јуварлаглашдырмалыјыг:

$$a_1 \cdot a_2 = 3{,}49 \cdot 8{,}6 = 30{,}014 \approx 30; \quad a = 30.$$

XI ФӘСИЛ

ФУНКСИЈА

§ 1. ДӘЈИШӘН КӘМИЈЈӘТЛӘР

Мүхтэлиф эдэди гијмэтлэр ала билэн кэмијјэтлэрэ *дэјишэн кэмијјэт* дејилир (IX фэсил, § 3). Адэтэн, ријазијјатда дэјишэн кэмијјэтлэр $x, y, z, \dots$ илэ, сабит кэмијјэтлэр исэ $a, b, c, \dots$ илэ ишарэ едилир.

Дэјишмэ характеринэ көрэ дэјишэн кэмијјэтлэр эсасэн ики група бөлүнүр:

1. Сонлу вэ ја һесаби гијмэтлэр ала билэн дэјишэн кэмијјэтлэр. Бунлара *дискрет типли* вэ ја садэчэ, *дискрет дэјишэн кэмијјэтлэр* дејилир.

Мэсэлэн, дэјишэн x кэмијјэти анчаг 2, 4, 6, 8, ... гијмэтлэрини ала билирсэ, о дискрет дэјишэн кэмијјэтдир. Дискрет дэјишэн кэмијјэтэ башга бир мисал натурал 1, 2, 3, ..., n, ... эдэдлэрини ала билэн дэјишэн кэмијјэтдир. Белэ дэјишэн кэмијјэтэ *«там гијмэтли дэјишэн»* дејилир вэ n илэ ишарэ едилир.

2. Өз дэјишмэ областындакы һэр һансы $x=x_0$ вэ $x=x_1$ гијмэтлэри илэ бэрабэр һэмин эдэдлэр арасында јерлэшэн бүтүн һэгиги эдэдлэри, јэ'ни $x_0<x<x_1$ гијмэтлэрини ала билэн дэјишэн кэмијјэтлэр. Белэ дэјишэн кэмијјэтлэрэ *кэсилмэз типли дэјишэн кэмијјэтлэр* дејилир. Мэсэлэн, (0, 1) интервалындакы бүтүн гијмэтлэри ала билэн x кэмијјэти кэсилмэз типли дэјишэн кэмијјэтдир.

Дэјишэн x кэмијјэтинин ала билдији бүтүн гијмэтлэр чохлуғуна онун *дэјишмэ областы* дејилир. Мэсэлэн, x кэмијјэти $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмэтлэри ала билирсэ, онда $[a, b]$ парчасы онун дэјишмэ областыдыр. x (вэ ја n) дискрет дэјишэн кэмијјэти бүтүн натурал эдэдлэри ала билирсэ, онда

$$N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

чохлуғу онун дэјишмэ областыдыр.

Гејд етмэк лазымдыр ки, кэсилмэз типли x дэјишэн кэмијјэтинин дэјишмэ областы (a, b) интервалы, $[a, b]$ парчасы, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, \infty)$ вэ $(-\infty, a]$ јарыминтерваллары вэ бүтүн эдэд оху $(-\infty, \infty)$ вэ с. ола билэр.

§ 2. ФУНКСИЈА

Верилмиш x вэ y дэјишэн кэмијјэтлэри бир-бириндэн асылы олмајараг истэнилэн гијмэтлэри ала билирсэ, јэ'ни биринин алдығы гијмэтлэр, о биринин бу вэ ја башга гијмэтлэри алыб-алмамасындан асылы дејилсэ, онлара *асылы олмајан* вэ ја *сэрбэст дэјишэн кэмијјэтлэр* дејилир. Ајдындыр ки, белэ дэјишэн кэмијјэтлэри ајрылыгда өјрэнмэјин һеч бир мэ'насы јохдур. Буна көрэ дэ ријазијјат елминдэ асылы олан дэјишэн кэмијјэтлэр өјрэнилир.

Тә'риф. *Дәјишмә областлары ујғун олараг X вә Y олан ики x вә y дәјишән кәмијјәтини көтүрәк. Һәр һансы f гајда вә ја ганунун васитәсилә дәјишән x кәмијјәтинин X дәјишмә областындакы һәр бир гијмәтинә, дәјишән y кәмијјәтинин мүәјјән бир гијмәтини (Y чохлуғундан) ујғун вә ја гаршы гојмаг мүмкүндүрсә, онда X чохлуғундан Y чохлуғуна функсија (X чохлуғунун Y-ә ин'икасы) верилмишдир дејилир вә $y = f(x)$ илә көстәрилир.*

Функсија бә'зән

$$Y = y(x),\ y = f(x),\ y = \varphi(x),\ y = F(x),\ ...$$

вә с. шәклиндә көстәрилир. Бу ифадәләрдәки f, φ, F ... һәрфләри һансы ганун вә ја гајдалар васитәсилә x-ин верилмиш гијмәтинә y-ин ујғун гијмәтинин гаршы гојулмасыны көстәрир.

Бу һалда x-ә *сәрбәст дәјишән* вә ја *аргумент*, y-ә исә функсијанын *асылы дәјишәни* вә ја *гијмәти* дејилир. X чохлуғуна функсијанын *тә'јин областы,* Y чохлуғуна исә онун *гијмәтләри чохлуғу* дејилир.

$f(X)$ илә Y чохлуғунун елә елементләри чохлуғуну ишарә едәк ки, онларын һәр бири $y = f(x)$ функсијасынын һеч олмазса бир $x \in X$ нөгтәсиндә алдығы гијмәт олсун. Ајдындыр ки, $f(X) \subset Y$, вә $f(X)$, Y чохлуглары бәрабәр олмаја да биләр.

Хүсуси һалда, $f(X) = Y$ оларса, онда дејирләр ки, $y = f(x)$ функсијасы X чохлуғуну Y чохлуғу үзәринә ин'икас етдирир. Бу һалда истәнилән $x_1 \neq x_2$ ($x_1 \in X$, $x_2 \in X$) үчүн $f(x_1) \neq f(x_2)$ оларса, онда X чохлуғунун Y чохлуғуна $y = f(x)$ ин'икасына *гаршылыглы биргијмәтли ин'икас* дејилир.

X чохлуғу әдәди чохлуг олдугда $f(x)$ функсијасына *һәгиги дәјишәнли функсија* дејилир.

Тәбиәтдә асылы дәјишән кәмијјәтләр истәнилән гәдәр чохдур.

Мисал 1. R радиуслу даирәнин саһәси

$$S = \pi R^2$$

дүстуру илә һесабланыр.

Ајдындыр ки, R радиусу дәјишдикдә она ујғун олараг даирәнин саһәси дә дәјишәчәкдир, јә'ни R-ин һәр бир гијмәтинә S-ин мүәјјән бир гијмәти ујғундур. Бу ујғунлугла бир $S = f(R)$ функсијасы тә'јин олунур.

Бу функсијанын ујғунлуг гануну (f) көстәрир ки, R-ин верилмиш гијмәтинә S-ин ујғун олан гијмәтини тапмаг үчүн ону квадрата јүксәлдиб нәтичәни π әдәдинә вурмаг лазымдыр.

Мисал 2.

$$y = x^2 + \lg_a x$$

бәрабәрлији илә бир $y = f(x)$ функсијасы тә'јин олунур. Бурада һәр бир мүсбәт x әдәдинә y-ин бир гијмәти ујғундур. Мәнфи әдәдләр вә сыфыр верилмиш функсијанын тә'јин областына дахил дејилдир.

Белә мисаллар чох көстәрмәк олар.

Јухарыда функсијаја вердијимиз тә'риф һаггында бә'зи гејдләр едәк.

Гејд 1. Тә'рифдән ајдындыр ки, функсија верилдикдә x-ин һәр бир гијмәтинә онун мүәјјән бир y гијмәти ујғун олмалыдыр. Бу ујғунлуғун һансы ганун-гајда вә ја васитәләрлә јарадылмасынын принсипиал һеч бир мә'насы јохдур. Тә'рифдә бу ујғунлуғун характери һаггында һеч бир тәләб гојулмур.

Гејд 2. Тә'рифдә аргументин мүхтәлиф гијмәтләринә функсијанын да һөкмән мүхтәлиф гијмәтләринин ујғун олмасы тәләб едилмир. Аргументин бүтүн гијмәтләринә функсијанын анчаг бир гијмәти ујғун ола биләр. Буна көрә дә аргументин бүтүн гијмәтләриндә ејни сабит C гијмәти алан функсијаја да бахылыр.

Верилмиш $y = f(x)$ функсијасынын $x_0 \in X$ нөгтәсиндә алдығы гијмәтә онун һәмин нөгтәдәки *хүсуси гијмәти* дејилир вә

$$y_0 = f(x_0) = y\big|_{x=x_0} = f(x)\big|_{x=x_0}$$

шәклиндә јазылыр.

Мисал 3. $f(x) = x^2 + \lg x$ функсијасынын $x = 1$ вә $x = 10$ нөгтәләриндәки гијмәтләри

$$f(1) = 1$$

вә

$$f(10) = 101$$

олачагдыр.

§ 3. ФУНКСИЈАНЫН ГРАФИКИ

Фәрз едәк ки, $Y = f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмушдур. Мүстәви үзәриндә дүзбучаглы Oxy координат системи көтүрәк вә абсис оху үзәриндә $[a, b]$ парчасыны (аргументин дәјишмә областыны) гејд едәк.

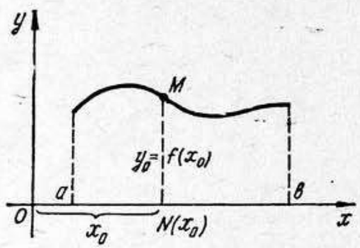
$[a, b]$ парчасынын һәр һансы нөгтәси $x = x_0$ вә ја $N(x_0)$ олсун (81-чи шәкил). Бу нөгтәдә $y = f(x)$ функсијасы $y_0 = f(x_0)$ гијмәтини алыр. $N(x_0)$ нөгтәсиндән абсис охуна перпендикулјар чәкәк. Бу перпендикулјар үзәриндә елә M нөгтәси вар ки, $NM = f(x_0)$ олур.

Бундан сонра NM дүз хәтт парчасынын M уч нөгтәсинә $f(x)$ функсијасынын $x = x_0$ нөгтәсиндәки гијмәтинин һәндәси көстәрилиши һесаб едәчәјик. Бу гајда илә $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасынын һәр бир нөгтәсиндәки гијмәтини һәндәси олараг көстәрән нөгтәни тапа биләрик. $y = f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасындакы гијмәтләрини һәндәси көстәрән бүтүн нөгтәләрин һәндәси јери һәмин функсијанын *һәндәси көстәрилиши* вә ја *$[a, b]$ парчасында графики* адланыр. Башга сөзлә, абсисләри аргументин гијмәтләри, ординатлары исә функсијанын аргументин һәмин гијмәтләринә ујғун гијмәтләри олан $M(x, y)$ нөгтәләринин һәндәси јеринә *$y = f(x)$ функсијасынын графики* дејилир.

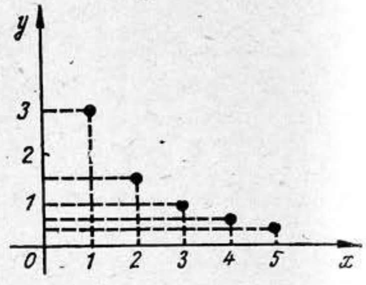
Тә'јин областы $[a, b]$ парчасы (вә ја һәр һансы сонсуз чохлуг) олан функсијанын графикини практики олараг гурмаг үчүн онун

бүтүн гијмәтләрини һәндәси көстәрән нөгтәләри тапмаг мүмкүн олмур.

Буна көрә дә верилмиш функсијанын графики, ја онун мүәјјән хассәләринә әсасән вә ја да график үзәриндә јерләшән сонлу сајда $M_к(x_к, y_к)$ $(к=\overline{1, n})$ нөгтәләрини тапыб онлары бүтөв хәтлә бирләшдирәрәк тәгриби гурулур.



Шәкил 81.



Шәкил 82.

Ајдындыр ки, верилмиш функсијанын графики онун тә'јин областындан асылы олараг бүтөв бир хәтт, һиссә-һиссә хәтләр чохлуғу, изолә едилмиш нөгтәләр чохлуғу вә с. шәклиндә ола биләр. Буну ашағыдакы мисаллардан да ајдын көрмәк олур.

Мисал 1. $N = \{1, 2, 3, ...\}$ чохлуғунда тә'јин олунмуш $f(x) = \frac{3}{x}$ функсијасынын графики сонсуз сајда изолә едилмиш нөгтәләр чохлуғундан ибарәтдир (82-чи шәкил).

Мисал 2. $y=x+5$ функсијасынын графики дүз хәтдир. Бу дүз хәтти гурмаг үчүн x аргументинә $x=0$ вә $x=-5$ гијмәтләрини верәрәк функсијанын ујғун гијмәтләрини һесаблајаг:

$$y = 5 \quad \text{вә} \quad y = 0.$$

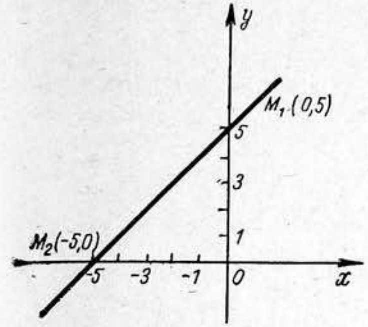
Демәли, $M_1(0, 5)$ вә $M_2(-5, 0)$ нөгтәләриндән кечән дүз хәтт верилмиш функсијанын графикидир (83-чү шәкил).

Верилмиш функсијанын тә'јин областы бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу, јә'ни $(-\infty, \infty)$ чохлуғудур.

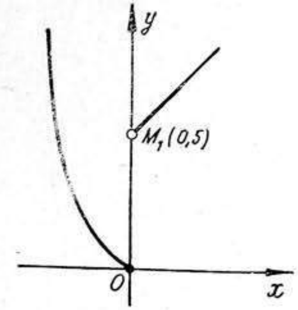
Мисал 3. Ашағыдакы кими ики дүстурла тә'јин олунан

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \ x\leqslant 0 & \text{олдугда,} \\ x+5, \ x>0 & \text{олдугда} \end{cases}$$

функсијасынын графики ики һиссәдән ибарәт хәтдир: Oy охундан сол тәрәфдә (сол јарыммүстәвидә) парабола һиссәси, сағ тәрәфдә исә 83-чү шәкилдәки дүз хәттин һиссәсидир (84-чү шәкил). Бахдығымыз функсијанын тә'јин областы бүтүн әдәд оху вә ја $(-\infty, \infty)$ чохлуғудур.



Шәкил 83.



Шәкил 84.

Мисал 4.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \ \text{олдугда,} \\ 1, & x>0 \ \text{олдугда,} \\ 0, & x=0 \ \text{олдугда} \end{cases}$$

кими тә'јин олунан $f(x) = \operatorname{sign} x$ (белә охунур: «еф икс бәрабәрдир сигниум x») функсијасынын графики ики шүадан вә $O(0, 0)$ нөгтәсиндән ибарәтдир (85-чи шәкил).

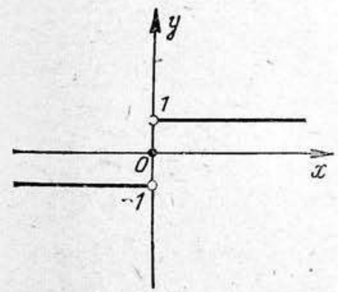
Бу функсијанын тә'јин областы $(-\infty, \infty)$ чохлуғудур.

Мисал 5. Тә'јин областы $(-\infty, \infty)$ чохлуғу олан

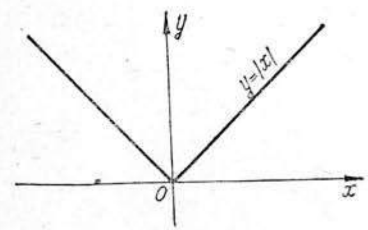
$$y = |x|$$

вә ја

$$y = \begin{cases} x, & x\geqslant 0 \ \text{олдугда,} \\ -x, & x<0 \ \text{олдугда} \end{cases}$$



Шәкил 85.



Шәкил 86.

функсијасынын графики 1-чи вә 2-чи координат бучагларынын тәнбөләнләриндән ибарәт олан сыныг хәтдир (86-чы шәкил).

1349—14

§ 4. ПОЛЈАР КООРДИНАТ СИСТЕМИНДӘ ФУНКСИЈА ГРАФИКИНИН ГУРУЛМАСЫ

Фәрз едәк ки, $\rho=f(\varphi)$ функсијасы полјар координатларла верилмишдир. φ аргументинин функсијанын варлыг областына дахил олан һәр бир гијмәтинә ρ-нун бир гијмәти ујғун олар. ρ вә φ-нин һәр бир белә гијмәтләри чүтү полјар координат системиндә бир M нөгтәсинин координатларыдыр: $M=M(\rho, \varphi)$. Беләликлә, алынан бүтүн $M(\rho, \varphi)$ нөгтәләринин һәндәси јери бир хәтт верәр. Бу хәттә верилмиш функсијанын полјар координат системиндә *графики* дејилир.

Верилмиш $\rho=f(\varphi)$ функсијасынын полјар координат системиндә графикини гурмаг үчүн φ аргументинә функсијанын варлыг областына дахил олан $\varphi=\varphi_к$ $(к=1, 2, ..., n)$ гијмәтләрини верәрәк, функсијанын ујғун $\rho_к=f(\varphi_к)$ $(к=1, 2, ..., n)$ гијмәтләри һесабланыр. Бу $\rho_к$ вә $\varphi_к$ әдәдләри полјар координат системиндә $M_к(\rho_к, \varphi_к)$ $(к=1, 2, ..., n)$ нөгтәләрини тә'јин едир. Һәмин нөгтәләри тапыб, онлары бүтөв хәтлә бирләшдирсәк бир әјри аларыг. Бу әјри верилмиш функсијанын полјар координат системиндә *тәгриби графики* олар.

Мисал 1. $\rho=a\varphi$ функсијасынын графикини гурмалы, бурада a сабит әдәддир.

Бу мәгсәдлә φ аргументинә

$$\varphi=0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi;\ \frac{3\pi}{2};\ 2\pi,...$$

гијмәтләрини верәрәк, ρ-нун ујғун гијмәтләрини тәгриби олараг һесаблајаг:

$$\rho=0;\ 0{,}78\,a;\ 1{,}57\,a;\ 2{,}36\,a;\ 3{,}14\,a;\ 4{,}71\,a;\ 6{,}28\,a;\ ....$$

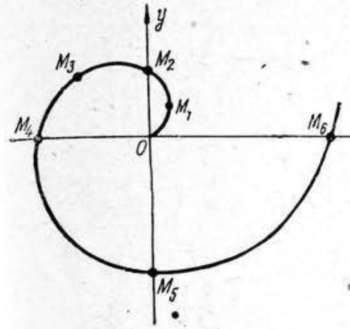
Бурада бир ганунаујғунлуғу гејд едәк: әкәр $0{,}78\cdot a=b$ гәбул етсәк, онда:

$$1{,}57a\approx 2b;\ 2{,}36a\approx 3b;$$
$$3{,}14a\approx 4b;\ 4{,}71a\approx 6b;$$
$$6{,}28a\approx 8b;\ ...$$

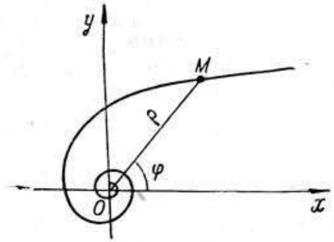
Инди мүстәви үзәриндә

$O(0, 0)$; $M_1\left(b, \frac{\pi}{4}\right)$; $M_2\left(2b, \frac{\pi}{2}\right)$; $M_3\left(3b, \frac{3\pi}{4}\right)$; $M_4(4b, \pi)$; $M_5\left(6b, \frac{3\pi}{2}\right)$; $M_6(8b, 2\pi)$; ... нөгтәләрини гураг вә һәмин нөгтәләри бүтөв хәтлә бирләшдирәк (87-чи шәкил). Алынан әјри верилмиш функсијанын графикидир. Бу әјрјә *Архимед спиралы* дејилир. Архимед спиралына, өз башланғычы әтрафында мүнтәзәм фырланан шүа үзәриндә мүнтәзәм һәрәкәт едән нөгтәнин чыздығы әјри кими дә бахмаг олар.

Мисал 2. $\rho=\frac{a}{\varphi}$ $(a=\text{const})$ функсијасынын графикини гурмалы.



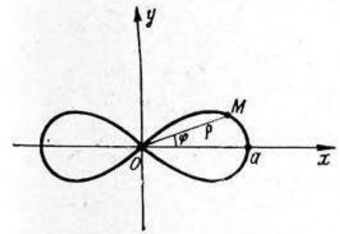
Шәкил 87.



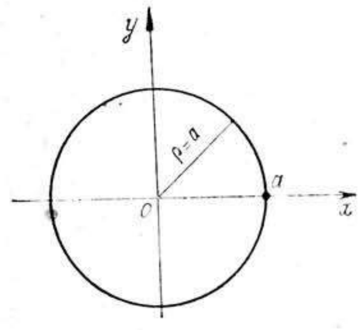
Шәкил 88.

Бу функсијанын графики дә әввәлки мисалда верилән функсијанын графики кими гурулур (88-чи шәкил). Алынан әјри *һиперболик спирал* адланыр.

Мисал 3. $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$ функсијасынын графики *Лемнискат* адланан *хәтдир* (89-чу шәкил).



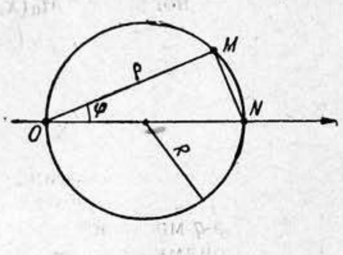
Шәкил 89.



Шәкил 90.

Функсијанын ифадәсиндән ајдындыр ки, $\varphi=0$ олдугда $\rho=a$ олур. φ аргументи 0-дан $\frac{\pi}{4}$-ә гәдәр дәјишдикдә ρ әдәди a-дан сыфра гәдәр азалыр.

φ-нин $\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ гијмәтләринә ρ-нун хәјали гијмәтләри ујғундур, јә'ни аргументин һәмин гијмәтләринә Лемнискат үзәриндә һеч бир нөгтә ујғун дејилдир.



Шәкил 91.

Мисал 4. $\rho=a$ ($a=\text{const}$) функсијасынын графики мәркәзи полјус нөгтәсиндә, радиусу a-ја бәрабәр олан чеврәдир (90-чы шәкил).

Полјусдан кечән вә мәркәзи полјар ох үзәриндә олан R радиуслу чеврәнин (91-чи шәкил) тәнлији исә

$$\rho = 2R\cos\varphi$$

шәклиндә јазылыр. Доғрудан да, чеврә үзәриндәки ихтијари нөгтә $M(\rho, \varphi)$ оларса, онда $ON = 2R$ вә $\angle OMN = \frac{\pi}{2}$ олар. Дүзбучаглы $\triangle OMN$-дән тәләб олунан тәнлик алыныр:

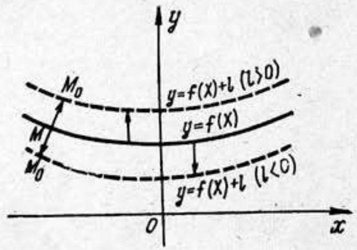
$$\frac{\rho}{2R} = \cos\varphi, \quad \rho = 2R\cos\varphi.$$

§ 5. ГРАФИКЛӘРИН ДЕФОРМАСИЈАСЫ

Верилмиш $y = f(x)$ функсијасынын графики мә'лум олдугда онунла «гоһум» олан

$$y = mf(px+q)+l \quad (m\neq 0,\ p\neq 0) \qquad (1)$$

функсијасынын графикини гурмаг мүмкүндүрмү?



Шәкил 92.

Мүмкүндүр. $y=f(x)$ функсијасынын графикиндән (1) функсијасынын графикини алмаг үчүн онун үзәриндә ашағыда көстәрилдији кими деформасија апармаг лазымдыр.

1. Верилмиш $y=f(x)$ функсијасынын графикиндән

$$y = f(x) + l \qquad (2)$$

функсијасынын графикини алмаг үчүн Oy оху үзрә онун јерини l мәсафәси гәдәр дәјишмәк лазымдыр: $l > 0$ олдугда $y = f(x)$ функсијасынын графики Oy оху үзрә l мәсафәси гәдәр јухарыја, $l < 0$ олдугда исә $|l|$ мәсафәси гәдәр ашағыја көчүрүлмәлидир (92-чи шәкил). Бу о демәкдир ки, верилмиш $y = f(x)$ функсија-

сынын графики үзәриндә олан һәр бир $M(x, y)$ нөгтәсини $M_0(x, y+l)$ илә әвәз етмәк лазымдыр.

2. Верилмиш $y = f(x)$ функсијасынын графикиндән

$$y = f(x+q) \qquad (3)$$

функсијасынын графикини алмаг үчүн ону Ox оху истигамәтиндә q мәсафәси гәдәр һәрәкәт етдирмәк лазымдыр: $q > 0$ олдугда график q мәсафәси гәдәр сола, $q<0$ олдугда исә q мәсафәси гәдәр саға көчүрүлмәлидир. Бу о демәкдир ки, верилмиш $y = f(x)$ функсијасынын графики үзәриндә олан һәр бир $M(x, y)$ нөгтәсини $M_0(x-q, y)$ нөгтәси илә әвәз етмәк лазымдыр (93-чү шәкил).

3. Верилмиш $y = f(x)$ функсијасынын графикиндән

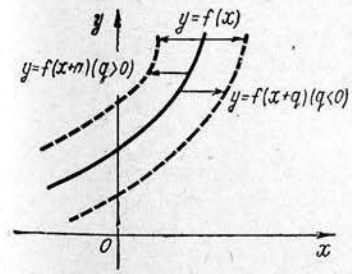
$$y = mf(x) \qquad (4)$$

функсијасынын графикини алмаг үчүн Oy оху истигамәтиндә график «m дәфә дартылмалыдыр»: $|m| > 1$ олдугда график m дәфә дартылыр (узаныр), $|m|<1$ олдугда исә m дәфә сыхылмалыдыр (гысалдылмалыдыр). Бу мәгсәдлә верилмиш график үзәриндә олан һәр бир $M(x, y)$ нөгтәсини $M_0(x, my)$ нөгтәси илә әвәз етмәк лазымдыр (94-чү шәкил).

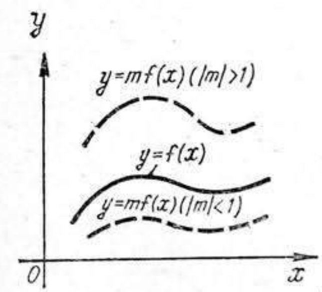
4. Верилмиш $y = f(x)$ функсијасынын графикиндән

$$y = f(px) \qquad (5)$$

функсијасынын графикини алмаг үчүн верилмиш графики Ox оху истигамәтиндә «p дәфә дартмаг» лазымдыр. Бу исә верилмиш

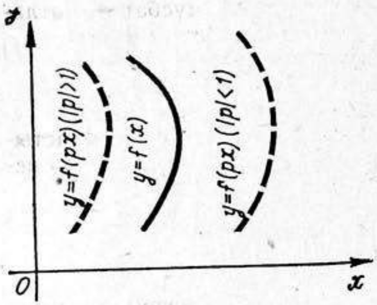


Шәкил 93.



Шәкил 94.

график үзәриндә олан һәр бир $M(x, y)$ нөгтәсини $M_0(x/p, y)$ нөгтәси илә әвәз етмәк демәкдир (95-чи шәкил).



Шәкил 95.

Ашкардыр ки, верилмиш $y=f(x)$ функсијасынын графикиндән (1) функсијасынын графикини алмаг үчүн онун үзәриндә 1—4-чү бәнддә көстәрилән деформасијалары лазыми ардычыллыгла апармаг лазымдыр.

Охшар тајда илә верилмиш $y=f(x)$ функсијасынын графикиндән $y=|f(x)|$, $y=\dfrac{1}{f(x)}$, $y=\dfrac{1}{|f(x)|}$ вә с. функсијаларын графикләрини дә алмаг олар.

§ 6. ФУНКСИЈАНЫН ВЕРИЛМӘ ҮСУЛЛАРЫ

$y=f(x)$ функсијасы о заман верилмиш, мә'лум вә ја тә'јин олунмуш һесаб едилир ки: 1) функсијанын тә'јин областы, јә'ни x аргументинин ала билдији гијмәтләр чохлуғу көстәрилсин; 2) x-ин һәр бир гијмәтинә y-ин мүәјјән бир гијмәтини ујғун тојма гануну, јә'ни x вә y арасындакы ујғунлуг гануну көстәрилсин.

Функсија әсасән аналитик үсулла, чәдвәл шәклиндә, график үсулла вә програм васитәсилә верилир.

Функсијанын аналитик үсулла верилмәси

Функсија, аргументин верилмиш гијмәти үзәриндә һансы әмәлләри һансы ардычыллыгла апараraг функсијанын ујғун гијмәтини алмағы көстәрән дүстур илә верилдикдә дејирләр ки, функсија аналитик үсулла верилмишдир.

Функсија $y=f(x)$ дүстуру илә верилдикдә бәрабәрлијин сағ тәрәфинә ($f(x)$-ә) функсијанын *аналитик ифадәси* дејилир.

Функсија аналитик үсулла верилдикдә онун тә'јин областы бә'зән көстәрилмир. Буну функсијанын аналитик ифадәсинә әсасән тапмаг мүмкүндүр.

Верилмиш $y=f(x)$ функсијасынын аналитик ифадәсинин мә'насы олдуғу вә функсијанын сонлу һәгиги гијмәтләр алдығы нөгтәләр чохлуғуна һәмин функсијанын *варлыг областы* дејилир.

Мисал 1. Аналитик үсулла верилмиш

$$y=x^2+\lg x$$

функсијасынын варлыг областыны тапмалы.

Функсијанын $x^2+\lg x$ аналитик ифадәсинин биринчи һәдди олан x^2, аргументин истәнилән гијмәтиндә сонлу һәгиги гијмәтләр алыр. Икинчи һәдди $\lg x$ исә аргументин анчаг мүсбәт гијмәтләриндә тә'јин олунмушдур. Демәли, верилмиш функсијанын варлыг областы аргументин мүсбәт гијмәтләр чохлуғу, јә'ни $(0, \infty)$ интервалыдыр.

Һәр һансы чохлугда тә'јин олунмуш функсијаны онун аналитик ифадәси илә гарышдырмаг олмаз. Функсија тә'јин областынын мүхтәлиф һиссәләриндә мүхтәлиф аналитик ифадәләрлә верилә биләр.

Мисал 2.

$$y=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0 \text{ олдугда}, \\ x+5, & x>0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функсијасы ики бәрабәрликлә бүтүн әдәд оху үзәриндә тә'јин олунмушдур. Лакин әдәд охунун (јә'ни тә'јин областынын) бир һиссәсиндә онун аналитик ифадәси x^2 ($x\leqslant 0$ олдугда), о бири һиссәсиндә ($x>0$ олдугда) исә $(x+5)$-дир. Бурадан ајдындыр ки, функсија бир вә ја бир нечә бәрабәрлик васитәсилә верилә биләр.

Гејд етмәк лазымдыр ки, бүтүн функсијалар һеч дә аналитик үсулла верилмир. Мүәјјән чохлугда тә'јин олунмуш функсијанын аналитик ифадәси мә'лум олмаја да биләр.

Функсијанын аналитик үсулла верилмәси садә, јығчам вә үзәриндә ријази әмәлләр апармаг үчүн мүнасиб олса да, функсија белә верилдикдә функсионал асылылығын характери, функсија гијмәтләринин аргументин гијмәтләриндән асылы олараг нечә дәјишмәси әјани көрүнмүр.

Функсијанын чәдвәл шәклиндә верилмәси

Функсијанын аналитик үсулла верилмәсинин ријази тәдгигатларда бөјүк үстүнлүјү вардыр. Лакин бу үсулла верилмиш чох ишләдилән бә'зи функсијаларын гијмәтләрини тапмаг үчүн бә'зән бир чох мүрәккәб һесабламалар апармаг лазым кәлир. Практики иш заманы бу үсулла функсијаларын гијмәтини тапмаг әлверишли дејилдир. Буна көрә дә чох ишләдилән бә'зи $y=f(x)$ функсијаларынын аргументин мүәјјән гијмәтләринә ујғун олан гијмәтләри габагчадан һесабланыб, ашағыдакы чәдвәл шәклиндә көстәрилир:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	$y_3=f(x_3)$	...	$y_n=f(x_n)$

Аргументин верилмиш гијмәтинә (әлбәттә, аргументин бу гијмәти чәдвәлдәки $x_1, x_2, ..., x_n$ гијмәтләри арасында варса) функсијанын һансы гијмәти ујғун олдуғу чәдвәлдән асанлыгла тапылыр. Бу һалда дејирләр ки, функсија чәдвәл васитәсилә верилмишдир.

Чәдвәлдәки x_i $(i = \overline{1, n})$ әдәдләриндән дүзәлмиш $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, ... фәргләри һәмин *чәдвәлин аддымлары* адланыр. Бу аддымлар ејни, јә'ни $x_{i+1} - x_i = h$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$ олдугда она *сабит аддымлы* чәдвәл дејилир. Бу һалда аргумент анчаг x_1, $x_1 + h$, $x_2 + 2h$, ... гијмәтләрини ала билир. Практики ишләрдә belə чәдвәлләрдән истифадә етмәк даһа әлверишлидир.

Бир сыра һадисәләри тәчрүби олараг өјрәнәркән, дәјишән кәмијјәтләр арасындакы асылылыг бә'зән чәдвәл шәклиндә јарадылыр.

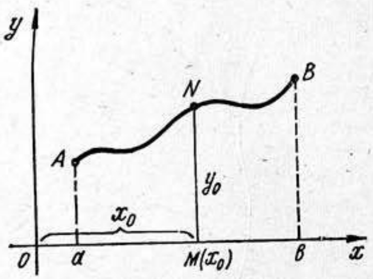
Тригонометрик вә логарифмик функсијаларын чәдвәл васитәсилә верилмәси орта мәктәбдән мә'лумдур.

Функсијанын графики үсулла верилмәси

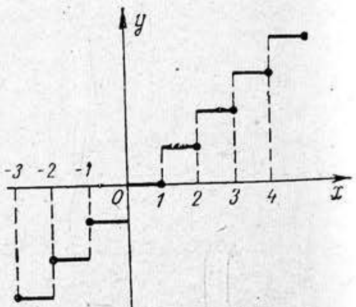
Тутаг ки, мүстәви үзәриндә һәр һансы AB әјриси верилмишдир (96-чы шәкил). Фәрз едәк ки, абсис охуна перпендикулјар галдырылмыш дүз хәтләр бу әјрини анчаг бир нөгтәдә кәсир. A нөгтәсинин абсиси a, B нөгтәсинин абсиси исә b олсун. x-ин $[a, b]$ парчасындакы һәр бир гијмәтинә ујғун олан M нөгтәсиндән абсис охуна перпендикулјар кечирәк. Бу перпендикулјар AB әјрисини бир N нөгтәсиндә кәсәр. MN парчасынын гијмәти y_0 олсун. Бу y_0 әдәдини аргументин x_0 гијмәтинә ујғун гојаг:

$$x_0 \to y_0.$$

Беләликлә, јухарыдакы гурма васитәсилә x-ин $[a, b]$ парчасындакы һәр бир гијмәтинә бир y әдәди гаршы (ујғун) гојулур. Демәли, верилмиш әјринин ординаты (y) абсисин (x) функсијасыдыр вә бу функсионал асылылыг $(y = y(x))$ AB әјрисинин верилмәси илә тамамилә тә'јин олунур. Бу һалда дејирләр ки, $y = y(x)$ функсијасы графики үсулла верилмишдир.



Шәкил 96.



Шәкил 97.

Функсијанын графики үсулла верилмәсинин бир үстүн чәһәти ондан ибарәтдир ки, һәмин функсијанын дәјишмә характерини әјани олараг көрмәк мүмкүн олур. Бундан башга, бир сыра мәсәләрин һәллиндә дәјишән кәмијјәтләр арасындакы функсионал асылылығы бә'зән анчаг графики олараг алмаг мүмкүн олур. Мәсәлән, барограф адланан чиһаз атмосфер тәзјигинин замандан асылы олараг дәјишмәсини графики олараг чызыр. Бу график исә учан тәјјарәнин јердән олан јүксәклијини замандан асылы олараг тә'јин етмәјә имкан верир.

Функсијанын програм васитәсилә верилмәси

Бу үсулла аргументин верилмиш гијмәтинә функсијанын ујғун гијмәтини тапмаг үчүн мүасир һесаблама машынларындан истифадә олунур. Аргументин верилмиш гијмәтләринә ујғун функсија гијмәтләрини тапмаг гануну (мәсәлән, ријази дүстур) програм шәклиндә јазылыр вә һесаблама машынына дахил едилир. Машын көстәрилән програм әсасында функсијанын гијмәтләрини һесаблајыр.

Гејд. Биз функсијанын әсас верилмә үсулларыны (аналитик, чәдвәл, график, програм) көстәрдик. Функсија булардан фәргли башга үсулла да верилә биләр. Мәсәлән, функсијанын верилмә гајдасыны сөзләрлә дә тәсвир етмәк олар.

Мисал 3. Дирихле функсијасы ашағыдакы шәкилдә тә'јин олунур:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ расионал әдәд олдугда}, \\ 0, & x \text{ иррасионал әдәд олдугда}. \end{cases} \qquad (1)$$

Бу функсијанын верилмә гајдасы сөзләрлә тәсвир олунмушдур.

Мисал 4. $[x]$ илә x әдәдини ашмајан ән бөјүк там әдәди ишарә етмәклә

$$y = [x] \qquad (2)$$

функсијасыны тә'јин едә биләрик. Буна x-ин там һиссәси вә ја антје x функсијасы дејилир.

(2) функсијасынын тә'јин областы бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғудур. $[2] = 2$, $[1{,}3] = 1$, $[-0{,}5] = -1$ вә с. Онун графики 97-чи шәкилдә көстәрилән «Пилләвары» хәтдир. Бу функсија сөзләрлә верилмишдир.

§ 7. ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКСИЈА

Функсија аналитик үсулла верилдикдә ики һал ола биләр: x (аргумент) вә y (функсија) арасындакы асылылығы ифадә едән ријази дүстур y-ә нәзәрән һәлл олунмуш шәкилдә, јә'ни $y = f(x)$ шәклиндә верилә биләр. Бу һалда функсија ашкар шәкилдә верилмишдир дејилир.

Мисал 1. $y = 2x + 1$, $y = 2x^3$, $y = x^3 + 3x + 1$ вә с. функсијалары ашкар шәкилдә верилмишдир.

Ашкар шәкилдә верилмиш $y = f(x)$ функсијасына *ашкар функсија* дејилир.

x вә y арасындакы асылылығы ифадә едән ријази дүстур y-ә нәзәрән һәлл олунмамыш шәкилдә, јә'ни

$$F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

шәклиндә верилдикдә, дејирләр ки, $y = y(x)$ вә ја $y = f(x)$ функсијасы гејри-ашкар шәкилдә верилмишдир. Бу һалда тә'јин олунан $y = y(x)$ функсијасына *гејри-ашкар функсија* дејилир.

(1) тәнлији илә верилмиш гејри-ашкар функсијаны бә'зән y-ә нәзәрән һәлл едәрәк, ашкар шәклә кәтирмәк мүмкүн олур. Бир чох һалларда исә (1) тәнлијини y-ә нәзәрән һәлл етмәк чох чәтин олур вә ја мүмкүн олмур. Тәрсинә, функсија $y = f(x)$ ашкар шәкилдә верилдикдә ону $y - f(x) = 0$ шәклиндә јазмагла гејри-ашкар шәкилдә верилмиш функсија аларыг.

Мисал 2. $3x - y + 2 = 0$ тәнлији илә y дәјишәни x-ин гејри-ашкар функсијасы кими верилмишдир. Һәмин тәнлији y-ә нәзәрән һәлл едәрәк функсијаны

$$y = 3x + 2$$

кими ашкар шәклә кәтирмәк олур.

(1) шәклиндә верилмиш һәр бир тәнлик бир функсијаны тә'јин едир демәк сәһвдир. Белә тәнлик ола биләр ки, һеч бир функсијаны тә'јин етмәсин вә ја бир нечә функсијаны тә'јин етсин.

Мисал 3. $x^2 + y^2 + 5 = 0$ тәнлији һеч бир функсија тә'јин етмир. x-ин һәгиги гијмәтләриндә y-ин бу тәнлији өдәјән һеч бир һәгиги гијмәти јохдур.

Мисал 4. $x^2 + y^2 - 5 = 0$ тәнлији $y = +\sqrt{5 - x^2}$ вә $y = -\sqrt{5 - x^2}$ кими ики функсијаны тә'јин едир.

(1) тәнлији илә верилмиш гејри-ашкар $y = y(x)$ функсијасынын тә'јин областындан көтүрүлмүш x_0 нөгтәсиндә гијмәтини һесабламаг үчүн һәмин тәнликдә x әвәзинә x_0 јазараг, алынан

$$F(x_0, y) = 0$$

тәнлијини y-ә нәзәрән «һәлл етмәк лазымдыр».

Беләликлә, һәр һансы чохлугдан көтүрүлмүш һәр бир x-ә гаршы y-ин

$$F(x, y) = 0$$

тәнлијини өдәјән гијмәтини ујғун гојсаг, (1) тәнлији илә һәмин чохлугда тә'јин олунмуш гејри-ашкар $y = y(x)$ функсијасыны алмыш оларыг.

§ 8. ФУНКСИЈАНЫН ПАРАМЕТРИК ШӘКИЛДӘ ВЕРИЛМӘСИ

Функсијанын аналитик үсулла верилмәсинин бир јолуну да көстәрәк.

Тутаг ки, x (аргумент) вә y (функсија) дәјишәнләри башга бир t дәјишәнинин ашкар функсијасы шәклиндә верилмишдир:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} t \in T. \qquad (1)$$

t-нин T чохлуғундакы һәр бир t_0 гијмәтинә (1) мүнасибәти васитәсилә x вә y-ин $x_0 = \varphi(t_0)$ вә $y_0 = \psi(t_0)$ гијмәтләри ујғун гојулур. Бу әдәдләрин икинчисини биринчисинә гаршы гојсаг

$$x_0 \to y_0, \qquad (2)$$

онда y дәјишәни x-ин функсијасы кими тә'јин олунар. Ајдындыр ки, (1) мүнасибәти бир вә ја бир нечә функсијаны тә'јин едә биләр.

Функсијанын белә үсулла верилмәсинә онун *параметрик шәкилдә верилмәси*, t-јә исә *параметр* дејилир.

Мисал 1.

$$\left.\begin{array}{l} x = t - 2, \\ y = 3t + 1 \end{array}\right\} [t \in (-\infty, \infty)] \qquad (3)$$

параметрик шәклиндә верилмиш функсија $y = f_0(x)$ олсун. (3) мүнасибәтинин тә'јин етдији јеканә функсијанын ашкар ифадәсини алмаг үчүн һәмин мүнасибәтдән t-ни јох етмәк лазымдыр:

$$y = 3x + 7.$$

Демәли, $f_0(x) = 3x + 7$.

Үмумијјәтлә, (1) бәрабәрликләринин биринчисиндән t параметрини тапыб икинчисиндә јеринә јазсаг, онда функсијанын $y = f(x)$ шәклиндә ифадәсини аларыг.

Мисал 2.

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos t + 1 \\ y = \sin t + 3 \end{array}\right\} (0 \leqslant t \leqslant 2\pi) \qquad (4)$$

мүнасибәти ики функсија тә'јин едир.

Доғрудан да, (4) мүнасибәтиндән t-ни јох етсәк

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 - 1 = 0$$

бәрабәрлијини аларыг. Ахырынчы бәрабәрлик исә

$$y = 3 + \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

вә

$$y = 3 - \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

кими ики функсијаны тә'јин едир.

Гејд етмәк лазымдыр ки, верилмиш һәр бир $y = f(x)$ функси-

јасыны параметрик шәкилдә көстәрмәк олар. Бу мәгсәдлә x аргументини параметр һесаб етмәк кифајәтдир. Онда

$$\left.\begin{aligned} x &= x, \\ y &= f(x) \end{aligned}\right\}$$

параметрик верилишини аларыг.

§ 9. МӘҺДУД ВӘ ГЕЈРИ-МӘҺДУД ФУНКСИЈАЛАР

Фәрз едәк ки, $y = f(x)$ функсијасы X чохлуғунда тә'јин олунмушдур.

x аргументинин X чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә $|f(x)| \leqslant C$ бәрабәрсизлијини өдәјән сабит C әдәди олдугда, $y = f(x)$ функсијасына X чохлуғунда *мәһдуд функсија* дејилир. Аргументин X чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(x) \leqslant M \tag{1}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән сабит M әдәди олдугда исә $f(x)$-ә X чохлуғунда јухарыдан *мәһдуд функсија* дејилир. M әдәдинә $f(x)$ функсијасынын X чохлуғунда *јухары сәрһәди* дејилир. (1) бәрабәрсизлијини өдәјән M әдәдләринин ән кичијинә, јә'ни $\{f(x)\}$ $(x \in X)$ чохлуғунун дәгиг јухары сәрһәдинә $f(x)$ функсијасынын X чохлуғунда *дәгиг јухары сәрһәди* дејилир вә

$$M_0 = \sup f(x)$$

илә ишарә олунур (IX, § 9).

Аргументин X чохлуғундакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(x) \geqslant m \tag{2}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән сабит m әдәди олдугда $f(x)$-ә X чохлуғунда ашағыдан *мәһдуд функсија*, m әдәдинә исә һәмин функсијанын X чохлуғунда *ашағы сәрһәди* дејилир. (2) бәрабәрсизлијини өдәјән m әдәдләринин ән бөјүјүнә $f(x)$ функсијасынын X чохлуғунда *дәгиг ашағы сәрһәди* дејилир вә

$$m_0 = \inf f(x)$$

илә ишарә олунур (IX, § 9).

Тә'рифдән ајдындыр ки, X чохлуғунда ашағыдан вә јухарыдан мәһдуд олан һәр бир функсија һәмин чохлугда мәһдуддур. Еләчә дә X чохлуғунда мәһдуд олан функсија һәмин чохлугда ашағыдан вә јухарыдан мәһдуддур.

Мисал 1.

$$y = \frac{2x^2}{1 + x^2}$$

функсијасы бүтүн әдәд оху үзәриндә мәһдуддур. Онун дәгиг ашағы сәрһәди $m_0 = 0$ вә дәгиг јухары сәрһәди $M_0 = 2$-дир:

$$0 \leqslant \frac{2x^2}{1 + x^2} \leqslant 2$$

X чохлуғунда мәһдуд олмајан функсијаја һәмин чохлугда *гејри-мәһдуд функсија* дејилир.

Мисал 2.

$$y = \frac{1}{x^2}$$

функсијасы $X = (0, 1)$ интервалында гејри-мәһдуддур, чүнки x-ин $(0, 1)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$\left|\frac{1}{x^2}\right| \leqslant C$$

бәрабәрсизлијини өдәјән һеч бир сабит C әдәди јохдур. Бунунла белә $y = \frac{1}{x^2}$ функсијасы $(0, 1)$ интервалында ашағыдан мәһдуддур вә 1 әдәди онун дәгиг ашағы сәрһәдидир:

$$1 < \frac{1}{x^2} \quad (x \in (0, 1))$$

вә

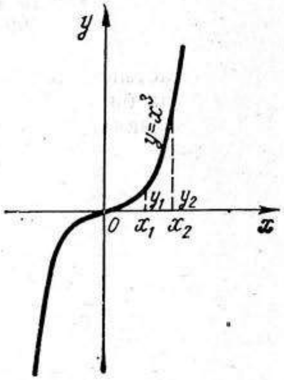
$$1 = \inf_{x \in (0,1)} \frac{1}{x^2}.$$

§ 10. МОНОТОН ФУНКСИЈА

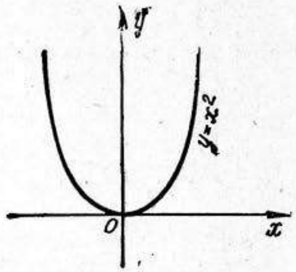
$y = x^3$ функсијасынын графикинә нәзәр салаг (98-чи шәкил). Абсис оху үзрә солдан-сағa һәрәкәт етдикчә функсијанын графики олан әјринин нөгтәләринин ординатлары һәмишә (мүнтәзәм олараг) артыр, јә'ни x аргументинин $x_1 < x_2$ бәрабәрсизлијини өдәјән ики ихтијари x_1 вә x_2 гијмәтләринә функсијанын ујғун олан $y_1 = x_1^3$ вә $y_2 = x_2^3$ гијмәтләри дә $y_1 < y_2$ бәрабәрсизлијини өдәјир. Башга сөзлә, аргументин бөјүк гијмәтинә функсијанын да бөјүк гијмәти ујғун олур. Белә функсијаја *монотон артан функсија* дејилир. Һәр һансы парча, интервал вә ја бүтүн әдәд оху үзәриндә монотон артан функсијадан данышмаг олар. Функсијанын тә'јин областында x аргументи артдыгда, функсијанын гијмәтләри азаларса, белә функсијаја *монотон азалан функсија* дејилир.

Ихтијари $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш $y = f(x)$ функсијасынын монотон артан вә азалан олмасынын үмуми тә'рифини ашағыдакы кими демәк олар. x аргументинин $[a, b]$ парчасында јерләшән вә $x_1 < x_2$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари ики x_1 вә x_2 гијмәтинә $f(x)$ функсијасынын ујғун олан $y_1 = f(x_1)$ вә $y_2 = f(x_2)$ гијмәтләри $y_1 < y_2$ бәрабәрсизлијини өдәдикдә һәмин функсијаја

$[a, b]$ парчасында *монотон артан* (вә ја садәчә *артан*) *функсија* дејилир. Аргументин $[a, b]$ парчасында јерләшән вә $x_1 < x_2$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари ики гијмәтинә функсијанын ујғун олан гијмәтләри $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ мүнасибәтини өдәдикдә $f(x)$ функсијасына $[a, b]$ парчасында *азалмајан функсија* дејилир.



Шәкил 98.



Шәкил 99.

x аргументинин $[a, b]$ парчасында јерләшән вә $x_1 < x_2$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари ики x_1 вә x_2 гијмәтинә $y = f(x)$ функсијасынын ујғун олан гијмәтләри $y_1 > y_2$ бәрабәрсизлијини өдәдикдә һәмин функсијаја $[a, b]$ парчасында *азалан* (вә ја *монотон азалан) функсија* дејилир. Аргументин $x_1 < x_2$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари ики гијмәтинә функсијанын ујғун олан гијмәтләри $y_1 \geqslant y_2$ мүнасибәтини өдәдикдә функсијаја *артмајан функсија* дејилир.

Верилмиш областда (парчада, интервалда вә с) монотон артан, азалмајан, азалан вә артмајан функсијалара бирликдә *монотон функсијалар* дејилир.

Мисал 1. $f(x) = x^3$ функсијасы бүтүн әдәд оху үзәриндә монотон артан функсијадыр. Аргументин $x_1 < x_2$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари ики x_1 вә x_2 гијмәтини көтүрәк.

$$f(x_1)-f(x_2) = x_1^3-x_2^3 = (x_1-x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

вә

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \frac{3}{4}x_1^2 + \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2 = q > 0$$

олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$f(x_1)-f(x_2) = (x_1-x_2)\left[\frac{3}{4}x_1^2 + \left(x^2 + \frac{1}{2}x_1\right)^2\right] = (x_1-x_2)q.$$

Ајдындыр ки, $x_1 < x_2$ вә ја $x_1-x_2 < 0$ оларса, онда:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)q < 0$$

вә ја

$$f(x_1) - f(x_2) < 0, \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Демәли, $f(x) = x^3$ функсијасы бүтүн әдәд оху үзәриндә монотон артандыр.

Мисал 2. $\varphi(x) = x^2$ функсијасы $(-\infty, 0)$ интервалында монотон азалан, $(0, \infty)$ интервалында исә монотон артандыр (99-чу шәкил). Буну јохламаг олар.

Гејд едәк ки, верилмиш функсија тә'јин областынын бир һиссәсиндә артан, о бири һиссәсиндә исә азалан ола биләр. Ола да биләр ки, верилмиш функсија нә артан, нә дә азалан олмасын.

Мисал 3. Дирихленин

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ расионал әдәд олдугда,} \\ 0, & x \text{ иррасионал әдәд олдугда} \end{cases}$$

функсијасы (§ 6, мисал 3) тә'јин областында нә артан, нә да азаландыр (монотон дејил).

§ 11. ТӘК ВӘ ЧҮТ ФУНКСИЈАЛАР

Тәк вә чүт функсијалара тә'риф вермәк үчүн әввәлчә симметрик област анлајышыны изаһ едәк.

$X = (x)$ әдәди чохлуғунун һәр бир x елементи илә бирликдә $-x$ елементи дә һәмин чохлуға дахил оларса, она координат башланғычына нәзәрән *симметрик чохлуг* дејилир. Демәли, x әдәди симметрик X чохлуғуна дахилдирсә, онда һәмин әдәдлә координат башланғычына нәзәрән симметрик олан $-x$ әдәди дә X чохлуғуна дахилдир. Координат башланғычы симметрик чохлугларын симметрија мәркәзидир. Бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу, $[-3, 3]$ парчасы, $(-a, a)$ интервалы, $X = [-2; -1] + [1; 2]$ чохлуғу O нөгтәсинә нәзәрән симметрик чохлуглардыр.

Һәр һансы симметрик областда тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасы, аргументин бу областдакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(-x) = f(x)$$

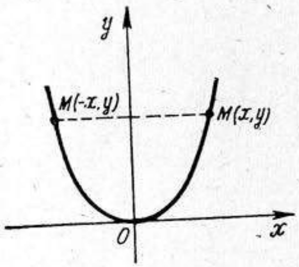
бәрабәрлијини өдәјирсә, она һәмин областда *чүт функсија* дејилир. Аргументин ишарәсини дәјишдикдә чүт функсија өз гијмәтини дәјишмир.

Мисал 1. $\varphi(x) = x^2$ вә $\psi(x) = x^4 + 1$ функсијалары чүт функсијалардыр:

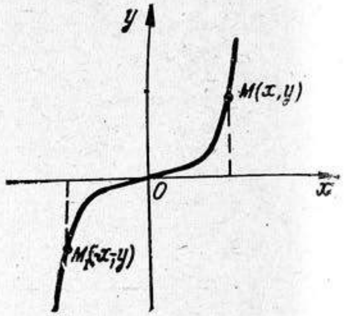
$$\varphi(-x) = (-x)^2 = x^2 = \varphi(x),$$
$$\psi(-x) = (-x)^4 + 1 = x^4 + 1 = \psi(x).$$

Чүт функсијанын тә'рифиндән ајдындыр ки, $M(x, y)$ нөгтәси онун графики үзәриндәдирсә, $M^*(-x, y)$ нөгтәси (ординат охуна көрә $M(x, y)$ нөгтәсилә симметрик олан нөгтә) дә онун графики үзәриндә јерләшир. Демәли, чүт функсијанын графики ординат охуна нәзәрән симметрик олмалыдыр.

Мисал 2. $\varphi(x) = x^2$ функсијасынын графики ординат охуна көрә симметрикдир. Мүстәвини ординат оху бојунча гатласаг, чүт функсија графикинин сол вә сағ јарыммүстәвиләрдә олан һиссәләри үст-үстә дүшәр (100-чү шәкил).



Шәкил 100.



Шәкил 101.

Һәр һансы симметрик областда тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасы аргументин бу областдакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(-x) = -f(x) \qquad (*)$$

бәрабәрлијини өдәјирсә, она һәмин областда *тәк функсија* дејилир.

Тә'рифдән ајдындыр ки, $x = 0$ нөгтәсиндә тә'јин олунмуш тәк функсијанын һәмин нөгтәдә гијмәти сыфра бәрабәр олмалыдыр. Доғрудан да, (*) бәрабәрлијиндә $x=0$ олдугда $f(0) = -f(0)$, $2f(0) = 0$, $f(0) = 0$ алыныр.

Мисал 3. $\varphi_1(x) = x^3$ вә $\psi_1(x) = x^5$ функсијалары бүтүн әдәд оху үзәриндә тәк функсијалардыр:

$$\varphi_1(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -\varphi_1(x),$$
$$\psi_1(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -\psi_1(x).$$

Мисал 4. $\Phi(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ функсијасы $(-1, 1)$ интервалында тәк функсијадыр. Доғрудан да,

$$\Phi(-x) = \lg \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \lg \frac{1-x}{1+x} = \lg(1-x) - \lg(1+x) =$$

$$= -[\lg(1+x) - \lg(1-x)] = -\lg \frac{1+x}{1-x} = -\Phi(x).$$

Тәк функсијанын тә'рифиндән ајдындыр ки, $M(x, y)$ нөгтәси онун графики үзәриндә јерләширсә, онда координат башланғычына көрә һәмин нөгтә илә симметрик олан $M_1(-x, -y)$ нөгтәси дә онун графики үзәриндә јерләшәр. Бурадан ајдын олур ки, тәк функсијанын графики координат башланғычына нәзәрән симметрикдир.

Мисал 5. $\varphi_1(x) = x^3$ функсијасынын графики координат башланғычына нәзәрән симметрикдир (101-чи шәкил).

Симметрик областларда тә'јин олунмасына бахмајараг нә тәк, нә дә чүт функсија олмајан функсијалар да вардыр. Мәсәлән,

$$y = x^2 + x, \quad y = x^3 + x + 1, \quad y = \sin x + \cos x \text{ вә с.}$$

Белә функсијалар үчүн ашағыдакы тәклиф доғрудур.

Т е о р е м. ***Һәр һансы симметрик областда верилмиш ихтијари $f(x)$ функсијасыны јеканә јолла бир тәк вә бир чүт функсијанын чәми шәклиндә көстәрмәк олар.***

И с б а т ы. Верилмиш $f(x)$ функсијасы васитәсилә ики

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad \text{вә} \quad \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

функсијаларыны дүзәлдәк. $\varphi(x)$ чүт функсијадыр:

$$\varphi(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f[-(-x)]] = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] = \varphi(x).$$

$\psi(x)$ исә тәк функсијадыр:

$$\psi(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f[-(-x)]] = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] =$$
$$= -\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = -\psi(x).$$

Ајдындыр ки,

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x). \qquad (1)$$

Инди бу көстәрилишин јеканә олмасыны исбат едәк. Бу мәгсәдлә, фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасыны башга $\varphi_1(x)$ (чүт) вә $\psi_1(x)$ (тәк) функсијаларынын да чәми шәклиндә көстәрмәк олур:

$$f(x) = \varphi_1(x) + \psi_1(x), \qquad (2)$$

бурадан

$$f(-x) = \varphi_1(-x) + \psi_1(-x) = \varphi_1(x) - \psi_1(x) \qquad (3)$$

(2) вә (3) бәрабәрликләрини әввәлчә тәрәф-тәрәфә топлајыб, сонра да чыхсаг:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)],$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

1349—15

Демәли,

$$\varphi(x) \equiv \varphi_1(x) \quad \text{вә} \quad \psi(x) \equiv \psi_1(x),$$

јә'ни (1) ајрылышы јеканәдир.

Бир чох ријази мәсәләләрдә $[0, a]$ парчасында ($[0, a)$ јарыминтервалында) верилмиш $f(x)$ функсијасыны елә «давам етдирмәк», јә'ни $[-a, 0)$ јарыминтервалында ($(-a, 0)$ интервалында) елә тә'јин етмәк лазым кәлир ки, $[-a, a]$ парчасында ($(-a, a)$ интервалында) тәк вә ја чүт функсија олсун.

$[0, a]$ парчасында тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасыны *чүт давам етдирмәк,* $[-a, a]$ парчасында чүт олан елә $F(x)$ функсијасы гурмаға дејилир ки, һәмин функсија $[0, a]$ парчасында $f(x)$ функсијасы илә үст-үстә дүшсүн. $f(x)$ функсијасынын чүт давамы олан $F(x)$ функсијасыны

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{олдугда}, \\ f(-x), & -a \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{олдугда} \end{cases}$$

шәклиндә гурмаг олар.

$[0, a]$ парчасында тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасыны *тәк давам етдирмәк,* $[-a, a]$ парчасында тәк олан елә $\Phi(x)$ функсијасы гурмаға дејилир ки, һәмин функсија $[0, a]$ парчасында $f(x)$ функсијасы илә үст-үстә дүшсүн. $f(x)$-ин тәк давамы олан $\Phi(x)$ функсијасыны

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{олдугда}, \\ -f(-x), & -a \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{олдугда} \end{cases}$$

шәклиндә гурмаг олар.

Мисал 6. $[0, 1]$ парчасында тә'јин олунмуш $f(x) = x^2+3x+5$ функсијасынын чүт давамы

$$F(x) = \begin{cases} x^2+3x+5, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{олдугда}, \\ x^2-3x+5, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{олдугда} \end{cases}$$

олачагдыр.

Мисал 7. $[0, 1]$ парчасында тә'јин олунмуш $f(x) = x^2 + 3x$ функсијасынын тәк давамы

$$\Phi(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{олдугда}, \\ -(x^2-3x), & -1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{олдугда} \end{cases}$$

олачагдыр.

§ 12. ДӨВРИ ФУНКСИЈА

Ријази мәсәләләрин һәллиндә дөври функсијаларын бөјүк әһәмијјәти вардыр.

Фәрз едәк ки, $y = f(x)$ функсијасы X чохлуғунда тә'јин олунмушдур. Аргументин X чохлуғундакы бүтүн гијмәтиндә $f(x)$ функсијасы үчүн

$$f(x + l) = f(x) \quad (l \neq 0) \tag{1}$$

бәрабәрлији өдәниләрсә, она X чохлугунда *дөври функсија* дејилир. (1) мүнасибәтини өдәјән сыфырдан фәргли l әдәди $f(x)$ функсијасынын *дөврү* адланыр.

Тә'рифдән ајдындыр ки, l әдәди $f(x)$ функсијасынын дөврүдүрсә вә $x + nl$ шәклиндә олан нөгтәләр һәмин функсијанын тә'јин областына дахилдирсә, онда $2l$, $3l$, ..., nl, ... әдәдләри дә $f(x)$ функсијасынын дөврү олар. Доғрудан да,

$$f(x+2l) = f[(x+l)+l] = f(x+l) = f(x)$$

олмасындан алыныр ки, $2l$ әдәди һәмин функсијанын дөврүдүр.

Беләликлә,

$$f(x) = f(x+l) = f(x+2l) = f(x+3l) = \ldots = f(x+nl) = \ldots$$

бәрабәрликләри сөјләдијимиз тәклифин доғру олдуғуну көстәрир. Көстәрмәк олар ки, $x-nl$ шәклиндә олан нөгтәләр дөври $f(x)$ функсијасынын тә'јин областына дахил олдугда $-l$, $-2l$, ..., $-nl$, ... әдәдләри дә һәмин функсијанын дөврүдүр. Бу тәклифин доғрулуғу

$$f(x) = f[(x - l) + l] = f(x - l)$$

вә

$$f(x) = f(x - l) = f(x-2l) = \ldots = f(x-nl) = \ldots$$

бәрабәрликләриндән ајдындыр. Демәли, l әдәди дөври $f(x)$ функсијасынын дөврүдүрсә, онда kl (k истәнилән там әдәддир) шәклиндә олан бүтүн әдәдләр дә һәмин функсијанын дөврү олар. k әдәдинә там гијмәтләр вердикдә алынан kl әдәдләринин бир һиссәси мүсбәт, о бириләри исә мәнфи олачагдыр. Ола биләр ки, $f(x)$ функсијасынын дөврү олан бүтүн мүсбәт әдәдләр ичәрисиндә ән кичик бир ω әдәди вардыр. Бу ω әдәдинә $f(x)$ функсијасынын ән кичик мүсбәт дөврү вә ја садәчә *ән кичик дөврү* дејилир.

Дөври функсијанын ән кичик (мүсбәт) дөврү олмаја да биләр.

Мисал 1. Бүтүн әдәд оху үзәриндә тә'јин олунмуш вә аргументин бүтүн гијмәтиндә сабит C гијмәти алан

$$\varphi(x) \equiv C$$

функсијасы дөври функсијадыр. Истәнилән һәгиги әдәд бу функсијанын дөврүдүр. Доғрудан да, истәнилән һәгиги l әдәди үчүн:

$$\varphi(x + l) \equiv C \equiv \varphi(x).$$

Бу функсијанын ән кичик дөврү јохдур.

Мисал 2. $\psi(x) = x - [x]$ функсијасы (§ 6, IV мисал) дөври функсијадыр вә $l=1$ онун дөврүдүр. Буну көстәрмәк үчүн гејд едәк ки, x әдәдини бир ваһид артырдыгда, онун там һиссәси дә бир ваһид артар, јә'ни истәнилән x үчүн

$$[x + 1] = [x] + 1$$

бәрабәрлији доғрудур. Бурадан:

$$\psi(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)= \\ =x+1-[x]-1=x-[x]=\psi(x),$$

јә'ни $l=1$ әдәди $\psi(x)$ функсијасынын дөврүдүр. Јухарыда сөјләдикләримиздән ајдындыр ки, истәнилән там әдәд $\psi(x)$ функсијасынын дөврүдүр.

Көстәрмәк олар ки, $l=1$ әдәди $\psi(x)$ функсијасынын ән кичик мүсбәт дөврүдүр.

Мисал 3. Дирихленин

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ расионал әдәд олдугда,}\\ 0, & x \text{ иррасионал әдәд олдугда}\end{cases}$$

функсијасы дөври функсијадыр. Истәнилән расионал әдәд һәмин функсијанын дөврүдүр.

Бә'зән һәр һансы $[a, b]$ парчасында верилмиш $f(x)$ функсијасыны дөври давам етдирмәк лазым кәлир.

$[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасыны дөври давам етдирмәк, елә дөври $F(x)$ функсијасы гурмаға дејилир ки, һәмин функсија $[a, b]$ парчасында $f(x)$ функсијасы илә үст-үстә дүшсүн. $F(x)$ функсијасына $f(x)$-ин *дөври давамы* дејилир.

§ 13. МҮРӘККӘБ ФУНКСИЈА

Тутаг ки, $x=\varphi(t)$ функсијасы T чохлуғунда тә'јин олунмушдур вә онун гијмәтләри чохлуғу $y=f(x)$ функсијасынын X тә'јин областына дахилдир. Бу һалда, t-нин T чохлуғундакы һәр бир гијмәтинә y-ин мүәјјән бир гијмәти ујғун олур, јә'ни y дәјишәни (x васитәсилә) t-нин функсијасыдыр:

$$y=f[\varphi(t)]. \tag{1}$$

Бу һалда алынан $f[\varphi(t)]$ функсијасына *мүрәккәб функсија* вә ја *функсијанын функсијасы* дејилир.

Мисал 1. $x=t^3$ вә $y=2^x$ олдугда $y=2^{t^3}$ функсијасы t-нин мүрәккәб функсијасыдыр.

y дәјишәни x васитәсилә t-нин мүрәккәб функсијасы олдугда x-ә *ара дәјишәни* вә ја *ара аргументи* дејилир.

$x=\varphi(t)$ вә $y=f(x)$ функсијаларындан дүзәлдилмиш (1) мүрәккәб функсијасына бә'зән һәмин $x=\varphi(t)$ (дахили) вә $y=f(x)$ (харичи) функсијаларынын *суперпозисијасы* да дејилир.

Гејд етмәк лазымдыр ки, мүрәккәб функсијанын ара аргументинин сајы бир дејил, ики вә чох ола биләр. Мәсәлән,

$$y=f(u),\quad u=\psi(x),\quad x=\varphi(t)$$

олдугда

$$y=f\{\psi[\varphi(t)]\}$$

мүрәккәб функсијасынын ики ара аргументи (x вә u) вардыр.

Мисал 2. $y=\sin x$ вә $x=t^4$ олдугда бир ара аргументи олан

$$y=\sin t^4$$

мүрәккәб функсијасы алыныр.

Мисал 3. $y=\sin u,\quad u=\lg x$ вә $x=t^4$ олдугда

$$y=\sin \lg t^4$$

мүрәккәб функсијасынын ики ара аргументи (u вә x) вардыр.

§ 14. ТӘРС ФУНКСИЈА ВӘ ОНУН ВАРЛЫҒЫ

Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы $X=\{x\}$ чохлуғунда тә'јин олунмушдур. Онун гијмәтләри һәр һансы $Y=\{y\}$ чохлуғуну тәшкил едир. Функсијанын тә'рифинә көрә x аргументинин X чохлуғундакы һәр бир x_0 гијмәтинә y дәјишәнинин Y чохлуғундан бир y_0 гијмәти ујғун олур. Лакин ихтијари $y_0 \in Y$ әдәди үчүн x аргументинин X чохлуғунда

$$y_0=f(x_0) \tag{1}$$

бәрабәрлијини өдәјән анҹаг бир x_0 гијмәтинин варлығыны һәмишә демәк мүмкүн дејилдир. x аргументинин (1) бәрабәрлијини өдәјән бир, бир нечә вә һәтта сонсуз сајда x_0 гијмәтләри ола биләр. Бу һалларын мүмкүн олмасыны мисалларла изаһ едәк.

Мисал 1. $X=(-\infty, \infty)$ интервалында тә'јин олунмуш

$$y=2x+3 \tag{2}$$

функсијасынын гијмәтләри $Y=(-\infty, \infty)$ чохлуғуну тәшкил едир. Һәр бир $y_0 \in Y$ әдәдинә гаршы x-ин X чохлуғунда (2) бәрабәрлијини өдәјән јеканә $x_0=\dfrac{y_0-3}{2}$ гијмәти вардыр.

Мисал 2. $X=[-1, 1]$ парчасында тә'јин олунмуш

$$y=x^2 \tag{3}$$

функсијасынын гијмәтләри $Y=[0, 1]$ чохлуғуну тәшкил едир. Бу һалда x-ин $[-1, 1]$ парчасындакы һәр бир гијмәтинә y-ин бир гијмәти ујғундур. Лакин y-ин $[0, 1]$ парчасындакы һәр бир y_0 гијмәтинә x-ин

$$y_0=x^2$$

бәрабәрлијини өдәјән

$$x_0=+\sqrt{y_0} \quad \text{вә} \quad x_0'=-\sqrt{y_0}$$

кими ики гијмәти ујғундур.

Мисал 3. Инди дә $(-\infty, \infty)$ интервалында тә'јин олунмуш $y=\sin x$ функсијасына бахаг. $\sin x$ функсијасынын гијмәтләри

чохлуғу $[-1, 1]$ парчасыны тәшкил едир. Ајдындыр ки, һәр бир $y_0 \in [-1, 1]$ әдәди үчүн елә $x_0 \in (-\infty, \infty)$ нөгтәси вар ки,

$$y_0 = \sin x_0$$

бәрабәрлији өдәнилир. $\sin x_0$ функсијасынын дөври олмасындан ајдындыр ки, $x_0 + 2\kappa\pi$ $(\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ нөгтәләриндә дә һәмин бәрабәрлик өдәнилир:

$$y_0 = \sin x_0 = \sin(x_0 + 2\kappa\pi).$$

Демәли, y-ин $[-1, 1]$ парчасындакы һәр бир y_0 гијмәтинә x-ин $y_0 = \sin x_0$ бәрабәрлијини өдәјән сонсуз сајда $x_0 + 2\kappa\pi$ гијмәтләри вардыр.

X чохлуғунда тә'јин олунмуш $y = f(x)$ функсијасынын гијмәтләри чохлуғу $У$ олсун. y-ин $У$ чохлуғундакы һәр бир y_0 гијмәтинә x-ин X чохлуғундан (1) бәрабәрлијини өдәјән анчаг бир x_0 гијмәти ујғун оларса (јә'ни, $y = f(x)$ функсијасы X чохлуғуну $У$ чохлуғуна гаршылыглы биргијмәтли ин'икас етдирирсә), бу ујғунлугла $У$ чохлуғунда тә'јин олунан $x = \varphi(y)$ функсијасына $y = f(x)$ функсијасынын *тәрс функсијасы* дејилир. Ајдындыр ки, $y = f(x)$ функсијасыны да $x = \varphi(y)$ функсијасынын тәрс функсијасы һесаб етмәк олар. Буна көрә дә чох заман $y = f(x)$ вә $x = \varphi(y)$ функсијаларына *гаршылыглы тәрс функсијалар* дејилир. Бу функсијаларын биринчисини дүз функсија һесаб етсәк, о бириси бунун тәрс функсијасы олар. Тә'рифә әсасән

$$f[\varphi(y)] = y \quad \text{вә} \quad x = \varphi[f(x)] \tag{4}$$

бәрабәрликләри доғрудур.

Мисал 4. (2), јә'ни $y = 2x + 3$ функсијасынын тәрс функсијасы

$$x = \frac{y-3}{2}$$

олачагдыр.

Јухарыда тәдгиг етдијимиз

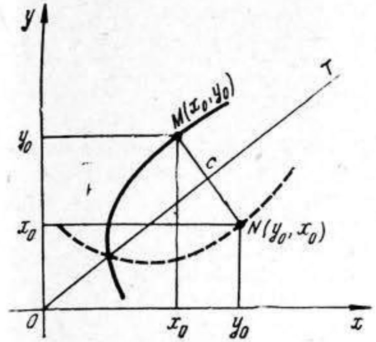
$$y = x^2 \quad \text{вә} \quad y = \sin x$$

функсијаларынын бахдығымыз областларда тәрс функсијасы јохдур. $y = x^3$ функсијасынын тәрс функсијасы $x = \sqrt[3]{y}$ олар.

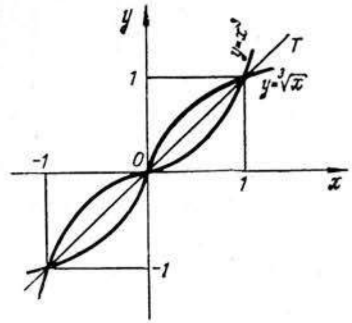
Функсија, тә'јин областы вә ујғунлуг гануну илә тамамилә тә'јин олундуғу үчүн $y = f(x)$ функсијасынын $x = \varphi(y)$ тәрс функсијасыны $y = \varphi(x)$ кими дә ишарә етмәк олар. Лакин нәзәрә алмаг лазымдыр ки, $y = \varphi(x)$ функсијасынын x аргументинин дәјишмә областы $У$ чохлуғудур ($y = f(x)$-ин гијмәтләри чохлуғудур).

$y = f(x)$ вә $y = \varphi(x)$ гарышылыглы тәрс функсијаларынын бир хассәсини гејд едәк. Бу функсијаларын графикләри ејни координат системинә көрә биринчи координат бучағынын тәнбөләнинә нәзәрән симметрикдир.

Доғрудан да, $y_0 = f(x_0)$ вә $x_0 = \varphi(y_0)$ бәрабәрликләриндән ајдындыр ки, $M(x_0, y_0)$ вә $N(y_0, x_0)$ нөгтәләри ујғун олараг $y = f(x)$ вә $y = \varphi(x)$ функсијаларынын графикләри үзәриндә јерләшир (102-чи шәкил).



Шәкил 102.



Шәкил 103.

Бурадан ајдындыр ки, $MC = CN$ вә $MN \perp OT$. Башга сөзлә, $M(x_0, y_0)$ вә $N(y_0, x_0)$ нөгтәләри координат бучағынын OT тәнбөләнинә көрә симметрикдир. Бу хассәдән истифадә едәрәк, верилмиш дүз функсијанын графикинә көрә онун тәрс функсијасынын графикини гурмаг олар.

$y = f(x)$ функсијасынын графикини биринчи координат бучағынын тәнбөләни әтрафында чевирсәк, онун тәрс функсијасы олан $y = \varphi(x)$ функсијасынын графикини аларыг.

Мисал 5. $y = x^3$ вә $y = \sqrt[3]{x}$ гаршылыглы тәрс функсијаларынын графикләри бир-бириндән биринчи координат бучағынын тәнбөләни әтрафында чевирмәклә алыныр (103-чү шәкил).

Тутаг ки, X һәр һансы (сонлу вә ја сонсуз) парча, интервал вә ја јарыминтервалдыр. Ајдындыр ки, X областында тә'јин олунмуш $y = f(x)$ функсијасынын тәрс функсијасы олмаја да биләр.

Белә бир тәбии суал гаршыја чыхыр: X областында тә'јин олунмуш $y = f(x)$ функсијасынын нә заман тәрс функсијасы вардыр?

$y = f(x)$ функсијасынын X областында алдығы гијмәтләр чохлуғу $У$ олсун.

Теорем (тәрс функсијанын варлығы). ***X областында тә'јин олунмуш вә монотон артан (азалан) $y = f(x)$ функсијасынын $У$ чохлуғунда тәрс функсијасы вардыр вә тәрс функсија һәмин чохлуг үзәриндә монотон артандыр (азаландыр).***

Исбаты. Үмумилији азалтмадан теореми, X областы һәр һансы (a, b) интервалы вә $y = f(x)$ функсијасы һәмин интервалда монотон артан функсија олан һал үчүн исбат едәк. $y_0 \in У$ их-

тијари әдәд олсун. Онда x-ин (a, b) интервалында јерләшән елә x_0 гијмәти вар ки,

$$y_0 = f(x_0). \qquad (5)$$

$y = f(x)$ функсијасы монотон артан олдуғундан (5) бәрабәрлијинин өдәјән x_0 јеканәдир.

Доғрудан да, ихтијари $x_0' \neq x_0$ үчүн $f(x_0') \neq f(x_0)$, јә'ни $x_0' < x_0$ вә ја $x_0' > x_0$ олдугда $f(x_0') < f(x_0)$ вә ја $f(x_0') > f(x_0)$ олур. Бурадан ајдындыр ки, һәр бир $y_0 \in У$ үчүн X областында (5) бәрабәрлијини өдәјән јеканә x_0 вар. Һәр бир y_0 әдәдинә гаршы јеканә x_0 әдәдини ујғун гојмаг мүмкүн олмасы $y = f(x)$ функсијасынын $У$ чохлуғунда тәрс функсијасынын варлығыны көстәрир.

Инди дә $x = \varphi(y)$ тәрс функсијасынын $У$ чохлуғу үзәриндә монотон артан олдуғуну көстәрәк. Доғрудан да, ихтијари $y_1 < y_2$ $(y_1 \in У,\ y_2 \in У)$ әдәдләри үчүн $x_1 = \varphi(y_1) < x_2 = \varphi(y_2)$, чүнки әкс һалда, јә'ни $x_1 \geqslant x_2$ олдугда $y = f(x)$ функсијасынын артан олмасындан $y_1 = f(x_1) \geqslant f(x_2) = y_2$ алыныр, бу исә $y_1 < y_2$ шәртинә зиддир.

Теорем монотон азалан функсијалар үчүн аналожи олараг исбат едилир.

Мисал 6. $y = x^3$ функсијасы $(-\infty, \infty)$ интервалында монотон артандыр вә онун гијмәтләри чохлуғу $(-\infty, \infty)$ интервалыдыр. Исбат етдијимиз теоремә көрә $y = x^3$ функсијасынын $y = \sqrt[3]{x}$ тәрс функсијасы вардыр вә $(-\infty, \infty)$ интервалында монотон артандыр.

Мисал 7. $[-1, 1]$ парчасында тә'јин олунмуш $y = x^2$ функсијасынын тәрс функсијасы олмадығыны көстәрмишдик. Лакин бу функсијанын тә'јин областыны $X = [0, 1]$ (вә ја $[-1, 0]$) көтүрсәк, онун гијмәтләри чохлуғу үзәриндә тәрс функсијасы олар. Доғрудан да, $X = [0, 1]$ областында $y = x^2$ функсијасы монотон артандан да, буна көрә дә һәмин функсијанын $[0, 1]$ парчасында ($[0, 1]$ дыр. Буна көрә дә һәмин функсијанын гијмәтләр чохлуғудур) парчасы ејни заманда функсијанын гиј'мәтләр чохлуғудур) $y = +\sqrt{x}$ кими тәрс функсијасы вардыр. $X = [-1, 0]$ көтүрсәк, бу областда монотон азалан $y = x^2$ функсијасынын $[0, 1]$ парчасында $y = -\sqrt{x}$ тәрс функсијасы олар.

§ 15. ХӘТТИ ФУНКСИЈА

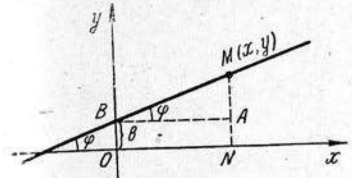
$$y = \kappa x + b \qquad (1)$$

шәклиндә олан функсијаја *хәтти функсија* дејилир, бурада κ вә b һәгиги әдәдләрдир.

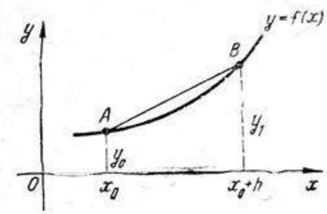
Хәтти функсијанын тә'јин областы бүтүн әдәд охудур, графики исә дүз хәтдир. Дүз хәттин абсис охунун мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдији бучаға һәмин дүз хәттин абсис охуна *мејл бучағы* дејилир. Дүз хәттин абсис охуна φ мејл бучағынын тан-

кенси, јә'ни $\operatorname{tg}\varphi$ онун (дүз хәттин) *бучаг әмсалы* адланыр. Абсис охуна паралел олан дүз хәттин бучаг әмсалы сыфра бәрабәрдир. Ординат охуна паралел олан дүз хәттин мејл бучағы $\varphi = \frac{\pi}{2}$ олдуғундан һәмин дүз хәттин бучаг әмсалындан данышмаг олмаз (чүнки $\operatorname{tg}\varphi$-нин мә'насы јохдур).

(1) хәтти функсијасынын графики олан дүз хәтт үзәриндә ихтијари $M(x, y)$ нөгтәси көтүрәк (104-чү шәкил). Дүзбучаглы $\triangle ABM$-дән аларыг:



Шәкил 104



Шәкил 105.

$$\frac{MA}{BA} = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$MA = y - b, \quad BA = ON = x,$$

$$\frac{y-b}{x} = \operatorname{tg}\varphi, \qquad y = x \cdot \operatorname{tg}\varphi + b.$$

Бурадан ајдындыр ки, $\kappa = \operatorname{tg}\varphi$. Демәли, (1) функсијасынын графики бучаг әмсалы κ вә ординат охундан ајырдығы парчанын гијмәти b олан дүз хәтдир. $b = 0$ олдугда (1) функсијасы $y = \kappa x$ шәклинә дүшүр. Бу һалда функсијанын графики, координат башланғычындан кечән вә бучаг әмсалы κ олан дүз хәтт олар.

(1) хәтти функсијасы κ вә b әмсалларындан асылыдыр. Бу ики әмсалы тапмаг үчүн функсија ики шәрти өдәмәлидир.

Мисал 1. κ әмсалы (графикин бучаг әмсалы) вә бир нөгтәдә гијмәти мә'лум олдугда хәтти функсијаны тапмалы.

Тутаг ки, (1) хәтти функсијасынын x_0 нөгтәсиндә y_0 гијмәти мә'лумдур. Онда:

$$y_0 = \kappa x_0 + b.$$

Бурадан b-ни тапыб (1)-дә јеринә јазсаг, ахтарылан хәтти функсијаны тапмыш оларыг:

$$y = \kappa x + (y_0 - \kappa x_0),$$

$$y = \kappa(x - x_0) + y_0. \qquad (2)$$

Мисал 2. Верилмиш x_0 вә x_1 нөгтәләриндә ујғун олараг y_0 вә y_1 гијмәтләрини алан хәтти функсијаны тапмалы.

Шәртә көрә ахтарылан $y = \kappa x + b$ функсијасы

$$y_0 = \kappa x_0 + b,$$
$$y_1 = \kappa x_1 + b$$

мүнасибәтләрини өдәјир. Бу бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә чыхараг κ-ны тапмаг олар:

$$\kappa = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \qquad (3)$$

Инди ахтарылан хәтти функсијаны (2) бәрабәрлији васитәсилә тапа биләрик (κ мә'лумдур вә хәтти функсија x_0 нөгтәсиндә y_0 гијмәтини алыр):

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0, \qquad (*)$$

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{y_0 x_1 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}. \qquad (4)$$

Бу, ахтарылан хәтти функсијадыр. (*) бәрабәрлијини

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad (5)$$

шәклиндә јазсаг, верилмиш (x_0, y_0) вә (x_1, y_1) нөгтәләриндән кечән дүз хәттин тәнлијини аларыг.

Хәтти функсијалардан хәтти интерполјасија мәсәләләриндә кениш истифадә олунур.

Фәрз едәк ки, $y = f(x)$ функсијасынын $x = x_0$ вә $x = x_0 + h$ нөгтәләриндә

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_0 + h)$$

гијмәтләри мә'лумдур, лакин бу нөгтәләр арасында јерләшән нөгтәләрдә гијмәтләри мә'лум дејилдир. Әкәр бу функсијаны x_0 вә $x_1 = x_0 + h$ нөгтәләриндә, ујғун олараг, функсијанын алдығы y_0 вә y_1 гијмәтләрини алан хәтти функсија илә әвәз етсәк, онда функсијанын гијмәтләрини тәгриби тапмыш оларыг. Бу хәтти функсија (4) шәклиндә олар:

$$y = \frac{y_1 - y_0}{h}x + \left(\frac{y_0 x_0 - x_0 y_1}{h} + y_0\right). \qquad (6)$$

Бу, һәндәси олараг о демәкдир ки, $y = f(x)$ функсијасы графикинин AB һиссәси AB дүз хәтт парчасы илә әвәз олунур (105-чи шәкил). Ајдындыр ки, белә әвәзетмәдә алынан хәта о заман кичик олар ки, $f(x)$ функсијасы бахылан интервалда хәтти функсијадан аз фәргләнсин вә h аддымы кичик олсун.

Һәр һансы парчада верилмиш функсијаны парчанын уч нөгтәләриндә һәмин функсија илә ејни гијмәтләр алан хәтти функси-

ја илә әвәз етмәјә *хәтти интерполјасија* дејилир. Хәтти екстраполјасија (бахылан парчадан кәнардакы нөгтәләр үчүн) просеси дә ејни гајда илә апарылыр. Даһа мүкәммәл интерполјасија просесләри илә кәләчәкдә таныш олачағыг.

§ 16. ГҮВВӘТ, ҮСТЛҮ ВӘ ЛОГАРИФМИК ФУНКСИЈАЛАР

1. $y = x^\alpha$ (α һәгиги әдәддир) функсијасына *гүввәт функсијасы* дејилир. Бу функсијанын варлыг областы α әдәдиндән асылыдыр.

α там мүсбәт әдәд олдугда функсијанын варлыг областы бүтүн әдәд оху, јә'ни $(-\infty, \infty)$ интервалы, натурал чүт әдәд олдугда функсијанын гијмәтләри чохлуғу $[0, +\infty)$ јарыминтервалы, тәк олдугда исә $(-\infty, \infty)$ интервалы олар.

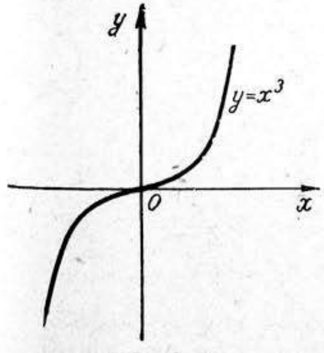
α там мәнфи әдәд олдугда $y = x^\alpha$ функсијасы x-ин $x = 0$ гијмәтиндән башга јердә алан бүтүн һәгиги гијмәтләриндә, јә'ни

$$X = (-\infty, 0) + (0, \infty) \qquad (1)$$

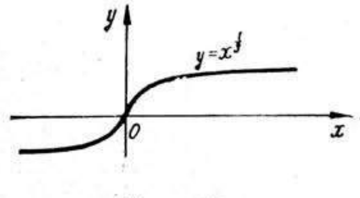
чохлуғунда тә'јин олунмушдур.

α ихтисар олуна билмәјән вә мәхрәчи тәк әдәд олан мүсбәт $\frac{p}{q}$ кәсри шәклиндә олдугда, функсијанын варлыг областы $(-\infty, \infty)$ интервалы олар. α-нын бүтүн јердә алан (һәгиги) мүсбәт гијмәтләриндә функсијанын варлыг областы $[0, \infty)$ чохлуғудур.

α ихтисар олуна билмәјән вә мәхрәчи тәк әдәд олан мәнфи $\frac{p}{q}$ кәсри шәклиндә олдугда, функсијанын варлыг областы (1) чохлуғу, α-нын бүтүн јердә алан мәнфи гијмәтләриндә исә функсијанын варлыг областы $(0, \infty)$ чохлуғу олар. α-нын $\alpha = 3$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{2}{3}$, вә $\alpha = -3$ гијмәтләриндә $y = x^\alpha$ функсијасынын графики 106, 107, 108 вә 109-чу шәкилләрдә көстәрилмишдир.

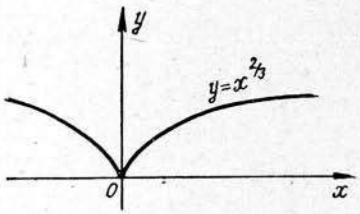


Шәкил 106.

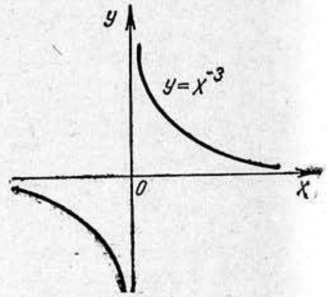


Шәкил 107.

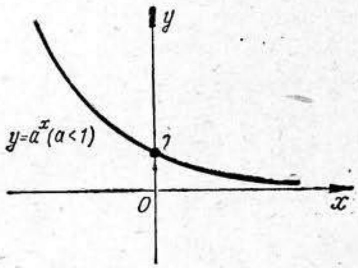
2. $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) функсијасына *үстлү функсија* дејилир. Бу функсијанын варлыг областы $(-\infty, \infty)$ интервалы, гијмәтләр чохлуғу исә $(0, \infty)$ интервалыдыр.



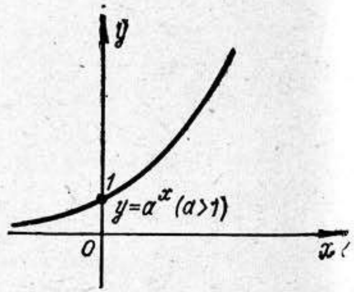
Шәкил 108.



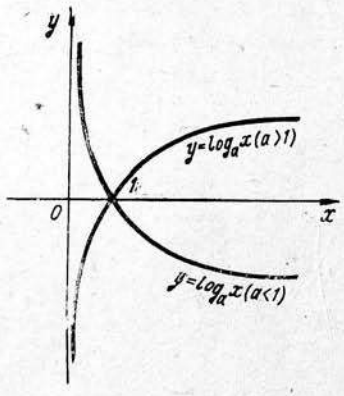
Шәкил 109.



Шәкил 110.



Шәкил 111.



Шәкил 112.

a-нын ваһиддән кичик вә ваһиддән бөјүк гијмәтләриндә $y=a^x$ функсијасынын графики 110 вә 111-чи шәкилләрдә көстәрилмишдир.

3. $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$) функсијасына *логарифмик функсија* дејилир.

Бу функсијанын варлыг областы $(0, \infty)$ интервалы, гијмәтләри чохлуғу исә $(-\infty, \infty)$ интервалыдыр.

Логарифмик функсијанын графики 112-чи шәкилдә көстәрилмишдир.

§ 17. ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКСИЈАЛАР

Тригонометрик функсијаларын һәндәси тә'рифи орта мәктәбин ријазијјат курсундан мә'лумдур. Бу тә'рифә көрә

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\operatorname{tg} x,\ y=\operatorname{ctg} x \qquad (1)$$

тригонометрик функсијалары бучағын вә еләчә дә гөвсүн функсијаларыдыр.

Көстәрәк ки, тригонометрик функсијалара әдәди гијмәтләр алан аргументин функсијасы кими дә бахмаг олар. Фәрз едәк ки, x истәнилән һәгиги әдәддир. Һәгиги x әдәдинә (бахылан өлчү системиндә) өлчүсү x олан (x әдәди илә өлчүлән) α бучағы (вә ја l гөвсү) ујғун олар. Һәр бир α бучағына исә верилмиш тригонометрик функсијанын муәјјән гијмәти ујғундур. Беләликлә, һәр бир һәгиги x әдәдинә, тригонометрик функсијаларын һәмин әдәдлә өлчүлән α бучағына ујғун гијмәтини гаршы гоја биләрик:

$$\underset{\text{әдәд}}{x} \rightarrow \underset{\text{бучаг}}{\alpha} \rightarrow f(\alpha)=f(x)$$

Бу мүһакимәдә α бучағыны танкенс вә котанкенс функсијалары үчүн аргументин мүмкүн гијмәтләри һесаб едирик.

Бу гајда илә һәр бир һәгиги әдәдә тригонометрик функсијаларын муәјјән гијмәтини ујғун гојмаг олар. Демәли, тригонометрик функсијалары әдәди гијмәтләр алан аргументин функсијасы һесаб етмәк олар. Тригонометрик функсијалара әдәди аргументин функсијалары кими бахдыгда, бучаг вә гөвсләрин өлчү ваһиди олараг радиан көтүрмәк даһа әлверишлидир. Бу һалда $\sin 1$ олараг, радиан өлчүсү 1 олан α бучағынын синусу көтүрүлүр: $\sin 1=\sin\alpha$;

$\cos 3$ ишарәси радиан өлчүсү 3 олан β бучағынын косинусуну көстәрир:

$$\cos 3=\cos\beta.$$

Тригонометрик функсијаларын тә'рифинә әсасән онларын варлыг областыны муәјјән етмәк олар.

$\sin x$ вә $\cos x$ функсијаларынын варлыг областы бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу: $(-\infty, \infty)$ интервалы, гијмәтләри чохлуғу исә $[-1, 1]$ парчасыдыр.

Мә'лумдур ки, аргументин анчаг $\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ шәклиндә олан гијмәтләри $\operatorname{tg} x$ функсијасынын варлыг областына дахил дејилдир. Демәли, $\operatorname{tg} x$ функсијасынын варлыг областы $\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ вә ја $-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi$ (κ истәнилән там әдәддир) шәклиндә әдәдләрдән фәргли олан бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу, ја'ни бүтүн

$$\left(-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi,\ \frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right) \quad (\kappa=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$$

интерваллары чохлуғудур.

$\operatorname{ctg} x$ функсијасынын варлыг областы исә $\kappa\pi$ $(\kappa=0, \pm 1, \ldots)$ шәклиндә әдәдләрдән фәргли олан бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу, јә'ни бүтүн

$$(\kappa\pi, (\kappa+1)\pi) \quad (\kappa=0, \pm 1, \ldots)$$

интерваллары чохлуғу олар.

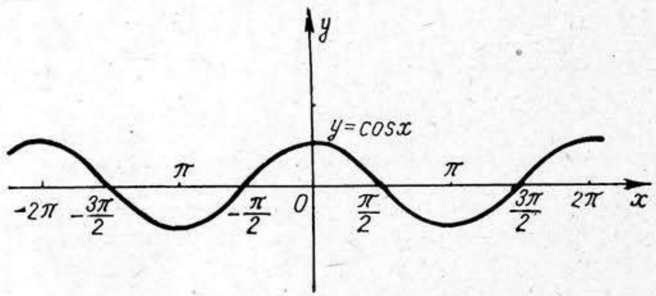
$\operatorname{tg} x$ вә $\operatorname{ctg} x$ функсијаларынын гијмәтләри чохлуғу бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғудур.

Тригонометрик функсијалар үмуми дөврү 2π олан дөври функсијалардыр. Башга сөзлә, истәнилән тригонометрик функсија үчүн

$$f(x+2\kappa\pi) = f(x) \quad (\kappa=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

бәрабәрлији доғрудур. $\sin x$ вә $\cos x$ функсијаларынын ән кичик мүсбәт дөврү 2π, $\operatorname{tg} x$ вә $\operatorname{ctg} x$ функсијаларынын исә ән кичик мүсбәт дөврү π әдәдидир. $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ вә $\operatorname{ctg} x$ функсијалары тәк, $\cos x$ функсијасы исә чүтдүр.

Мә'лумдур ки, $y=\sin x$ функсијасы $\left[-\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi, \frac{\pi}{2}+2\kappa\pi\right]$ $(\kappa=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ парчаларынын һәр бириндә (-1)-дән $(+1)$-ә гәдәр монотон артыр, $\left[\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi, -\frac{\pi}{2}+2\kappa\pi\right]$ $(\kappa=0, \pm 1, \ldots)$ парчаларынын һәр бириндә исә $(+1)$-дән (-1)-ә гәдәр монотон азалыр.

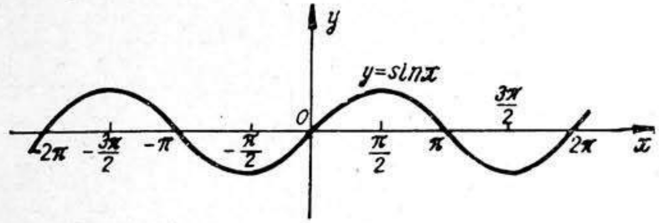


Шәкил 113.

$y = \cos x$ функсијасы $[2\kappa\pi, (2\kappa+1)\pi]$ $(\kappa=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ парчаларынын һәр бириндә $(+1)$-дән (-1)-ә гәдәр монотон азалыр, $[(2\kappa-1)\pi, 2\kappa\pi]$ $(\kappa=0, \pm 1, \ldots)$ парчаларынын һәр бириндә исә (-1)-дән $(+1)$-ә гәдәр монотон артыр.

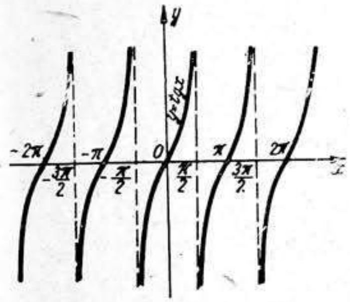
$y = \operatorname{tg} x$ функсијасы $\left(-\frac{\pi}{2}+\kappa\pi, \frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right)$ $(\kappa=0, \pm 1, \ldots)$ интервалларынын һәр бириндә $(-\infty)$-дан ∞-а кими монотон

артыр, $y=\operatorname{ctg} x$ функсијасы исә $(\kappa\pi, (\kappa+1)\pi)$ $(\kappa=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ интервалларынын һәр бириндә $(+\infty)$-дан, $(-\infty)$-а кими монотон азалыр.

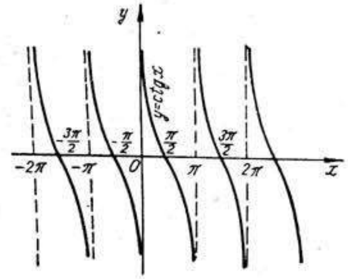


Шәкил 114.

Тригонометрик функсијаларын графики 113, 114, 115 вә 116-чы шәкилләрдә верилмишдир.



Шәкил 115.



Шәкил 116.

§ 18. ТӘРС ТРИГОНОМЕТРИК ФУНКСИЈАЛАР

$y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arc\,tg} x$ вә $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ функсијаларына *аркфунксијалар* вә ја *тәрс тригонометрик функсијалар* дејилир.

$y=\arcsin x$ функсијасы

$y = \sin x$ тригонометрик функсијасына бүтүн әдәд оху үзәриндә бахдыгда, јә'ни $\sin x$-ин тә'јин областы олараг бүтүн әдәд оху $X = (-\infty, \infty)$ көтүрдүкдә, онун тәрс функсијасы јохдур. Чүнки $y = \sin x$ функсијасынын $[-1, 1]$ гијмәтләри чохлуғунда јерләшән һәр бир $y_0 \in [-1; 1]$ әдәди үчүн x-ин $(-\infty, \infty)$ интервалында $y_0=\sin x_0$ бәрабәрлијини өдәјән сонсуз сајда $x=x_0+2\kappa\pi$ $(\kappa = 0, \pm 1, \ldots)$ гијмәтләри вардыр.

$y = \sin x$ функсијасына бүтүн әдәд оху үзәриндә дејил, монотон олдуғу һәр һансы парчада бахдыгда исә онун тәрс функси-

јасынын олдуғуну демәк олар. $X_0^{(1)} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ олсун. Мә'лумдур ки, $y=\sin x$ функсијасы $X_0^{(1)}$ областында монотон артандыр вә онун гијмәтләри чохлуғу $У = [-1, 1]$ парчасыдыр. Онда јухарыда исбат етдијимиз теоремә көрә $y=\sin x$ функсијасынын $[-1, 1]$ парчасында тәрс функсијасы вардыр. $y = \sin x$ функсијасынын тәрс функсијасына *арксинус* дејилир вә

$$x = \arcsin y \qquad (1)$$

вә ја функсијаны y, аргументи x илә көстәрдикдә

$$y = \arcsin x \qquad (2)$$

кими көстәрилир. $\sin x$ вә $\arcsin x$ гаршылыглы тәрс функсијалар олдуғундан һәр бир $x \in [-1, 1]$ үчүн

$$\sin(\arcsin x) = x. \qquad (3)$$

(3) мүнасибәтиндән истифадә едәрәк $y = \sin x$ функсијасынын монотон олдуғу һәр бир парчада онун тәрс функсијасыны тә'јин етмәк олар. Мә'лумдур ки, $y = \sin x$ функсијасы һәр бир $X_{\text{к}}^{(1)} = \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ парчасында (-1)-дән $(+1)$-ә гәдәр монотон артыр. Буна көрә дә $X_{\text{к}}^{(1)}$ парчасында һәмин функсијанын, гијмәтләри $X_{\text{к}}^{(1)}$ областында јерләшән тәрс функсијасы вар. Бу функсијаны $y_{\text{к}}^{(1)}(x)$ илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, $\arcsin x + 2k\pi$ әдәди $X_{\text{к}}^{(1)}$ парчасында јерләшир вә (3)-ә көрә:

$$\sin[\arcsin x + 2k\pi] = \sin(\arcsin x) = x.$$

Бурадан ајдындыр ки, $y_{\text{к}}^{(1)}(x) = \arcsin x + 2k\pi$ функсијасы $X_{\text{к}}^{(1)}$ парчасына нәзәрән $y = \sin x$ функсијасынын тәрс функсијасыдыр. $X_{\text{к}}^{(2)} = \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right]$ парчасында $y = \sin x$ функсијасы $+1$-дән -1-ә гәдәр монотон азалыр. Буна көрә дә $[-1, 1]$ парчасында $y = \sin x$ функсијасынын, гијмәтләри $X_{\text{к}}^{(2)}$ областында јерләшән тәрс функсијасы вардыр. $(\pi - \arcsin x) + 2k\pi$ әдәди $X_{\text{к}}^{(2)}$ парчасында јерләшир вә (3) бәрабәрлијинә көрә:

$$\sin[(\pi - \arcsin x) + 2k\pi] = \sin(\pi - \arcsin x) =$$
$$= \sin \text{arc}\,(\sin x) = x.$$

Демәли, $y_{\text{к}}^{(2)}(x) = (\pi - \arcsin x) + 2k\pi$ вә ја $y_{\text{к}}^{(2)}(x) = -\arcsin x + (2k+1)\pi$ функсијасы $X_{\text{к}}^{(2)}$ парчасына нәзәрән $y = \sin x$ функсијасынын тәрс функсијасыдыр.

$y = \sin x$ функсијасынын $X_{\text{к}}^{(1)}$ вә $X_{\text{к}}^{(2)}$ парчаларына нәзәрән үјғун олараг тәрс функсијасы олан

$$y_{\text{к}}^{(1)}(x) = \arcsin x + 2k\pi$$

вә

$$y_{\text{к}}^{(2)}(x) = -\arcsin x + (2k+1)\pi$$

функсијаларынын хассәләрини $y = \arcsin x$ функсијасынын хассәләринә әсасән мүәјјән етмәк олар. Буна көрә дә (2) функсијасынын хассәләрини өјрәнмәклә кифајәтләнәчәјик.

1. $y = \arcsin x$ *функсијасынын тә'јин областы* $[-1, 1]$ *парчасыдыр.*

Бу хассә ашкардыр, чүнки $y = \sin x$ функсијасынын $X_0^{(1)} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ парчасында алдығы гијмәтләр $[-1, 1]$ парчасыны тәшкил едир. Онда $[-1, 1]$ парчасы арксинусун тә'јин областы олачагдыр.

2. $y = \arcsin x$ *функсијасы* $[-1, 1]$ *парчасында монотон артандыр вә гијмәтләри* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *парчасыны тәшкил едир.*

Бу хассә тәрс функсијанын варлығы теореминдән алыныр. Доғрудан да, $x = \sin y$ функсијасы $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ парчасында монотон артан функсијадыр. Буна көрә дә онун тәрси олан $y = \arcsin x$ функсијасы $[-1, 1]$ парчасында ($\sin y$-ин гијмәтләри чохлуғунда) монотон артандыр. Бурадан $y = \arcsin x$ функсијасынын башга бир хассәси дә алыныр.

3. $y = \arcsin x$ *функсијасы тәк функсијадыр:*

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

Мә'лумдур ки, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(-x) \leqslant \frac{\pi}{2}$ вә (3) бәрабәрлијинә көрә $\sin[\arcsin(-x)] = -x$ мүнасибәти өдәнилир. $\arcsin x$ әдәди $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ парчасында јерләшдијиндән $-\arcsin x$ дә һәмин парчада јерләшәр: $-\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Бундан әлавә, һәр бир $x \in [-1, 1]$ үчүн

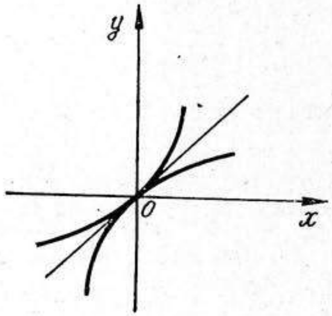
$$\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x.$$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ парчасында јерләшән $\arcsin(-x)$ вә $(-\arcsin x)$ гөвсләринин синуслары бәрабәр олдуғундан:

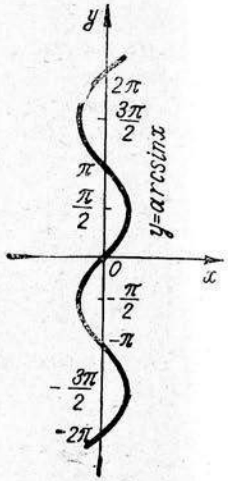
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

$y = \arcsin x$ функсијасынын графикини гурмаг үчүн $y=\sin x$ функсијасынын графикини биринчи координат бучағынын тәнбөләни әтрафында чевирмәк лазымдыр (117-чи шәкил).

$y_k^{(1)}(x)$ вә $y_k^{(2)}(x)$ функсијаларынын графикләри бирликдә *арксинусоид хәттини* тәшкил едир (118-чи шәкил). Арксинусоид хәтти биринчи координат бучағынын тәнбөләнинә көрә синусоид илә симметрикдир.



Шәкил 117.



Шәкил 118.

$y = \arccos x$ функсијасы

$y=\cos x$ функсијасынын тәрс функсијасыны тә'јин етмәк үчүн онун монотон олдуғу һәр һансы парчаны (вә ја интервалы) көтүрмәк лазымдыр.

$[0, \pi]$ парчасында $y = \cos x$ функсијасы монотон азаландыр вә онун гијмәтләри чохлуғу $Y = [-1, 1]$ парчасыдыр. Онда функсијанын варлығы һаггындакы теоремә көрә $[-1, 1]$ парчасында $y = \cos x$ функсијасынын тәрс функсијасы вардыр. Бу функсија *арккосинус* адланыр вә

$$x = \arccos y \quad (\text{вә ја } y = \arccos x)$$

кими көстәрилир.

$y = \cos x$ функсијасынын монотон олдуғу һәр бир парчада онун тәрс функсијасы вардыр. Бу функсијалары $\arccos x$ васитәсилә гурмаг олар. $E_k^{(1)} = [2k\pi, (2k+1)\pi]$ парчасында $y=\cos x$ функсијасы монотон азаландыр. Буна көрә дә һәмин парчада онун $y_k^{(1)}(x)$ тәрс функсијасы вардыр. Һәр бир $x\in[-1, 1]$ үчүн

$\arccos x + 2k\pi$ әдәди (гөвсү) $E_k^{(1)}$ парчасында јерләшдијиндән вә $\cos(\arccos x + 2k\pi) = \cos(\arccos x) = x$ бәрабәрлијинин доғрулуғундан ајдындыр ки,

$$y_k^{(1)}(x) = \arccos x + 2k\pi$$

функсијасы $E_k^{(1)}$ парчасына нәзәрән $y = \cos x$ функсијасынын тәрс функсијасыдыр.

Ејни гајда илә көстәрә биләрик ки, $y = \cos x$ функсијасынын монотон артан олдуғу $E_k^{(2)} = [(2k-1)\pi, 2k\pi]$ парчасына нәзәрән тәрс функсијасы $y_k^{(2)}(x) = -\arccos x + 2k\pi$ функсијасыдыр.

Арккосинус функсијасынын тә'рифинә вә тәрс функсијанын варлығы һаггындакы теоремә әсасән $y = \arccos x$ функсијасынын ашағыдакы хассәләрини сөјләмәк олар.

1. $y=\arccos x$ *функсијасынын тә'јин областы* $[-1, 1]$ *парчасыдыр.*

2. $y = \arccos x$ *функсијасы* $[-1, 1]$ *парчасында монотон азаландыр вә онун гијмәтләри* $[0, \pi]$ *парчасыны тәшкил едир.*

3. $\arccos x$ *функсијасы үчүн*

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \qquad (4)$$

бәрабәрлији доғрудур.

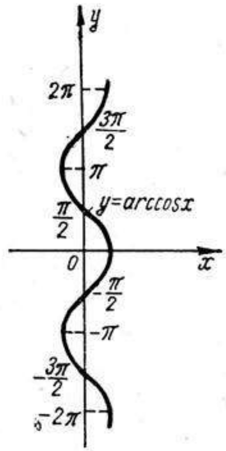
Исбаты. Мә'лумдур ки, һәр бир $x\in[-1, 1]$ үчүн $\arccos(-x)$ әдәди (гөвсү) $[0, \pi]$ парчасында јерләшир. Бундан әлавә, $0\leqslant \arccos x \leqslant \pi$ бәрабәрсизлијиндән ајдындыр ки, $0\leqslant\pi-\arccos x\leqslant\pi$.

$$\cos[\arccos(-x)] = -x,$$
$$\cos[\pi - \arccos x] = -\cos(\arccos x) = -x$$

олмасы вә $\arccos(-x)$, $\pi-\arccos x$ әдәдләринин һәр икисинин $[0, \pi]$ парчасында јерләшмәси

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

бәрабәрлијинин доғру олдуғуну көстәрир.



Шәкил 119.

$y = \cos x$ функсијасынын графикини биринчи координат бучағынын тәнбөләни әтрафында чевирмәклә $y=\arccos x$ функсијасынын графикини алмаг олар.

$y_k^{(1)}(x)$ вә $y_k^{(2)}(x)$ функсијаларынын графикләри бирликдә *арккосинусоид хәттини* тәшкил едир (119-чу шәкил). Арккосинусоид хәтти биринчи координат бучағынын тәнбөләнинә көрә косинусоид илә симметрикдир.

$y = \operatorname{arc\,tg} x$ функсијасы

$G_0 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ интервалында монотон артан вә гијмәтләри $(-\infty, \infty)$ интервалыны тәшкил едән $y = \operatorname{tg} x$ функсијасынын һәмин интервалда тәрс функсијасы вардыр. Бу функсија *арктангенс* адланыр вә $x = \operatorname{arc\,tg} y$ (вә ја $y = \operatorname{arc\,tg} x$) кими көстәрилир.

G_0 интервалында $y = \operatorname{tg} x$ функсијасынын тәрс функсијасы, истәнилән $G_\kappa = \left(-\frac{\pi}{2} + \kappa\pi, \ \frac{\pi}{2} + \kappa\pi\right)$ интервалында онун тәрс функсијасыны гурмаға имкан верир. $\operatorname{arc\,tg} x + \kappa\pi$ әдәди (гөвсү) G_κ интервалында јерләшдијиндән вә

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \kappa\pi) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$$

олмасындан көрүнүр ки,

$$y_\kappa(x) = \operatorname{arctg} x + \kappa\pi$$

функсијасы G_κ интервалына нәзәрән $y = \operatorname{tg} x$ функсијасынын тәрс функсијасыдыр.

$y = \operatorname{arc\,tg} x$ функсијасынын бир сыра хассәләрини нәзәрдән кечирәк.

1. $y = \operatorname{arctg} x$ *функсијасынын тә'јин областы бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғудур.* Доғрудан да, $y = \operatorname{tg} x$ функсијасынын $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында алдығы гијмәтләр $(-\infty, \infty)$ интервалыны тәшкил едир. Буна көрә дә $(-\infty, \infty)$ интервалы тәрс функсијанын тә'јин областыдыр.

2. $y = \operatorname{arc\,tg} x$ *функсијасы* $(-\infty, \infty)$ *интервалында монотон артандыр вә онун гијмәтләри* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *интервалыны тәшкил едир.*

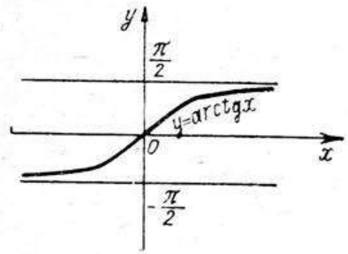
Бу хассә тәрс функсијанын варлығы теореминдән ајдындыр. $x = \operatorname{tg} y$ функсијасы $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында монотон артандыр. Онда онун тәрс функсијасы да $(-\infty, \infty)$ интервалында монотон артан олар.

3. $y = \operatorname{arctg} x$ *функсијасы тәк функсијадыр:*

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x. \tag{5}$$

Исбаты. Мә'лумдур ки, һәр бир $x \in (-\infty, \infty)$ үчүн $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-x) < \frac{\pi}{2}$ вә $\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(-x)] = -x$.

Бундан башга $\operatorname{arctg} x$ әдәди $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында јерләшдијиндән $-\operatorname{arc\,tg} x$ дә һәмин интервалда јерләшир. Ајдындыр ки, $\operatorname{tg}(-\operatorname{arc\,tg} x) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = -x$ олар. $\operatorname{arc\,tg}(-x)$ вә $-\operatorname{arc\,tg} x$ гөвсләринин бәрабәр олмасы (5) бәрабәрлијинин доғру олдуғуну көстәрир. $y = \operatorname{arc\,tg} x$ функсијасынын графики асанлыгла гурулур (120-чи шәкил).



Шәкил 120.

$y = \operatorname{arc\,ctg} x$ функсијасы

$y = \operatorname{ctg} x$ функсијасынын монотон олдуғу һәр бир интервалда онун тәрс функсијасы вардыр. $(0, \pi)$ интервалында монотон азалан $y = \operatorname{ctg} x$ функсијасынын тәрс функсијасы вар вә *арккотангенс* адланыр. Бу функсија $x = \operatorname{arcctg} y$ (вә ја $y = \operatorname{arcctg} x$) кими көстәрилир. $(\kappa\pi, (\kappa+1)\pi)$ интервалында $y = \operatorname{ctg} x$ функсијасынын

$$y_\kappa(x) = \operatorname{arcctg} x + \kappa\pi$$

тәрс функсијасынын олдуғуну көстәрмәк олар.

$y = \operatorname{arcctg} x$ функсијасынын хассәләрини нәзәрдән кечирәк:

1. $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ *функсијасынын тә'јин областы* $(-\infty, \infty)$ *интервалыдыр.*

2. $(-\infty, \infty)$ *интервалында* $y = \operatorname{arcctg} x$ *функсијасы* π*-дән 0-а гәдәр монотон азалыр вә гијмәтләри* $(0, \pi)$ *интервалыны тәшкил едир.*

3. $\operatorname{arcctg} x$ *функсијасы үчүн*

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \tag{6}$$

бәрабәрлији доғрудур.

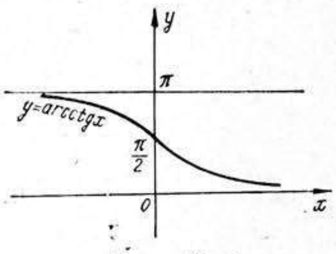
(6) бәрабәрлији (4) бәрабәрлији кими исбат олунур. $(0, \pi)$ интервалында јерләшән $\operatorname{arcctg}(-x)$ вә $\pi - \operatorname{arcctg} x$ әдәдләри үчүн

$$\operatorname{ctg}(\pi - \operatorname{arcctg} x) = -x$$

вә

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(-x)) = -x$$

бәрабәрликләринин өдәнилмәси (6) дүстурунун доғрулуғуну көстәрир.



Шәкил 121.

$y = \operatorname{arcctg} x$ функсијасынын графики 121-чи шәкилдә көстәрилмишдир.

§ 19. ЕЛЕМЕНТАР ФУНКСИЈАЛАР

16—18-чи параграфларда өјрәндијимиз үстлү, гүввәт, логарифмик, тригонометрик вә тәрс тригонометрик функсијалара *әсас елементар функсијалар* дејилир.

Әсас елементар функсијалар үзәриндә мүәјјән әмәлләр апармагла мүхтәлиф функсијалар алмаг олар. Әсас елементар функсијалар вә сабитләр үзәриндә сонлу сајда дөрд һесаб әмәли (топлама, чыхма, вурма, бөлмә) вә *суперпозисијалар* («мүрәккәб функсија дүзәлтмә» әмәли) тәтбиг етмәклә алынан вә бир дүстурла ифадә олунан $y = f(x)$ функсијасына *елементар функсија* дејилир.

Елементар функсијалар синфи чох енишдир вә онлар аналитик үсулла верилмиш функсијалардыр. Ријази анализ курсунда әсасән елементар функсијалар өјрәнилир.

Мисал 1.

$$y = \sin x^3 + (\log x)^2,$$

$$y = x^3 \cdot 2^x + \arcsin x^2,$$

$$y = \frac{\sqrt{3^x} + \operatorname{tg}^2(x+1)}{2^x + \log_2 x}$$

$$y = \sqrt{2 + x \sin x}$$

вә с. елементар функсијалардыр.

Елементар олмајан функсијалара *гејри-елементар функсијалар* дејилир.

Мисал 2. $y = |x|$ вә $y = [x]$ функсијалары гејри-елементар функсијалардыр.

Мисал 3. Дирихленин

$$y = \begin{cases} 1, & x \text{ расионал әдәд олдугда,} \\ 0, & x \text{ иррасионал әдәд олдугда} \end{cases}$$

функсијасы ики бәрабәрликлә тә'јин олундуғундан гејри-елементар функсијадыр.

Мисал 4. Ашағыдакы кими тә'јин олунан

$$y = \begin{cases} x, & x \leqslant -1 \text{ олдугда,} \\ x^2-5, & -1 < x \leqslant 1 \text{ олдугда,} \\ x^3 & x > 1 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функсијасы бир дүстурла ифадә олунмадығындан гејри-елементар функсијадыр.

§ 20. ЧӘБРИ ВӘ ТРАНССЕНДЕНТ ФУНКСИЈАЛАР

Елементар функсијалар чәбри вә трансендент функсијалар олмагла ики синфә бөлүнүр.

1. Чәбри функсијалар

$$P_0(x)\, y^n + P_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)\, y + P_n(x) = 0 \qquad (1)$$

шәклиндә тәнлији өдәјән функсијаја *чәбри функсија* дејилир.

Бурада $P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x)$ ифадәләри

$$P_\kappa(x) = a_0^{(\kappa)} x^m + a_1^{(\kappa)} x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}^{(\kappa)}\, x + a_m^{(\kappa)} \qquad (2)$$

$$(P_0(x) \neq 0,\ \kappa = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

шәклиндә садә елементар функсијалардыр. (2) функсијасына x-ә нәзәрән m, (там вә мүсбәт әдәддир) *дәрәчәли чәбри чохһәдли*, һәгиги $a_0^{(\kappa)},\ a_1^{(\kappa)},\ \ldots,\ a_m^{(\kappa)}$ әдәдләринә исә һәмин *чохһәдлинин әмсаллары* дејилир.

Чәбри функсијаларын бир сыра садә нөвләрини гејд едәк:

а) истәнилән m-дәрәчәли һәр бир чохһәдли чәбри функсијадыр. (2) шәклиндә олан белә функсијалара m-дәрәчәли чәбри чохһәдли вә ја там *расионал функсија* дејилир. Бу функсијаларын тә'јин областы бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғудур.

15-чи §-да өјрәндијимиз хәтти функсија,

$$y = ax^2 + bx + c$$

шәклиндә квадратик функсија вә с. ән садә там расионал функсијалардыр.

б) ики там расионал функсијанын нисбәти шәклиндә көстәрилә билән һәр бир

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_{m-1}x + b_m} \quad (3)$$

чәбри функсијасына *расионал функсија* дејилир.

Расионал функсијанын тә'јин областы мәхрәчин сыфра чеврилмәдији бүтүн һәгиги x әдәдләри чохлуғудур.

Мисал 1. $y = x + 2x^2 + x^3$ вә $y = x+3$ функсијалары там расионал,

$$y = \frac{2 + x^3}{1+x+x^4}, \quad y = \frac{\sqrt{3} + x^3}{x + \sqrt{2x^3}}$$

исә расионал функсијалардыр.

в) чәбри $y = f(x)$ функсијасыны алмаг үчүн x аргументи үзәриндә топлама, чыхма, вурма вә бөлмә әмәлләриндән башга там олмајан расионал үстлү гүввәтә јүксәлтмә, ја'ни көкалма әмәли дә апарыларса, онда һәмин функсијаја *иррасионал функсија* дејилир.

Мисал 2.

$$y = \sqrt{x^2-1} + x \quad \text{вә} \quad y = \frac{x+\sqrt{x-1}}{1 + \sqrt{x}}$$

иррасионал функсијалардыр.

Ајдындыр ки, чәбри функсијалар ашкар вә гејри-ашкар ола биләр. Расионал вә иррасионал функсијалар ашкар чәбри функсијалар чохлуғуну тәшкил едир.

2. Транссендент функсијалар

Чәбри олмајан функсијалара *транссендент функсија* дејилир. Үстлү, логарифмик, тригонометрик, тәрс тригонометрик вә гүввәт (үстү расионал әдәд олмадыгда) функсијалары транссендент функсијалардыр.

Мисал 3. $y = x \sin x$ вә $y = 2^x + \operatorname{tg} x$ функсијалары транссендент функсијалардыр.

§ 21. ҺИПЕРБОЛИК ФУНКСИЈАЛАР

Ријази анализин бир сыра мәсәләләрә тәтбигиндә бу функсијалардан кениш истифадә едилир.

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

функсијасына *һиперболик синус* дејилир вә $\operatorname{sh} x$ илә ишарә едилир:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (1)$$

бурада $e = 2{,}71828284...$ иррасионал әдәддир.

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2)$$

функсијасына *һиперболик косинус* дејилир вә $\operatorname{ch} x$ илә ишарә едилир.

Бу функсијалар васитәсилә һиперболик танкенс

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (3)$$

вә һиперболик котанкенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (4)$$

функсијалары тә'јин олунур.

(1)—(4) мүнасибәтләриндән ајдындыр ки, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ вә $\operatorname{th} x$ функсијаларынын тә'јин областы бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғу, $\operatorname{cth} x$ функсијасынын тә'јин областы исә сыфырдан фәргли олан бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғудур.

(1) вә (2) бәрабәрликләрини квадрата јүксәлдиб сонра тәрәф-тәрәфә чыхсаг:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$

вә ја

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (5)$$

бәрабәрлијини аларыг. (5) мүнасибәти $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ тригонометрик ејнилијинә охшајыр. Һиперболик функсијалар арасында башга тригонометрик ејниликләрә охшар мүнасибәтләр дә вардыр. Мәсәлән,

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sh}y,$$
$$\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{ch}y - \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{sh}y,$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch}x \cdot \operatorname{ch}y \pm \operatorname{sh}x \cdot \operatorname{sh}y.$$

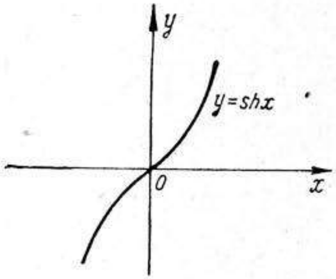
Бу дүстурларын көмәји илә

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$$

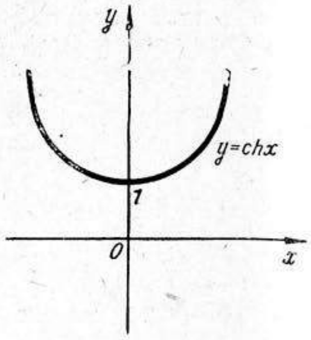
$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{th}^2 x}{1 - \operatorname{th}^2 x}$$

вә с. кими мүнасибәтләр алмаг олар.

$y = \operatorname{sh} x$ функсијасы тәк функсијадыр; $x>0$ олдугда мүсбәт, $x<0$ олдугда мәнфи вә $x=0$ нөгтәсиндә $\operatorname{sh}0=0$ гијмәтини алыр. Бу функсијанын графики 122-чи шәкилдә верилмишдир. $y=\operatorname{ch} x$

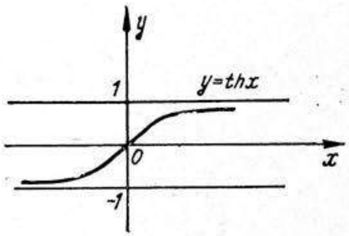


Шәкил 122.

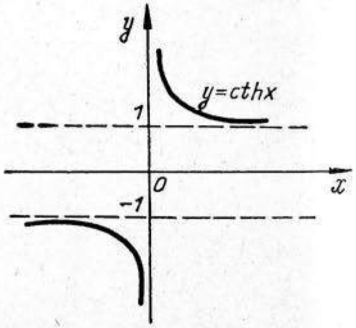


Шәкил 123.

функсијасы чүт функсијадыр вә x-ин бүтүн гијмәтләриндә мүсбәт гијмәт алыр. Онун графики 123-чү шәкилдә верилир. $y=\operatorname{th} x$ функсијасы да тәк функсијадыр вә $\operatorname{th}0=0$. Бу функсијанын графики 124-чү шәкилдә көстәрилмишдир. $y=\operatorname{cth} x$ функсијасынын графики исә 125-чи шәкилдә верилмишдир.



Шәкил 124.



Шәкил 125.

Һиперболик функсијаларын тәрс функсијаларына *тәрс һиперболик функсијалар* дејилир вә ујғун олараг

$$y=\operatorname{Ar}\operatorname{sh} x,\ y=\operatorname{Ar}\operatorname{ch} x,\ y=\operatorname{Ar}\operatorname{th} x,\ y=\operatorname{Ar}\operatorname{cth} x$$

илә ишарә едилир.

Бу функсијаларын хассәләрини өјрәнмәји вә графикләрини гурмағы охучулара һәвалә едирик.

§ 22. ТАМ ГИЈМӘТЛИ АРГУМЕНТИН ФУНКСИЈАСЫ ВӘ ЈА АРДЫЧЫЛЛЫГ

Индијә кими бахдығымыз функсијаларын аргументләри кәсилмәз типли дәјишән кәмијјәтләр иди (§ 1). Буна көрә дә һәмин функсијаларын тә'јин областы интервал, парча вә с. олурду.

Функсијанын аргументи, там гијмәтләр алан дәјишән кәмијјәт олдугда онун тә'јин областы әдәд охунун там әдәдләри чохлуғундан ибарәт олар. Бу функсијалардан тә'јин областы

$$N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\} \qquad (1)$$

натурал әдәдләр чохлуғу олан функсијаларын бөјүк әһәмијјәти вардыр. Белә функсијалара *там гијмәтли аргументин функсијасы* дејилир.

Т ә р и ф. *(1) натурал әдәдләр чохлуғунда тә'јин олунмуш $f(n)$ функсијасына ардычыллыг дејилир.*

Чох заман $f(n)$ әвәзинә, индекси аргументин n гијмәти олан бир һәрф јазылыр. Мәсәлән y_n, u_n, x_n вә с. $n=1, 2, \ldots$ олдугда функсијанын алдығы гијмәтләри ардычыл јазсаг,

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ \ldots,\ f(n),\ \ldots$$

вә ја

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots \qquad (2)$$

кими әдәдләр дүзүлүшүнү аларыг.

$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ әдәдләринә ардычыллығын *һәдләри*, y_1-ә ардычыллығын *биринчи*, y_n-ә исә онун *үмуми* (n-чи) *һәдди* дејилир.

(2) ардычыллығы гыса олараг $\{y_n\}$ кими ишарә едилир.

N чохлуғунда тә'јин олунмуш $f(n)$ функсијасынын верилмә үсулундан асылы олараг, ардычыллыг һәр һансы дүстур (үмуми һәддин дүстуру) вә ја ганун (ујғунлуг гануну) илә верилә биләр.

Мисал 1. $y_n = \dfrac{1}{n}$ вә ја $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ ардычыллыгдыр.

Мисал 2. $y_n = (-1)^n$ вә ја ачыг шәкилдә јазылмыш $-1, +1, -1, +1, \ldots$ ардычыллығы анчаг ики әдәддән ибарәтдир.

Мисал 3. $y=n!$ ардычыллығында ишләдилән ! (факториал) ишарәсинин мә'насы беләдир: $n!$ илә 1-дән n-ә гәдәр олан бүтүн натурал әдәдләрин һасили ишарә олунур:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$$

Мисал 4. $y = n!!$ ардычыллығында ишләдилән !! ишарәсинин мә'насы беләдир: $n!!$ илә n тәк әдәд олдугда 1-дән n-ә гәдәр олан бүтүн тәк әдәдләрин һасили, n чүт әдәд олдугда исә 1-дән n-ә гәдәр олан бүтүн чүт әдәдләрин һасили ишарә олунур:

$$(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n-2)\cdot 2n$$

вә

$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)\cdot(2n+1).$$

Мисал 5. Орта мәктәбдән мә'лум олан әдәди вә һәндәси силсиләләр ардычыллыгдыр. Бу ардычыллыгларын үмуми һәдләринин дүстуру ујғун олараг ашағыдакы шәкилдә јазылыр:

$$y_n = a_1 + (n-1)d \quad \text{вә} \quad y_n = a_1\cdot q^{n-1}.$$

Ардычыллыг там гијмәтли аргументин функсијасы олдуғундан онун мәһдудлуғундан, монотонлуғундан вә с.-дән данышмаг олар.

Тә'риф. *$\{y_n\}$ ардычыллығынын бүтүн һәдләри сабит M әдәдини ашмадыгда, јә'ни n-ин бүтүн гијмәтләриндә*

$$y_n \leqslant M \ (n = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

бәрабәрсизлији өдәнилдикдә, она јухарыдан мәһдуд ардычыллыг дејилир.

$\{y_n\}$ ардычыллығынын бүтүн һәдләри сабит m әдәдиндән кичик олмадыгда, јә'ни n-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$y_n \geqslant m \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

олдугда, она ашағыдан мәһдуд ардычыллыг дејилир.

Јухарыдан вә ашағыдан мәһдуд олан ардычыллыға мәһдуд ардычыллыг дејилир.

Бурадан ајдындыр ки, n-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$|y_n| \leqslant C \tag{4}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән C әдәдинин варлығы $\{y_n\}$ ардычыллығынын мәһдуд олмасы үчүн зәрури вә кафи шәртдир.

Тә'риф. *Мәһдуд олмајан ардычыллыға гејри-мәһдуд ардычыллыг дејилир.*

Ардычыллығын јухарыдан вә ашағыдан гејри-мәһдуд олмасындан да данышмаг олар.

Мисал 6. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\{(-1)^n\}$ вә $\left\{\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ардычыллыглары мәһдуддур:

$$\left|\frac{1}{n}\right| \leqslant 1, \ |(-1)^n| \leqslant 1, \ \left|\sin\frac{\pi}{2}\cdot n\right| \leqslant 1 \ (n=1, 2, \ldots).$$

Мисал 7. $\{n^2\}$ вә $\left\{n\cdot\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ардычыллыглары гејри-мәһдуддур. Бу ардычыллыглар үчүн n-ин бүтүн гијмәтләриндә (4) бәрабәрсизлијини өдәјән һеч бир сабит C әдәди јохдур.

Тә'риф. *n-ин бүтүн гијмәтләриндә*

$$y_n \leqslant y_{n+1}, \ n = 1, 2, \ldots$$

$$(y_n \geqslant y_{n+1}, \ n = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

бәрабәрсизлији өдәнилдикдә $\{y_n\}$ ардычыллығына монотон артан (азалан) ардычыллыг дејилир.

Монотон артан вә монотон азалан ардычыллыглара, садәчә монотон ардычыллыглар дејилир.

Мисал 8. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ардычыллығы монотон азалан, $\{n^2\}$ ардычыллығы исә монотон артандыр.

$\{(-1)^n\}$ вә $\left\{n\sin\frac{\pi}{2}n\right\}$ ардычыллыглары исә монотон дејилдир.

§ 23. САДӘ ЕМПИРИК ДҮСТУРЛАРЫН СЕЧИЛМӘСИ

Тутаг ки, һәр һансы $y = f(x)$ функсионал асылылығы (ганунаујғунлуғу) тәчрүби (експериментал) олараг өјрәнилир. Експеримент нәтичәсиндә аргументин $x_к$ ($к=0, 1, \ldots, n$) гијмәтләринә функсијанын ујғун олан $y_к$ ($к=0, 1, \ldots, n$) гијмәтләри тапылмышдыр. Бу гијмәтләр чәдвәл шәклиндә јазылыр вә һәмин гијмәтләрә әсасланараг ахтарылан $y = f(x)$ функсијасынын графики (әлбәттә, тәгриби) гурулур.

Бир чох һалларда тәртиб олунмуш чәдвәл вә јахуд гурулмуш графикә әсасән функсионал асылылығы дүстур шәклиндә көстәрмәк мәсәләси гаршыја гојулур. Белә тапылан $y = \varphi(x)$ дүстуруна *емпирик дүстур* дејилир. Ајдын мәсәләдир ки, емпирик дүстур тәгриби олараг тапылыр вә ону сечәркән чалышырлар ки, бахылан интервалда $\varphi(x)$ функсијасы $f(x)$ функсијасына ән јахшы јахынлашан олсун.

$\varphi(x)$ функсијасынын $f(x)$-ә јахынлығы мүхтәлиф шәкилләрдә баша дүшүлә биләр. Бир чох мәсәләләрдә елә $\varphi(x)$ функсијасы ахтарырлар ки, һәмин функсија үчүн

$$\sup_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x) - \varphi(x)|$$

кәмијјәти ән кичик олсун. Ики функсијанын јахынлығыны ән кичик квадратлар үсулу илә дә тә'јин етмәк олар: ахтарылан $y = f(x)$ функсијасы үчүн елә емпирик $y = \varphi(x)$ дүстуру сечирләр ки, һәмин $\varphi(x)$ функсијасы үчүн

$$\lambda = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2$$

кәмијјәти ән кичик олсун.

Емпирик $y = \varphi(x)$ дүстуру мүхтәлиф үсулла сечилә биләр. Бә'зән верилән фактлара вә ја үмуми нәзәри мүһакимәләрә әсасән $y=\varphi(x)$ функсијасынын нә шәкилдә олмасы һаггында әввәлчәдән мүәјјән фикир сөјләмәк мүмкүн олур. Бу мүмкүн олмадыгда исә $y = \varphi(x)$ функсијасыны әввәлләр өјрәндијимиз хәтти, квадратик, гүввәт, үстлү, тригонометрик вә с. функсијаларынын бири вә јахуд онларын мүәјјән комбинасијасы шәклиндә ахтарырлар.

Мәсәлән, тутаг ки, емпирик $\varphi(x)$ функсијасы n-дәрәчәли

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \tag{1}$$

чәбри чохһәдлиси шәклиндә ахтарылыр. x-ин $(n+1)$ сајда $x_к$ $(к=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ гијмәтләринә $y=f(x)$ функсијасынын ујғун олан $y_к = f(x_к)$ $(к = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ гијмәтләри мә'лум олдугда (1) чохһәдлисини елә сечмәк олар ки, онун $x_к$ нөгтәсиндә гијмәти $y_к$ әдәдинә бәрабәр олсун. Бу мәгсәдлә, (1) функсијасы үчүн алынан $(n+1)$ сајда

$$y_к = a_0 + a_1x_к + a_2x_к^2 + \ldots + a_nx_к^n$$

$$(к = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

бәрабәрликләрини мәчһул $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ әдәдләринә нәзәрән тәнликләр системи кими һәлл етмәк лазымдыр.

$n=1$ олдугда (1) чохһәдлиси хәтти функсијаја чеврилир. Хәтти функсија өјрәндијимиз функсијаларын ән садәсидир. Буна көрә дә бә'зән емпирик функсијаны башга шәкилдә (үстлү, гүввәт, логарифмик вә с. функсијалар вә јахуд онларын комбинасијасы шәклиндә) сечмәк лазым кәлдикдә, јени дәјишәнләр дахил етмәклә һәмин функсијаны јени дәјишәнә нәзәрән хәтти функсија шәклинә кәтирир, сонра исә онун мәчһул әмсалларыны тапырлар. Буна *бәрабәрләшдирмә үсулу* дејилир.

Емпирик $y = \varphi(x)$ функсијасынын сечилмә үсулларындан бири дә *орталар үсулудур*. Бу үсул чох садәдир, лакин һәмин үсулла тапылан $\varphi(x)$ функсијасы бә'зән чох дәгиг олмур.

Орталар үсулу беләдир: тутаг ки, ахтарылан $y = \varphi(x)$ емпирик функсијасыны јени X вә $У$ дәјишәнләринә нәзәрән хәтти

$$У = AX + B \tag{2}$$

функсијасы шәклинә салмышыг. Бурадан X_i вә $У_i$ чүтләринин сајы гәдәр

$$У_i = AX_i + B \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

кими шәрти тәнликләр аларыг. Бу шәрти тәнликләри ики група (тәхминән, бәрабәр сајда тәнликләрә) бөләрәк, һәр бир групун тәнликләрини тәрәф-тәрәфә топлајырлар. Алынан ики

$$\sum_{i=1}^{N} У_i = A\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) + B,$$

$$\sum_{i=N+1}^{m} У_i = A\left(\sum_{i=N+1}^{m} X_i\right) + B$$

тәнлијиндән A вә B әмсаллары тапылыр.

Шәрти тәнликләри мүхтәлиф шәкилләрдә груплашдырмаг олар. Һәр бир һалда да бир-бириндән аз фәргләнән әмсаллар алыныр. Нисбәтән дәгиг нәтичә исә шәрти тәнликләри бәрабәр груплара бөлдүкдә алыныр.

Орталар үсулуну бир мәсәләнин һәллинә тәтбиг едәк.

Тутаг ки, експеримент нәтичәсиндә ахтарылан функсионал асылылыг һаггында ашағыдакы әдәдләр алынмышдыр:

x	y	$\lg y$	y_e (тапылан дүстурдан һесабланыр)	δ_{y_e} (нисби хәта, фаизлә)
0,00	3615	3,5581	3724	3,0
0,61	3650	3,5623	3621	—0,8
1,04	3605	3,5569	3551	—1,5
1,68	3445	3,5372	3449	0,1
2,71	3320	3,5211	3292	—0,8
5,13	2890	3,4609	2948	2,0
7,86	2685	3,4289	2604	—3,0
21,50	1360	3,1335	1399	2,9
31,00	925	2,9661	908	—1,8

Емпирик дүстуру

$$y = 10^{ax+b} \tag{3}$$

шәклиндә сечәк. Бу мәгсәдлә (3) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфиндән логарифм алаг:

$$\lg y = ax + b. \tag{4}$$

Бу бәрабәрлик јени $У = \lg y$ вә $X = x$ дәјишәнләринә көрә хәтти функсијадыр. Чәдвәлдәки гијмәтләри (4) бәрабәрлијиндә јеринә јазараг, ашағыдакы кими шәрти тәнликләр аларыг:

$$3{,}5581 = 0{,}00a + b,$$
$$3{,}5623 = 0{,}61a + b,$$
$$3{,}5569 = 1{,}04a + b,$$
$$3{,}5372 = 1{,}68a + b,$$
$$3{,}5211 = 2{,}71a + b,$$

$$3{,}4609 = 5{,}13a + b,$$
$$3{,}4289 = 7{,}86a + b,$$
$$3{,}1335 = 21{,}50a + b,$$
$$2{,}9661 = 31{,}00a + b.$$

Шәрти тәнликләрин биринчи бешини ајрыча тәрәф-тәрәфә, јердә галан дөрдүнү исә ајрыча тәрәф-тәрәфә топласаг

$$17{,}7356 = 6{,}04a + 5b,$$

$$12{,}9894 = 65{,}49a + 4b$$

тәнликләрини аларыг. Бу ики тәнликдән a вә b әмсалларыны тапмаг олар:

$$a = -0{,}01977, \quad b = 3{,}5710.$$

Бу гијмәтләри јеринә јазсаг емпирик дүстуру

$$y = 10^{3{,}5710 - 0{,}01977\cdot x} = 3724 \cdot 10^{-0{,}01977x} \qquad (5)$$

шәклиндә аларыг. (5) дүстурундан x-ин верилмиш гијмәтләриндә y-ин ујғун гијмәтләрини (буну чәдвәлдә y_e илә ишарә етмишик) һесабласаг, верилән гијмәтләрлә дүстурдан алынан гијмәтләрин фәргини (хәтаны) көрмәк олар. Бу һалда алынан тәгриби әдәдләрин нисби хәталары да чәдвәлдә верилмишдир.

XII ФӘСИЛ

ФУНКСИЈАНЫН ЛИМИТИ

Функсијанын лимити ријази анализин әсас анлајышларындан бирндир. Ријазијјатын диференсиал, интеграл вә с. кими чох мүһүм анлајышлары лимит васитәсилә тә'јин олунур.

§ 1. АРДЫЧЫЛЛЫҒЫН ЛИМИТИ

Ардычыллыг, там гијмәтләр алан n аргументинин функсијасыдыр. Тутаг ки, n аргументи ардычыл олараг

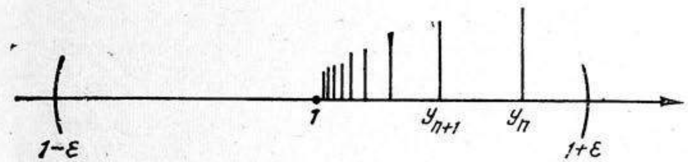
$$1, 2, 3, \ldots$$

гијмәтләрини алыр. Бу просеси заманла әлагәдар тәсәввүр етсәк (әлбәттә, n-нин дәјишмәсинин заманла һеч бир әлагәси јохдур), вахт кечдикчә n дәјишәни истәнилән бөјүк гијмәтләр алараг гејри-мәһдуд артмагда давам едәчәкдир. Габагчадан көтүрүлмүш истәнилән бөјүк һәр бир N әдәди үчүн елә бир ан кәләчәкдир ки, бу андан башлајараг n дәјишәнинин алдығы гијмәтләр N әдәдиндән бөјүк олачагдыр. n-нин белә сонсуз артмасыны гыса олараг «n сонсузлуға јахынлашыр» вә ја «$n \to \infty$» кими ифадә едирләр.

Бизим бурада мәгсәдимиз $y_n = f(n)$ функсијасынын $n \to \infty$-да дәјишмә характерини өјрәнмәкдир. Бу мәгсәдлә, $n \to \infty$-да $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ функсијасынын вә јахуд

$$1+1, \quad 1+\frac{1}{2}, \quad 1+\frac{1}{3}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}, \ldots \qquad (2)$$

ардычыллығынын дәјишмә характерини изләјәк. Бу ардычыллығын бүтүн һәдләри ваһиддән фәрглидир, лакин n дәјишәни (1) гијмәтләрини алараг артдыгда $y_n = 1 + \frac{1}{n}$ функсијасынын алдығы гијмәтләр ваһидә чох јахын олур. Бу јахынлығын характеристикасы һәндәси олараг беләдир:



Шәкил 126.

1-ин истәнилән ε-әтрафы үчүн елә $N = N(\varepsilon)$ әдәди (нөмрәси) вар ки, (2) ардычыллығынын, нөмрәси N-дән кичик олмајан бүтүн һәдләри 1-ин һәмин ε-әтрафында јерләшир (126-чы шәкил):

$$1-\varepsilon < y_n < 1+\varepsilon \quad (n \geqslant N). \qquad (3)$$

Мәсәлән, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ олдугда $N = 11$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ олдугда $N = 101$,

$\varepsilon = \frac{1}{1000}$ олдугда $N = 1001$ көтүрмәк олар.

(2) ардычыллығынын бу хассәсини белә ифадә едирләр: 1 әдәди n сонсузлуға јахынлашдыгда (2) ардычыллығынын лимитидир.

Тутаг ки, A әдәди вә $\{y_n\}$ ардычыллығы верилмишдир.

Т ә' р и ф. *Тутаг ки, истәнилән (кичик) мүсбәт ε әдәди верилдикдә елә мүсбәт N әдәди көстәрмәк олур ки, n-ин N-дән кичик олмајан бүтүн гијмәтләриндә*

$$|y_n - A| < \varepsilon \quad (n \geqslant N) \qquad (4)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда A әдәдинә $n \to \infty$-да $\{y_n\}$ ардычыллығынын лимити дејилир вә

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A \qquad (5)$$

вә ја

$$y_n \to A \quad (n\to\infty) \qquad (6)$$

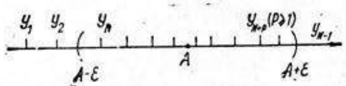
шәклиндә јазылыр. (Бурада lim ишарәси, мә'насы гајә (сәрһәд) олан латын сөзүндән көтүрүлмүшдүр.)

Гејд едәк ки, A әдәди вә $\{y_n\}$ ардычыллығы верилдикдә тә'рифдә көстәрилән N әдәдинин сечилмәси ε-дан асылыдыр: $N=N(\varepsilon)$. ε әдәди азалдыгча сечилән N әдәди, үмумијјәтлә, артыр. Ону да гејд етмәк лазымдыр ки, верилән ε-на гаршы сечилән $N(\varepsilon)$ әдәди јеканә дејил. Тә'рифдә $N(\varepsilon)$ әдәдинин анчаг варлығы тәләб олунур, јеканәлији исә тәләб олунмур.

(4) бәрабәрсизлији

$$-\varepsilon<y_n-A<\varepsilon \text{ вә ја } A-\varepsilon<y_n<A+\varepsilon \quad (n\geqslant N) \qquad (7)$$

бәрабәрсизликләри илә ејникүчлүдүр. Бурадан ајдындыр ки, A әдәди $n\to\infty$-да $\{y_n\}$ ардычыллығынын лимитидирсә, онда һәмин ардычыллығын y_N-дән сонра кәлән бүтүн һәдләри A әдәдинин ε-әтрафында јерләшир. Бу һалда $\{y_n\}$ ардычыллығынын анчаг сонлу сајда һәдди $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ интервалында јерләшмәјә биләр (127-чи шәкил).



Шәкил 127.

$f(n)$ функсијасы һәр һансы Q хассәсини n-нин мүәјјән N-дән кичик олмајан бүтүн гијмәтләриндә ($n\geqslant N$) өдәдикдә, дејирләр ки, *$f(n)$ функсијасы Q хассәсини n-нин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә өдәјир.*

Демәли, A әдәди $y_n=f(n)$ ардычыллығынын $n\to\infty$-да лимитидирсә, онда n-нин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә (4) бәрабәрсизлији өдәниләр.

Ардычыллығын өз лимитинә јахынлашма характери мүхтәлиф ола биләр: ардычыллыг артараг, азалараг вә ја лимит әтрафында рәгс едәрәк она (өз лимитинә) јахынлаша биләр.

Мисал 1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ардычыллығынын лимити сыфра бәрабәрдир. Доғрудан да, истәнилән кичик ε әдәди верилдикдә

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

олмасы үчүн $n>\frac{1}{\varepsilon}$ олмасы вә буна көрә дә $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ көтүрмәк кифајәтдир.

Бу ардычыллыг азалараг лимитә јахынлашыр.

Мисал 2. $\left\{2-\frac{1}{n^2}\right\}$ ардычыллығынын лимити 2 әдәдидир:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2.$$

Ардычыллыг артараг лимитә јахынлашыр.

Мисал 3. $\left\{(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right\}$ ардычыллығы сыфыр әтрафында рәгс едәрәк она јахынлашыр:

$$\lim_{n\to\infty}\left[(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right]=0.$$

Белә бир суал гаршыја чыхыр: бир ардычыллығын нечә лимити ола биләр?

Теорем 1. ***Ардычыллығын анчаг бир лимити ола биләр.***

Исбаты. Әксинә фәрз едәк ки, $\{y_n\}$ ардычыллығынын мүхтәлиф ики A_1 вә A_2 ($A_1\neq A_2$) лимити вар. Онда лимитин тә'рифинә көрә, верилмиш ихтијари $\varepsilon=\frac{|A_1-A_2|}{2}$ әдәди үчүн

$$|y_n-A_1|<\varepsilon \quad (n\geqslant N_1) \qquad (8)$$

вә

$$|y_n-A_2|<\varepsilon \quad (n\geqslant N_2) \qquad (9)$$

бәрабәрсизликләри өдәнилмәлидир. N_1 вә N_2 әдәдләринин ән бөјүјүнү N илә ишарә етсәк, $n\geqslant N$ олдугда (8) вә (9) бәрабәрсизликләринин икиси дә ејни заманда өдәниләр. Бурадан $n\geqslant N$ олдугда

$$|A_1-A_2|=|(A_1-y_n)+(y_n-A_2)|\leqslant|A_1-y_n|+|y_n-A_2|< \\ <2\varepsilon=|A_1-A_2|$$

вә ја

$$|A_1-A_2|<|A_1-A_2|$$

алыныр. Бу зиддијјәт теоремин доғрулуғуну көстәрир.

Тә'риф. *Лимити олан ардычыллыға јығылан ардычыллыг, лимити олмајан ардычыллыға исә дағылан ардычыллыг дејилир.*

Мисал 4.

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots,\ (-1)^{n-1},\ \ldots,$$

$$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{1+(-1)^n}{2},\ \ldots,$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots$$

ардычыллыглары дағыландыр.

Гејд едәк ки, верилмиш јығылан ардычыллығын сонлу сајда һәддини атмаг вә ја дәјишмәк олар, бу онун јығылмасына вә лимитинин гијмәтинә тә'сир етмир.

Ардычыллығын бүтүн һәдләри мүхтәлиф олмаја да биләр. Бүтүн һәдләри бир-биринә бәрабәр олан

$$A, A, A, \ldots, A, \ldots \quad (10)$$

ардычыллығына *стасионар ардычыллыг* дејилир.

Мисал 5. Стасионар $y_n = A$ $(n=1, 2, \ldots)$ вә ја (10) ардычыллығы јығыландыр вә онун лимити A-ја бәрабәрдир:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

Доғрудан да, истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн

$$|y_n - A| = 0 < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији n-ин бүтүн гијмәтләриндә өдәнилир.

Теорем 2. ***x_0 нөгтәси $X = \{x\}$ әдәди чохлуғунун лимит нөгтәси олдугда, һәмин чохлуғун елементләриндән x_0 әдәдинә јығылан $\{x_n\}$ ардычыллығыны ајырмаг олар.***

Исбаты. x_0 нөгтәси X чохлуғунун лимит нөгтәси олдуғундан онун истәнилән ε әтрафында һәмин чохлуғун сонсуз сајда елементи јерләшир. Онда $(x_0 - 1, x_0+1)$ интервалында да X чохлуғунун сонсуз сајда елементи јерләшәр. Бу елементләрин бирини x_1 илә ишарә едәк. Сонра X чохлуғунун $\left(x_0 - \frac{1}{2},\ x_0 + \frac{1}{2}\right)$ интервалында јерләшән вә x_1-дән фәргли олан һәдләринин бирини көтүрүб x_2 илә ишарә едәк. Бу просеси давам етдирдикдә n-чи дәфә X чохлуғунун $\left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right)$ интервалында јерләшән x_n елементи $(x_n \neq x_k,\ k=\overline{1, n-1})$ көтүрүлүр. Беләликлә, ајрылмыш

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

ардычыллығы үчүн

$$|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$$

мүнасибәти өдәнилир. Бурадан:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Исбат етдијимиз теоремин мүәјјән мә'нада тәрси дә доғрудур: X чохлуғундан x_0 нөгтәсинә јығылан $\{x_n\}$ ардычыллығы ајырмаг мүмкүндүрсә, онда x_0 нөгтәси X чохлуғунун лимит нөгтәсидир.

Доғрудан да, $x_n \to x_0$ $(n\to\infty)$ олмасы о демәкдир ки, ихтијари $\varepsilon>0$ әдәдинә гаршы елә $N=N(\varepsilon)$ вар ки, n-ин $n\geqslant N$ гијмәтләриндә

$$|x_n - x_0| < \varepsilon \text{ вә јахуд } x_0-\varepsilon < x_n < x_0+\varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Демәли, x_0-ын ε-әтрафында ардычыллығын (буна көрә дә X чохлуғунун) сонсуз сајда һәдди јерләшир. Бу исә x_0 нөгтәсинин X чохлуғунун лимит нөгтәси олдуғуну көстәрир.

§ 2. ЈЫҒЫЛАН АРДЫЧЫЛЛЫҒЫН САДӘ ХАССӘЛӘРИ

Теорем 1. ***Јығылан ардычыллыг мәһдуддур.***

Исбаты. Фәрз едәк ки, $\{y_n\}$ ардычыллығы јығыландыр вә онун лимити A-ја бәрабәрдир. Онда $1 = \varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә N вар ки, $n\geqslant N$ олдугда

$$|y_n - A| < 1 \quad (n\geqslant N)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан:

$$|y_n| = |(y_n - A) + A| \leqslant |y_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

вә ја

$$|y_n| < 1 + |A| \quad (n\geqslant N).$$

Онда M илә

$$|y_1|,\ |y_2|,\ \ldots,\ |y_{N-1}|,\ 1+|A|$$

әдәдләринин ән бөјүјүнү ишарә етсәк, n-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$|y_n| \leqslant M$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу исә $\{y_n\}$ ардычыллығынын мәһдуд олмасы демәкдир.

Бу теоремин тәрси доғру дејилдир. Мәһдуд ардычыллыг јығылан олмаја да биләр.

Мисал 1. Мәһдуд $\{(-1)^{n-1}\}$ ардычыллығы јығылан дејилдир. Доғрудан да,

$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1}, \ldots$$

ардычыллығынын лимити јохдур (4-чү мисал), лакин онун бүтүн һәдләри мүтләг гијмәтчә ваһиди ашмыр. Демәли, ардычыллығын мәһдуд олмасы онун јығылан олмасы үчүн зәрури шәртдир, лакин кафи дејилдир.

Теорем 2. *$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ оларса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = |A|$.*

Исбаты. Тә'рифә көрә истәнилән ε әдәди үчүн елә N вар ки, $n \geqslant N$ олдугда

$$|y_n - A| < \varepsilon \quad (n \geqslant N)$$

олур. Онда

$$||y_n| - |A|| \leqslant |y_n - A| < \varepsilon \quad (n \geqslant N),$$

јә'ни

$$|y_n| \to |A| \quad (n \to \infty).$$

Һәр бир ардычыллығын алтардычыллығындан данышмаг олар. Верилмиш

$$y_1, y_2, ..., y_n, ... \tag{1}$$

ардычыллығынын

$$n_1 < n_2 < ... < n_к < ...$$

индексли сонсуз сајда һәдләрини ајырараг

$$y_{n_1}, \; y_{n_2}, \; ..., \; y_{n_к}, \; ... \tag{2}$$

ардычыллығыны дүзәлдәк; бурада $к$ индекси сонсузлуға јахынлашанда $n_к$ да сонсузлуға јахынлашыр. (2) ардычыллығына (1) ардычыллығынын *алтардычыллығы* дејилир. Бурадан ајдындыр ки, верилмиш (1) ардычылллығынын сонсуз сајда алтардычыллығы вардыр.

Теорем 3. ***Верилмиш ардычыллығын A әдәдинә јығылан олмасы үчүн онун истәнилән алтардычыллығынын һәмин A әдәдинә јығылан олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Шәртин зәрури олдуғуну исбат етмәк үчүн ардычыллығын лимитинин тә'рифиндән истифадә едәк: истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн елә $N(\varepsilon)$ вар ки, $n \geqslant N$ олдугда

$$|y_n - A| < \varepsilon \quad (n \geqslant N)$$

олур. Бурадан ајдындыр ки, $n_к \geqslant N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн $n_к$ әдәдләри үчүн дә

$$|y_{n_к} - A| < \varepsilon \quad (n_к \geqslant N)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан:

$$y_{n_к} \to A \quad (к \to \infty).$$

Шәртин кафилији дә ејни гајда илә исбат олунур.

Гејд. ***Һәр бир јығылан ардычыллығдан һәмишә јығылан монотон алтардычыллығы ајырмаг олар.***

Мисал 2. $\{y_n\} = \left\{\sin n \frac{\pi}{2}\right\}$ вә ја

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, ... \tag{3}$$

ардычыллығынын лимити јохдур (дағыландыр), лакин (3) ардычыллығынын

$$1, 1, 1, ...,$$
$$0, 0, 0, ...,$$
$$-1, -1, -1, ... \tag{4}$$

кими үч алтардычыллығындан һәр биринин ајрылыгда лимити (әлбәттә, мүхтәлиф) вар: 1; 0 вә -1. Алтардычыллыгларынын һамысы ејни лимитә јығылмадығындан 3-чү теоремә көрә (3) ардычыллығынын лимити јохдур.

Теорем 4. ***$\{y_n\}$ ардычыллығы A әдәдинә јығылырса вә $A < p$ ($A > q$) оларса, онда елә N вар ки, n-нин N-дән кичик олмајан бүтүн гијмәтләриндә $y_n < p$ ($y_n > q$) бәрабәрсизлији өдәнилир.***

Исбаты. Лимитин тә'рифинә көрә $\varepsilon = p - A > 0$ әдәди үчүн елә $N(\varepsilon)$ вар ки, n-нин N-дән кичик олмајан бүтүн гијмәтләриндә

$$|y_n - A| < \varepsilon$$

вә ја

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon = p \quad (n \geqslant N)$$

бәрабәрсизликләри өдәнилир. Ахырынчы мүнасибәтдән теоремин доғрулуғу ајдындыр. Бу теоремдән бир сыра марагли нәтичәләр чыхармаг олар.

Нәтичә 1. $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = A$ *вә n-нин бүтүн гијмәтләриндә*

$$y_n \leqslant p \quad (y_n \geqslant q)$$

олдугда

$$A \leqslant p \quad (A \geqslant q).$$

Доғрудан да, $A > p$ оларса, онда исбат етдијимиз теоремә көрә елә N әдәди тапмаг олар ки,

$$y_n > p \quad (n \geqslant N)$$

олур. Алынан мүнасибәт шәртә зиддир, демәли, $A \leqslant p$.

Нәтичә 2. $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = A < 0$ (> 0) *олдугда елә* $N > 0$ *әдәди вар ки, n-нин* $n \geqslant N$ *гијмәтләри үчүн*

$$y_n < 0 \quad (y_n > 0) \quad (n \geqslant N).$$

Теорем 5. *$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} u_n = A$ вә n-нин бүтүн гијмәтләриндә*

$$y_n \leqslant v_n \leqslant u_n \tag{5}$$

мүнасибәти өдәниләрсә, онда $\{v_n\}$ ардычыллығы јығыландыр вә $\lim_{n\to\infty} v_n = A$.

Исбаты. Ардычыллығын лимитинин тә'рифинә көрә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди верилдикдә елә N_1 вә N_2 әдәдләри тапмаг олур ки,

$$A-\varepsilon<y_n<A+\varepsilon \quad (n\geqslant N_1) \tag{6}$$

вә

$$A-\varepsilon<u_n<A+\varepsilon \quad (n\geqslant N_2) \tag{7}$$

бәрабәрсизликләри өдәнилир. N илә N_1 вә N_2 әдәдләринин ән бөјүјүнү ишарә етсәк, онда (5), (6) вә (7) бәрабәрсизликләринә көрә n-нин $n\geqslant N$ гијмәтләриндә

$$A-\varepsilon < v_n < A+\varepsilon$$

бәрабәрсизликләри вә ја

$$|v_n - A| < \varepsilon$$

мүнасибәти өдәниләр. Бурадан

$$\lim_{n\to\infty} v_n = A$$

олмасы ајдындыр.

Нәтичә. $\lim_{n\to\infty} y_n = A$ вә n-нин бүтүн гијмәтләриндә

$$y_n \leqslant v_n \leqslant A$$

мүнасибәти өдәнилирсә, онда $\{v_n\}$ ардычыллығы A әдәдинә јығылар:

$$\lim_{n\to\infty} v_n = A.$$

§ 3. МОНОТОН АРДЫЧЫЛЛЫҒЫН ЛИМИТИ

Монотон ардычыллыгларын лимитинин варлығы һаггында ашағыдакы теореми исбат етмәк олар.

Теорем 1. ***Артан (азалан) вә јухарыдан (ашағыдан) мәһдуд $\{y_n\}$ ардычыллығынын лимити вар:***

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \sup\{y_n\} \tag{1}$$

(ујғун олараг $\lim_{n\to\infty} y_n = \inf\{y_n\}$).

Исбаты. Фәрз едәк ки, $\{y_n\}$ ардычыллығы артандыр:

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant y_{n+1} \leqslant \ldots$$

вә јухарыдан мәһдуддур: $y_n \leqslant M$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Онда $X=\{y_n\}$ әдәди чохлуғу јухарыдан мәһдуд чохлуг олар. Белә чохлугларын исә сонлу дәгиг јухары сәрһәди (IX, § 9) вар. Бу сәрһәди

$$A = \sup\{y_n\}$$

илә ишарә едәк. Дәгиг јухары сәрһәдин тә'рифинә көрә:

1) n-нин бүтүн гијмәтләриндә

$$y_n \leqslant A \tag{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир;

2) истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $y_N \in \{y_n\}$ вар ки,

$$A - \varepsilon < y_N. \tag{3}$$

(2), (3) мүнасибәтләриндән вә $\{y_n\}$ ардычыллығынын артан олмасындан алыныр ки, n-нин N-дән кичик олмајан бүтүн гијмәтләриндә

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon \tag{4}$$

мүнасибәти өдәнилир. Бурадан

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A = \sup\{y_n\}.$$

Азалан вә ашағыдан мәһдуд ардычыллыг үчүн теорем ејни гајда илә исбат олунур.

Нәтичә 1. Артан вә A әдәдинә јығылан $\{y_n\}$ ардычыллығынын һәдләри һәмин әдәддән бөјүк ола билмәз:

$$y_n \leqslant A \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Доғрудан да, (1) бәрабәрлијинә көрә

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A = \sup\{y_n\}$$

олдуғундан (5) мүнасибәти ајдындыр.

Нәтичә 2. Азалан вә A әдәдинә јығылан $\{y_n\}$ ардычыллығынын һәдләри һәмин әдәддән кичик ола билмәз:

$$y_n \geqslant A. \tag{6}$$

Биз јухарыда исбат етмишдик ки, јығылан ардычыллыг мәһдуддур (§ 2). Бурадан ајдындыр ки, јығылан вә монотон артан ардычыллыг јухарыдан мәһдуд олар. Ејни заманда, инди исбат етдијимиз теоремә көрә дә артан вә јухарыдан мәһдуд олан ардычыллыг јығыландыр. Бурадан ашағыдакы тәклифи алырыг:

Теорем 2. ***Монотон артан (азалан) ардычыллығын јығылан олмасы үчүн онун јухарыдан (ашағыдан) мәһдуд олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Мисал 1. $0<|a|<1$ олдугда $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ олмасыны исбат етмәли.

$0<a<1$ олдугда

$$a, a^2, \ldots, a^n, \ldots \tag{7}$$

ардычыллығы монотон азалан вә ашағыдан сыфыр илә мәһдуд олар:

$$a^n > a^{n+1},\ a^n > 0 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Онда 1-чи теоремә көрә (7) ардычыллығынын сонлу лимити вар:

$$\lim_{n\to\infty} a^n = q. \tag{8}$$

Буну нәзәрә алараг $a^{n+1} = a^n \cdot a$ бәрабәрсизлијиндә $n\to\infty$-да лимитә кечсәк $q=q\cdot a$ вә ја $q(1-a)=0$ аларыг. Бурадан $1-a\neq 0$ олдуғундан $q=0$ вә ја $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

Бу нәтичәдән тәләб олунан бәрабәрлик асанлыгла алыныр.

Мисал 2. $y_1 = \sqrt{3}$ вә сонракы һәдләри

$$y_{n+1} = \sqrt{3+y_n} \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{9}$$

рекуррент дүстуру илә верилән $\{y_n\}$ ардычыллығынын лимитини һесабламалы.

(9) ардычыллығы монотон артан вә јухарыдан мәһдуд олдуғундан $y_1<y_2<\ldots<y_n<y_{n+1}<\ldots,\ 0<y_n<3\ (n=1, 2, \ldots)$, һәмин ардычыллығын сонлу лимити вар: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

$$y^2_{n+1} = 3 + y_n$$

бәрабәрлијиндә лимитә кечсәк

$$y^2 = 3 + y,$$

бурадан

$$y = \frac{1+\sqrt{13}}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Тутаг ки, һәр бири өзүндән әввәлкинин дахилиндә јерләшән, јә'ни n-ин бүтүн гијмәтләриндә

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{10}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots \tag{11}$$

парчалары ардычыллығы верилмишдир. Бу парчаларын узунлуглары ардычыллығы сыфра јығылан, јә'ни

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0 \tag{12}$$

олдугда, һәмин ардычыллыға *јығылан парчалар ардычыллығы* дејилир.

Теорем (јығылан парчалар принсипи) 3. ***Јығылан парчалар ардычыллығынын бүтүн парчалары үчүн ортаг олан (јә'ни, һамысына дахил олан) јеканә бир С нөгтәси вардыр.***

Исбаты. (10) мүнасибәтиндән ајдындыр ки, парчаларын сол учлары ардычыллығы $\{a_n\}$ азалмајан, сағ учлары ардычыллығы $\{b_n\}$ исә артмајандыр. Бундан башга, $\{a_n\}$ ардычыллығы јухарыдан вә $\{b_n\}$ ардычыллығы исә ашағыдан мәһдуддур:

$$a_n \leqslant b_1,\ b_n \geqslant a_1\ (n=1, 2, \ldots).$$

Онда 1-чи теоремә көрә һәмин ардычыллыгларын сонлу лимитләри вар:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b_0$$

вә $a_n \leqslant a_0,\ b_n \geqslant b_0$ мүнасибәтләри өдәнилир.

(12) мүнасибәтинә көрә һәмин лимитләр бәрабәрдир:

$$a_0 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b_0 = C.$$

Бундан башга, $a_n \leqslant C \leqslant b_n\ (n=1, 2, \ldots)$ олдуғундан C нөгтәси бүтүн $[a_n, b_n]\ (n=1, 2, \ldots)$ парчаларына дахилдир. Бу C нөгтәси һәмин парчаларын һамысына дахил олан јеканә нөгтәдир. Доғрудан да, бүтүн парчалара дахил олан башга $d\ (d>C)$ нөгтәси дә олса, онда $[C, d]$ парчасы бүтүн $[a_n, b_n]$ парчаларына дахил олар. Бурадан исә $b_n - a_n \geqslant d - C > 0$ вә $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) \geqslant d - C > 0$ мүнасибәти алыныр ки, бу да (12) шәртинә зиддир. Демәли, бүтүн (11) парчалары үчүн ортаг олан C нөгтәси јеканәдир.

Теоремдә $[a_n, b_n]$ парчалары әвәзинә (a_n, b_n) интерваллары көтүрсәк, о доғру олмаз. Доғрудан да, $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ интервалларынын һәр бири өзүндән әввәлкинә дахилдир вә узунлуглары сыфра јахынлашыр. Лакин һәмин интервалларын һамысы үчүн ортаг олан нөгтә јохдур.

Jығылан парчалар принсипи расионал вә иррасионал әдәдләр чохлуғунун һәр бириси үчүн ајрылыгда доғру дејилдир. Бу принсип бүтүн һәгиги әдәдләр чохлуғунун характеристик хассәсини, онун кәсилмәзлијини вә јахуд бүтөвлүјүнү (тамлығыны) ифадә едир.

Jығылан парчалар принсипинә бә'зән *Кантор аксиому да* дејилир.

§ 4. ЛИМИТ НӨГТӘСИНИН ВАРЛЫҒЫ

Тутаг ки, $X = \{x\}$ һәр һансы әдәди чохлугдур. Лимит нөгтәсинин тә'рифиндән (IX, § 8) ајдындыр ки, сонлу X чохлуғунун лимит нөгтәси ола билмәз. Сонсуз чохлуғун исә лимит нөгтәси ола да биләр, олмаја да биләр. Мәсәлән, сонсуз

$$N = \{1, 2, ..., n, ...\}$$

чохлуғунун һеч бир лимит нөгтәси јохдур, сонсуз

$$X_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$$

чохлуғунун исә лимит нөгтәси ($x=0$) вар.

Сонсуз чохлугларын лимит нөгтәсинин варлығы һаггында кафи шәрти ашағыдакы теорем шәклиндә сөјләмәк олар.

Теорем (Болсан[1] — Вејерштрасс) 1. ***Мәһдуд сонсуз X чохлуғунун һеч олмаса бир лимит нөгтәси вар.***

Исбаты. X чохлуғу мәһдуд олдуғундан онун бүтүн нөгтәләри бир сонлу $[a, b]$ парчасында јерләшәр. $[a, b]$ парчасыны ики бәрабәр $[a, a']$ вә $[a', b]$ $(a<a'<b)$ һиссәјә бөләк. Бу һиссәләрин һеч олмаса биринин дахилиндә X чохлуғундан сонсуз сајда нөгтә јерләшәр. (Әкс һалда, $[a, b]$ парчасында X чохлуғунун сонлу сај јерләшәр ки, бу да X-ин тамамилә һәмин парчада да нөгтәси јерләшәр ки, бу да X-ин тамамилә һәмин парчада јерләшмәсинә зиддир.) Һәмин һиссәни $[a_1, b_1]$ илә ишарә едәк. Бу парчаны да јарыја бөләрәк, дахилиндә X чохлуғундан сонсуз сајда нөгтә јерләшән һиссәни $[a_2, b_2]$ илә ишарә едәк. Просеси давам етдирсәк, һәр биринин дахилиндә X чохлуғундан сонсуз сајда нөгтә јерләшән, узунлуглары сыфра јығылан вә һәр бири өзүндән әввәлкинин дахилиндә јерләшән $[a_n, b_n]$ парчалары ардычыллығыны аларыг:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ..., \qquad (1)$$

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \quad \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

[1] Бернград Болсан (1781—1848) чех философу вә ријазијјатчысыдыр.

Jығылан парчалар принсипинә (§ 3) көрә (1) парчаларынын һамысы үчүн ортаг олан јеканә бир C нөгтәси вар. Бу нөгтә X чохлуғунун лимит нөгтәсидир. Доғрудан да, C нөгтәсинин истәнилән $(C-\varepsilon, C+\varepsilon)$ әтрафыны көтүрсәк, n-ин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә $[a_n, b_n]$ парчасы һәмин әтрафда јерләшәр. Бу парчаларын һәр биринин дахилиндә X чохлуғундан сонсуз сајда нөгтә јерләшдијиндән, һәмин әтрафда да X чохлуғунун сонсуз сајда нөгтәси јерләшәр. Демәли, C нөгтәси X чохлуғунун лимит нөгтәсидир.

Гејд едәк ки, теоремин доғрулуғу үчүн чохлуғун мәһдуд олмасы вачиб шәртдир. Лакин сонсуз чохлуғун мәһдудлуғу лимит нөгтәсинин варлығы үчүн кафи шәрт олуб, зәрури дејилдир.

Нәтичә 1. Мәһдуд сонсуз чохлугдан јығылан ардычыллыг ајырмаг олар.

Доғрудан да, белә чохлуғун һеч олмаса бир лимит нөгтәси вар. X чохлуғундан һәмин нөгтәјә јығылан ардычыллыг ајырмаг исә һәмишә мүмкүндүр (§ 1).

Теорем (Болсан—Вејерштрасс) 2. ***Һәр бир мәһдуд сонсуз $\{x_n\}$ ардычыллығындан јығылан алтардычыллыг ајырмаг олар.***

Исбаты. Верилмиш $\{x_n\}$ ардычыллығы сонлу сајда мүхтәлиф нөгтәләрдән тәшкил олунарса, онун һәр һансы x_{n_0} һәдди сонсуз сајда тәкрар олунмалыдыр. Бу һалда һәмин һәдләрдән дүзәлмиш

$$x_{n_0}, \quad x_{n_0}, \quad ..., \quad x_{n_0}, \quad ...$$

алтардычыллығы тәләб едилән алтардычыллыг олачагдыр.

$\{x_n\}$ ардычыллығы сонсуз сајда мүхтәлиф әдәдләрдән тәшкил олунарса, $X = \{x_n\}$ чохлуғуна нәтичәни тәтбиг етмәклә бу һалда да теоремин доғрулуғуна инанмаг олар.

Гејд. ***Һәр бир мәһдуд сонсуз ардычыллыгдан јығылан монотон ардычыллыг ајырмаг олар.***

Тутаг ки, $\{x_n\}$ мәһдуд ардычыллыг вә a һәр һансы (сонлу) әдәддир. Әкәр истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн

$$a - \varepsilon < x_n \quad (x_n < a + \varepsilon)$$

бәрабәрсизлији n-ин сонсуз сајда гијмәтләриндә,

$$a + \varepsilon < x_n \quad (x_n < a - \varepsilon)$$

бәрабәрсизлији исә n-ин анчаг сонлу сајда гијмәтләриндә өдәнилирсә, онда a әдәдинә $\{x_n\}$ ардычыллығынын *јухары (ашағы)* ***лимити*** дејилир вә

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a \qquad (\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a)$$

вә ја

$$\lim\sup x_n \qquad (\lim\inf x_n)$$

шәклиндә јазылыр.

Ардычыллығын анчаг бир јухары (ашағы) лимити ола биләр. Мәһдуд $\{x_n\}$ ардычыллығынын һәм сонлу јухары вә һәм дә сонлу ашағы лимити вар вә онлар арасында

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

мүнасибәти доғрудур. Бу мүнасибәтдә бәрабәрлик ишарәси јалныз вә јалныз о заман олар ки, $\{x_n\}$ ардычыллығынын лимити олсун. Бу һалда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n.$$

Мәһдуд $\{x_n\}$ вә $\{y_n\}$ ардычыллыгларынын јухары вә ашағы лимитләри үчүн

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n,$$

мүнасибәтләри доғрудур.

Нәһајәт, гејд едәк ки, мәһдуд сонсуз ардычыллыгдан јухары (ашағы) лимитинә јығылан алтардычыллыг ајырмаг олар.

§ 5. e ӘДӘДИ ВӘ НАТУРАЛ ЛОГАРИФМ

Әввәлчә

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots) \tag{1}$$

ардычыллығынын лимитини тәдгиг едәк.

Нјутон биному дүстуруна әсасән:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + $$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Бу бәрабәрлији

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \tag{2}$$

шәклиндә дә јазмаг олар. (2) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндә $(n+1)$ сајда һәдд вардыр. Бу бәрабәрлији y_{n+1} үчүн јазаг:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \tag{3}$$

(3) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки һәдләрин сајы $(n+2)$ олур. Бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндәки һәдләр (2) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки ујғун һәдләрдән кичик олмадығындан, јә'ни

$$\frac{1}{\kappa!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa-1}{n}\right)<$$

$$<\frac{1}{\kappa!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa-1}{n+1}\right)$$

олдуғундан

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

вә ја

$$y_n < y_{n+1}. \tag{4}$$

Бундан башга, (2) бәрабәрлијинә әсасән

$$y_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+$$

$$+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<3. \tag{5}$$

(4) вә (5) мүнасибәтләриндән ајдындыр ки, (1) ардычыллығы монотон артан вә јухарыдан мәһдуддур. Белә ардычыллығын исә 1-чи теоремә (§ 3) көрә сонлу лимити вар. Һәмин лимит e илә ишарә олунур:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \qquad (6)$$

e, иррасионал әдәддир. Онун гијмәтини тәгриби һесабламаг олар:

$$e = 2{,}718281828459045\ldots .$$

e әдәдинин ријази анализдә бөјүк әһәмијјәти вардыр (буну кәләчәкдә көрәчәјик). e әдәдини чох заман логарифмин әсасы һесаб едирләр. e әсасына көрә әдәдләрин логарифминә натурал логарифм дејилир вә «ln» илә ишарә олунур. N әдәдинин натурал логарифми «$\ln N$» шәклиндә јазылыр. Натурал логарифмдән истифадә етдикдә ријази анализин бир сыра дүстурлары чох садә шәкилдә алыныр. Буна көрә дә ријазијјатда натурал логарифмдән чох кениш истифадә олунур.

Һәр бир N әдәдинин онлуг вә натурал логарифмләри арасында мүәјјән әлагә јаратмаг олар. Бу мәгсәдлә $\ln N = a$ гәбул едәк. Онда $N = e^a$. Бу бәрабәрлијин һәр ики тәрәфиндән 10 әсасына көрә логарифм алсаг:

$$\lg N = a \lg e$$

вә $a = \ln N$ олдуғуна көрә:

$$\lg N = \ln N \cdot \lg e.$$

Бурадан

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e}.$$

Бу бәрабәрликдән истифадә едәрәк, N әдәдинин онлуг логарифми мә'лум олдугда онун натурал логарифмини вә тәрсинә, N әдәдинин натурал логарифми мә'лум олдугда онун онлуг логарифмини тапмаг олар.

$$\lg e = \lg 2{,}718281\ldots = 0{,}43429\ldots$$

әдәдинә *кечмә модулу* дејилир вә M илә ишарә олунур:

$$M = \lg e = 0{,}43429\ldots .$$

Ајдындыр ки,

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{\lg e} = 2{,}30258\ldots$$

Мисал 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3}$ лимитини һесабламалы. e әдәдинин тә'рифинә әсасән:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = e.$$

§ 6. ФУНКСИЈАНЫН ЛИМИТИ

Тутаг ки, $y = f(x)$ функсијасы $X = \{x\}$ чохлуғунда тә'јин олунмушдур вә a нөгтәси бу чохлуғун лимит нөгтәсидир (a нөгтәси X чохлуғуна дахил ола да биләр, олмаја да биләр, IX, § 8). Онда X чохлуғундан a-ја јығылан

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \qquad (1)$$

($x_к \neq a$, $к = 1, 2, \ldots$) ардычыллығыны ајырмаг олар (§ 1). Ајдындыр ки, X чохлуғу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ вә $(a, a+\varepsilon)$ интерваллары, $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $[a-\varepsilon, a]$ вә $[a, a+\varepsilon]$ парчалары, $[a-\varepsilon, a)$ јарыминтервалы вә с. ола биләр. $y = f(x)$ функсијасынын (1) нөгтәләриндә алдығы гијмәтләр

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots \qquad (2)$$

ардычыллығыны әмәлә кәтирир. Ајдындыр ки, X чохлуғундан a-ја јығылан чох ардычыллыг ајырмаг олар.

a-ја јығылан (1) ардычыллыгларына ујғун олан (2) ардычыллыгларынын јығылмасы һаггында нә демәк олар?

Бурада ики һал ола биләр: ола биләр ки, a-ја јығылан (1) ардычыллыгларына ујғун олан (2) ардычыллыгларынын һамысы ејни бир A әдәдинә јығылыр, ола да биләр ки, ејни бир A әдәдинә јығылмыр.

Биринчи һалда дејирләр ки, x аргументи a-ја јахынлашдыгда ($x \to a$) вә ја $x = a$ нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын лимити вар вә A әдәди онун лимитидир. Буну

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \qquad (3)$$

вә ја

$$f(x) \to A \quad (x \to a) \qquad (4)$$

шәклиндә јазырлар.

Икинчи һалда дејирләр ки, $f(x)$ функсијасынын $x = a$ нөгтәсиндә лимити јохдур.

Инди функсија лимитинин дәгиг тә'рифини верәк.

Тә'риф 1. *X чохлуғунун a-ја јығылан истәнилән $\{x_n\}$ ($x_n \neq a$, $n = 1, 2, \ldots$) нөгтәләри ардычыллығына $f(x)$ функсијасынын ујғун олан $\{f(x_n)\}$ гијмәтләри ардычыллығынын һамысы ејни бир A әдәдинә јығылдыгда, һәмин A әдәдинә $x \to a$ шәртиндә $f(x)$ функсијасынын лимити дејилир.*

Бурадан ајдындыр ки, a-ја јығылан һеч олмазса ики $\{x'_n\}$ вә $\{x''_n\}$ ардычыллығына $f(x)$ функсијасынын $\{f(x'_n)\}$ вә $\{f(x''_n)\}$ ујғун гијмәтләри ардычыллыглары мүхтәлиф лимитләрә јығыларса, онда $f(x)$ функсијасынын $x = a$ нөгтәсиндә лимити јохдур.

Функсијанын нөгтәдә лимитинин башга тә'рифи дә вардыр.

Тә'риф 2. *Тутаг ки, сонлу а вә А әдәдләри вә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $\delta>0$ әдәди вар ки, х-ин Х чохлуғундан көтүрүлмүш вә*

$$0<|x-a|<\delta \tag{5}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{6}$$

мүнасибәти өдәнилир. Онда А әдәдинә $x\to a$ шәртиндә $f(x)$ функсијасынын лимити дејилир.

Гејд едәк ки, A әдәди $x\to a$ шәртиндә $f(x)$ функсијасынын лимити олдугда (6) бәрабәрсизлијинин $x=a$ гијмәтиндә өдәнилиб өдәнилмәмәсинин һеч бир әһәмијјәти јохдур. $f(x)$ функсијасы $x=a$ нөгтәсиндә тә'јин олундугда исә онун һәмин нөгтәдә лимити хүсуси $f(a)$ гијмәтинә бәрабәр ола да биләр, олмаја да биләр.

Функсија лимитинин *1-чи тә'рифинә «лимитин ардычыллыг дилиндә тә'рифи» (вә ја Һејне мә'нада тә'рифи), 2-чи тә'рифинә исә «лимитин ε, δ дилиндә тә'рифи» (вә ја Коши мә'нада тә'рифи) дејилир.*

Теорем 1. ***Функсијанын нөгтәдә лимитинин 1 вә 2-чи тә'рифләри еквивалентдир (ејникүчлүдүр).*** Бу о демәкдир ки, A әдәди тә'рифләрин биринә көрә $f(x)$ функсијасынын $x=a$ нөгтәсиндә лимитидирсә, тә'рифләрин дикәринә көрә дә һәмин нөгтәдә $f(x)$-ин лимитидир.

Исбаты. Фәрз едәк ки, A әдәди 1-чи тә'рифә көрә $f(x)$ функсијасынын $x=a$ нөгтәсиндә лимитидир, лакин 2-чи тә'рифә көрә $x=a$ нөгтәсиндә лимити дејил. Бу о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon>0$ әдәдинә гаршы 2-чи тә'рифин тәләбләрини өдәјән $\delta>0$ әдәди тапмаг мүмкүн дејил, јә'ни елә $\varepsilon_0>0$ әдәди вар ки, она гаршы көтүрүлмүш истәнилән $\delta>0$ әдәди үчүн x-ин $|x-a|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә (6) бәрабәрсизлији өдәнилмир, x-ин (5) мүнасибәтини өдәјән һеч олмазса бир x^* гијмәти вар ки,

$$|f(x^*)-A|\geqslant\varepsilon_0$$

олур.

Беләликлә, δ әдәдинә ардычыл олараг $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ гијмәтләрини вермәклә елә

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \tag{7}$$

нөгтәләри тапарыг ки,

$$|x_к-a|<\frac{1}{к}, \quad |f(x_к)-A|\geqslant\varepsilon_0 \tag{8}$$

мүнасибәтләри ејни заманда өдәнилләр. $|x_к-a|<\frac{1}{к}$ бәрабәрсизлији өдәнилдијиндән (7) ардычыллығы a әдәдинә јығылар. Онда 1-чи тә'рифә көрә

$$\lim_{к\to\infty} f(x_к)=A$$

олмалыдыр. Бу о демәкдир ки, истәнилән $\varepsilon_0>0$ әдәдинә гаршы елә $N=N(\varepsilon_0)$ вар ки, $к$-нын $к\geqslant N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x_к)-A|<\varepsilon_0 \tag{9}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. (8) бәрабәрсизликләринин икинчисинә көрә исә (9) бәрабәрсизлији өдәнилә билмәз. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, A әдәди 2-чи тә'рифә көрә дә $f(x)$ функсијасынын $x=a$ нөгтәсиндә лимитидир.

Инди фәрз едәк ки, A әдәди 2-чи тә'рифә көрә $f(x)$ функсијасынын $x=a$ нөгтәсиндә лимитидир. Онда истәнилән $\varepsilon>0$ әдәдинә гаршы елә $\delta>0$ тапмаг олар ки, x-ин $|x-a|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә $|f(x)-A|<\varepsilon$ бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу һалда, $\{x_n\}$ ардычыллығы a-ја јығылан истәнилән ардычыллыг олдугда $\delta>0$ әдәдинә гаршы елә N тапмаг олар ки,

$$|x_n-a|<\delta \quad (n\geqslant N)$$

бәрабәрсизлији өдәнилсин. Белә x_n нөгтәләри үчүн:

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon \quad (n\geqslant N),$$

олар. Бу исә

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A$$

олдуғуну, јә'ни A әдәди 1-чи тә'рифә көрә $f(x)$-ин $x=a$ нөгтәсиндә лимити олдуғуну көстәрир.

Функсија лимитинин 1 вә 2-чи тә'рифләри еквивалент олдуғундан онларын һәр бириндән истифадә етмәк олар.

Мисал 1.

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \quad (x\neq 0) \tag{10}$$

функсијасынын $x=0$ нөгтәсиндә лимитини һесабламалы.

Бу мәгсәдлә сыфра јығылан $x'_n=\frac{1}{n\pi}$ $(n=1, 2, \ldots)$ вә $x''_n=\frac{2}{(4n+1)\pi}$ $(n=1, 2, \ldots)$ ардычыллыгларыны көтүрәк: $x'_n\to 0$, $(n\to\infty)$ вә $x''_n\to 0$ $(n\to\infty)$. Бу ардычыллыглара (10) функсијасынын ујғун олан гијмәтләри

$$f(x'_n) = \sin\frac{1}{x'_n} = \sin n\pi = 0 \quad (n=1,\ 2,\ ...)$$

вә

$$f(x''_n) = \sin\frac{1}{x''_n} = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = 1 \quad (n=1,\ 2,\ ...)$$

олдуғундан $\{f(x_n')\}$ вә $\{f(x''_n)\}$ ардычыллыглары мүхтәлиф әдәдләрә јығылыр:

$$f(x'_n)\to 0 \quad (n\to\infty)$$

вә

$$f(x''_n)\to 1 \quad (n\to\infty).$$

Функсија лимитинин 1-чи тә'рифинә көрә (10) функсијасынын $x = 0$ нөгтәсиндә лимити јохдур.

Мисал 2.

$$f(x)=\begin{cases}1+x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases} \qquad (11)$$

функсијасынын $x=0$ нөгтәсиндә лимитинин 1-ә бәрабәр олдуғуну көстәрмәли.

Бу мәгсәдлә (11) функсијасы үчүн $x\neq 0$ нөгтәсиндә доғру олан

$$|f(x)-1| = \left|x\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant |x|$$

бәрабәрсизлијини нәзәрә алараг, ихтијари $\varepsilon>0$ әдәди үчүн $\delta=\varepsilon$ сечмәк кифајәтдир. Онда x-ин $|x-0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x)-1| \leqslant |x|<\delta=\varepsilon$$

бәрабәрсизлији доғру олар, бу да

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

олдуғуну көстәрир.

Инди $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ олмасынын һәндәси изаһыны верәк. Бу мәгсәдлә функсија лимитинин 2-чи тә'рифиндән истифадә едәк. (6) бәрабәрсизлијини она еквивалент олан

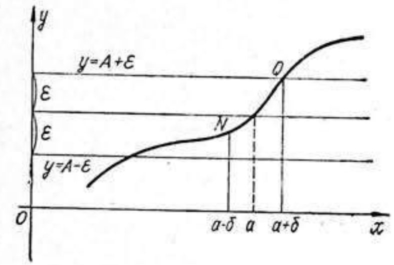
$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$$

вә ја

$$A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon \qquad (12)$$

шәклиндә јазаг. (12) бәрабәрсизлији көстәрир ки, $M[x, f(x)]$ нөгтәси $y = A-\varepsilon$ вә $y=A+\varepsilon$ дүз хәтләри арасында јерләшир.

Демәли, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ олмасы һәндәси олараг о демәкдир ки, (xOy) мүстәвиси үзәриндә $y = A - \varepsilon$ вә $y=A+\varepsilon$ дүз хәтләри илә һүдудланмыш ихтијари золаг үчүн елә $(a-\delta,\ a+\delta)$ интервалы вар ки, $f(x)$ функсијасынын бу интервалдакы графикинин (график үзәриндә a-ја ујғун олан нөгтә мүстәсна олмагла) бүтүн нөгтәләри (NQ әјриси) һәмин золағын дахилиндә јерләшир (128-чи шәкил).



Шәкил 128.

§ 7. ФУНКСИЈА ЛИМИТИНИН «СОНСУЗЛУГ» ОЛМАСЫ

Фәрз едәк ки, $y = f(x)$ функсијасы X чохлуғунда тә'јин олунмушдур вә a нөгтәси бу чохлуғун лимит нөгтәсидир. Аргумент X чохлуғундан гијмәтләр алараг a-ја јахынлашанда $f(x)$ функсијасы гијмәтләринин дәјишмә характери мүхтәлиф ола биләр. Бу просес заманы функсијанын гијмәтләринин сонлу бир A әдәдинә јахынлашдығыны (јә'ни $x\to a$ шәртиндә функсија лимитинин A олмасыны) биз әввәлки параграфда тәдгиг етмишдик. Јердә галан һалларда $f(x)$ функсијасынын $x=a$ нөгтәсиндә лимити јохдур.

Ола биләр ки, x аргументи X чохлуғундан гијмәтләр алараг a-ја јахынлашдыгда $f(x)$ функсијасынын гијмәтләри мүтләг гијмәтчә гејри-мәһдуд олараг артыр. Мәсәлән, $x\to 1$ шәртиндә

$$f(x) = \frac{5}{(x-1)^2}$$

функсијасынын гијмәтләри гејри-мәһдуд олараг артыг. Бу һалда дејирләр ки, $x\to 1$ шәртиндә $f(x)$ функсијасы сонсузлуға јахынлашыр: $f(x)\to\infty$ $(x\to 1)$ вә ја $f(x)$ функсијасынын $x=1$ нөгтәсиндә лимити «сонсузлуға» бәрабәрдир. Бурадан ајдындыр ки, «$f(x)$ функсијасынын $x=a$ нөгтәсиндә ($x\to a$-да) лимити сонсузлуға бәрабәрдир» ифадәси шәрти мә'на дашыјыр вә аргумент a-ја јахынлашдыгда функсија гијмәтләринин гејри-мәһдуд артмасыны характеризә едир.

Функсија лимитинин сонсузлуға бәрабәр олмасынын дәгиг тә'рифини дә һәм ардычыллыг вә һәм дә «ε, δ» васитәсилә сөјләмәк олар.

Т ә'р и ф 1. *Тутаг ки, X чохлуғунун a-ја јығылан истәнилән $\{x_n\}$ $(x_n \neq a)$ нөгтәләри ардычыллығы вә истәнилән M әдәди үчүн елә N вар ки, n-ин $n \geqslant N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн ғијмәтләриндә $|f(x_n)| > M$ мүнасибәти өдәнилир. Онда дејирләр ки, $x=a$ нөгтәсиндә (вә ја $x \to a$ шәртиндә) $f(x)$ функсијасынын лимити сонсузлуға бәрабәрдир вә буну*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad (1)$$

вә ја

$$f(x) \to \infty \quad (x \to a) \qquad (2)$$

шәклиндә јазырлар.

Т ә'р и ф 2. *Тутаг ки, истәнилән M әдәди үчүн елә $\delta>0$ вар ки, x-ин X чохлуғундан көтүрүлмүш вә $0<|x-a|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн ғијмәтләриндә*

$$|f(x)| > M \qquad (3)$$

мүнасибәти өдәнилир. Онда дејирләр ки, $x=a$ нөгтәсиндә $f(x)$-ин лимити сонсузлуға бәрабәрдир вә буну (1) вә ја (2) шәклиндә јазырлар.

Бу тә'рифләрин еквивалентлијини асанлыгла јохламаг олар.

Лимити $x=a$ нөгтәсиндә сонсузлуға бәрабәр олан $f(x)$ функсијасына һәмин нөгтәдә (вә ја $x \to a$ шәртиндә) сонсуз бөјүјән функсија дејилир.

Тә'рифдән көрүнүр ки, $x \to a$-да сонсуз бөјүјән $f(x)$ функсијасы $x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында гејри-мәһдуддур. Бунун тәрси доғру олмаја да биләр: гејри-мәһдуд функсија сонсуз бөјүјән олмаја биләр.

Мәсәлән, $f(x) = x^2 \sin x$ функсијасы әдәд оху үзәриндә (хүсуси һалда, $x \to \infty$-да) гејри-мәһдуддур, лакин $x \to \infty$-да сонсуз бөјүјән дејил.

Фәрз едәк ки, $x=a$ нөгтәсиндә лимити сонсузлуға бәрабәр олан $f(x)$ функсијасынын һәмин нөгтәнин мүәјјән $(a-\delta,\ a+\delta)$ әтрафында јерләшән бүтүн x $(x \in X)$ нөгтәләриндә (a нөгтәси мүстәсна олмагла) ғијмәтләри мүсбәтдир. Онда дејирләр ки, $x=a$ нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын лимити мүсбәт сонсузлуға бәрабәрдир вә

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad (4)$$

вә ја

$$f(x) \to +\infty \quad (x \to a)$$

шәклиндә јазырлар.

(4) бәрабәрлијинин дәгиг тә'рифини ифадә етмәк үчүн 1 вә 2-чи тә'рифләрдә $|f(x_n)| > M$ вә $|f(x)| > M$ бәрабәрсизликләрини ујғун олараг $f(x_n) > M$ вә $f(x) > M$ илә әвәз етмәк лазымдыр.

Лимити $x=a$ нөгтәсиндә сонсузлуға бәрабәр олан $f(x)$ функсијасынын һәмин нөгтәнин мүәјјән әтрафындакы ғијмәтләри мәнфи олдугда дејирләр ки, һәмин функсијанын $x \to a$-да лимити мәнфи сонсузлуға бәрабәрдир вә

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad f(x) \to -\infty \quad (x \to a)$$

шәклиндә јазырлар.

Тә'рифдән ајдындыр ки, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ вә a нөгтәсинин мүәјјән әтрафында (a нөгтәси мүстәсна олмагла) $\varphi(x) \geqslant f(x)$ бәрабәрсизлији өдәнилирсә, онда $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = +\infty$.

Еләчә дә, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ вә a нөгтәсинин мүәјјән әтрафында (a нөгтәси мүстәсна олмагла) $\psi(x) \leqslant f(x)$ бәрабәрсизлији өдәнилирсә, онда $\lim\limits_{x\to a} \psi(x) = -\infty$.

Мисал 1. $f(x) = \dfrac{5}{(x-1)^2}$ функсијасынын $x=1$ нөгтәсиндә лимитинин сонсузлуға бәрабәр олдуғуну көстәрмәли.

Тутаг ки, $M>0$ истәнилән әдәддир. Бу әдәдә гаршы $\delta>0$ әдәдини $\delta = \sqrt{\dfrac{5}{M}}$ кими сечсәк $|x-1|<\delta$ олдугда

$$|f(x)| = \frac{5}{|x-1|^2} > \frac{5}{\delta^2} = \frac{5 \cdot M}{5} = M$$

вә ја

$$|f(x)| > M$$

бәрабәрсизлији өдәнилир, јә'ни $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$. Ејни заманда $x=1$ нөгтәсинин әтрафында $f(x)>0$ олдуғундан $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

Мисал 2. $x = 1$ нөгтәсиндә

$$\varphi(x) = -\frac{5}{(x-1)^2}$$

функсијасынын лимити

$$\lim_{x\to 1} \varphi(x) = -\infty$$

олачагдыр.

§ 8. АРГУМЕНТ СОНСУЗЛУҒА ЈАХЫНЛАШДЫГДА ФУНКСИЈАНЫН ЛИМИТИ

Әввәлки параграфларда там ғијмәтли дәјишәнин $f(n)$ функсијасынын (јә'ни, ардычыллығын) $n \to \infty$ шәртиндә вә аргумент сонлу a нөгтәсинә јахынлашдыгда $f(x)$ функсијасынын лимитини өјрәндик. Инди фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасы x-ин кифајәт гәдәр бөјүк ғијмәтләриндә тә'јин олунмушдур вә онун аргументи олан

кәсилмәз типли x дәјишән кәмијјәти истәнилән гијмәтләр алараг мүсбәт сонсузлуға $(+\infty)$, мәнфи сонсузлуға $(-\infty)$ вә ја сонсузлуға (∞) јахынлашыр. Бу һалда, әввәлки параграфда олдуғу кими функсија лимитинә һәм ардычыллыг васитәсилә вә һәм дә «$\varepsilon-\delta$ дилиндә» тә'риф вермәк олар.

Бу тә'рифләрин ујғун олараг еквивалент олдуғуну 5-чи параграфда олдуғу кими исбат етмәк олар. Буна көрә дә һәмин тә'рифләри бурада анчаг «$\varepsilon-\delta$ дилиндә» ифадә етмәклә кифајәтләнәчәјик.

Т ә' р и ф. *Тутаг ки, сонлу A вә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәдләри верилдикдә елә $N>0$ тапмаг олур ки, x-ин $|x|>N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә*

$$|f(x)-A|<\varepsilon \tag{1}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда A әдәдинә $x\to\infty$ шәртиндә $f(x)$ функсијасынын лимити дејилир вә $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ вә ја $f(x)\to A$ $(x\to\infty)$ шәклиндә јазылыр.

Ејни гајда илә функсијанын $x\to+\infty$ вә $x\to-\infty$ шәртиндә дә лимитинә тә'риф вермәк олар.

Т ә' р и ф. *A әдәдинә $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$ шәртиндә $f(x)$ функсијасынын **о заман** лимити дејилир ки, истәнилән $\varepsilon>0$ әдәдинә гаршы елә $N=N(\varepsilon)$ олсун ки, x-ин $x>N$ $(x<N)$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә*

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Буну

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\,(\lim_{x\to-\infty} f(x)=A)$$

шәклиндә јазырлар.

Гејд едәк ки, $f(x)$ функсијасынын $x\to+\infty$ вә $x\to-\infty$ шәртләриндә лимити варса вә

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A$$

өдәнилирсә, онда:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

Бунун тәрси дә доғрудур.

Функсијанын $x\to+\infty$ вә $x\to-\infty$ шәртләриндә лимити варса вә бәрабәр дејилсә:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\neq\lim_{x\to-\infty} f(x),$$

онда $x\to\infty$ шәртиндә функсијанын лимити јохдур.

Аналожи олараг

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$$

вә с. лимитләринә дә тә'риф вермәк олар.

Мисал 1. $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$ функсијасынын $x\to\infty$ шәртиндә лимити 1-ә бәрабәрдир.

Доғрудан да, ихтијари $\varepsilon>0$ әдәдинә гаршы $N=1+\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ әдәдини сечсәк, x-ин $|x|>N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x)-1|=\frac{1}{|x|}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

олачагдыр.

Мисал 2.

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=+\infty \quad (a>1),$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=0 \quad (a>1),$$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x=0 \quad (0<a<1)$$

вә

$$\lim_{x\to-\infty} a^x=+\infty \quad (0<a<1)$$

олдуғуну көстәрмәли.

Бу бәрабәрликләрин биринчисини көстәрмәклә кифајәтләнәк. Бу мәгсәдлә ихтијари $M>0$ әдәди үчүн $N=\log_a M$ әдәдини сечәк. Онда x-ин $x>N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$a^x>a^N=a^{\log_a M}=M$$

вә ја

$$a^x>M$$

олар. Демәли, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$.

Мисал 3. Ашағыдакы бәрабәрлијин доғрулуғуну көстәрмәли:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{2}$$

Билирик ки, x кәмијјәти там мүсбәт гијмәтләр алараг сонсузлуға јахынлашанда (2) бәрабәрлији доғрудур (§ 5). Инди x ис-

тәнилән гијмәтләр алараг сонсузлуға јахынлашанда (2) бәрабәрлијини исбат едәк.

Тутаг ки, $x \to +\infty$. Һәр бир x әдәди үчүн $n \leqslant x < n+1$ бәрабәрсизлијини өдәјән натурал n әдәди вар. Бурадан $x \to +\infty$ шәртиндә $n \to +\infty$. Бу һалда

$$\frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}, \quad 1+\frac{1}{n} \geqslant 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}. \tag{3}$$

(3) бәрабәрсизликләринин кәнар һәдләринин лимити:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]^{-1} = e,$$

бәрабәр олдуғундан орта һәддин дә лимити һәмин e әдәдинә бәрабәр олар (§ 2, теорем 5):

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Ејни гајда илә $x \to -\infty$ олдугда да (2) бәрабәрлијинин доғрулуғуну исбат етмәк олар.

Әкәр (2) бәрабәрлијиндә $x = \frac{1}{\alpha}$ һесаб етсәк, онда $x \to \infty$ әвәзинә $\alpha \to 0$ олар вә һәмин бәрабәрлик

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$$

шәклиндә јазылар.

§ 9. ФУНКСИЈА ЛИМИТИНИН ӘТРАФ АНЛАЈЫШЫ ВАСИТӘСИЛӘ ҮМУМИ ТӘ'РИФИ

Биз әввәлки параграфларда $x \to a$ (a сонлу әдәддир), $x \to +\infty$, $x \to \infty$ вә $x \to -\infty$ шәртләриндә функсијанын сонлу вә ја «сонсуз» лимити һаггында бир сыра тә'рифләр сөјләдик. Бу тә'рифләрин һамысынын мә'насы ејнидир. Онларын мүхтәлиф көрүнмәсинин сәбәби аргументин јахынлашдығы нөгтәнин вә функсија лимитинин сонлу вә ја сонсуз олмасындан асылы олараг мүхтәлиф формал вәзијјәтләр алынмасыдыр.

Инди функсија лимитинин әтраф васитәсилә үмуми тә'рифини верәк.

Мә'лумдур ки, a сонлу әдәд олдугда $(a-\delta, a+\delta)$ интервалына a нөгтәсинин δ-*әтрафы* дејилир (IX, § 8). Бу әтрафы V_a илә ишарә едәк.

$(N, +\infty)$ интервалына (N истәнилән әдәддир) «мүсбәт сонсузлуғун әтрафы» дејилир вә $V_{+\infty}$ илә ишарә олунур.

Һәр бир $(-\infty, N)$ интервалына исә «мәнфи сонсузлуғун әтрафы» дејилир вә $V_{-\infty}$ илә ишарә олунур.

N истәнилән әдәд олдугда $|x| > N$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн x әдәдләри чохлуғуна «сонсузлуғун әтрафы» дејилир вә V_∞ илә ишарә олунур.

Тә'риф. *Тутаг ки, A-нын (A сонлу әдәд вә ја $-\infty$, $+\infty$, ∞ ишарәләриндән биридир) истәнилән V_A әтрафы үчүн a-нын (a сонлу әдәд вә ја $-\infty$, $+\infty$, ∞ ишарәләриндән биридир) елә V_a әтрафы вар ки, x-ин һәр бир $x \in X \cap V_a$ $(x \neq a)$ гијмәтләриндә $f(x) \in V_A$ олур. Онда A-ја $f(x)$ функсијасынын $x = a$ нөгтәсиндә (вә ја $x \to a$ шәртиндә) лимити дејилир вә*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{вә ја} \quad f(x) \to A \quad (x \to a)$$

шәклиндә ишарә олунур.

Гејд едәк ки, әввәлки параграфларда функсија лимитинә вердијимиз мүхтәлиф тә'рифләр бу тә'рифин хүсуси һалларыдыр. Мисал олараг, функсија лимитинә вердијимиз 2-чи тә'рифин (§ 6, a вә A сонлу әдәдләр олдугда) бу тә'рифдән нечә алындығыны көстәрәк. Тә'рифә көрә

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

мүнасибәти о демәкдир ки, A-нын истәнилән V_A әтрафы (истәнилән ε-әтрафы) үчүн a-нын елә V_a әтрафы (δ-әтрафы) вар ки, x-ин һәр бир $x \in X \cap V_a$ $(x \neq a)$ гијмәтләриндә (јә'ни, x-ин X чохлуғундан көтүрүлмүш вә $0 < |x-a| < \delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән һәр бир гијмәтиндә) $f(x) \in V_A$ (јә'ни $|f(x) - A| < \varepsilon$) олар. Бу исә функсија лимитинин 2-чи тә'рифи демәкдир.

§ 10. ФУНКСИЈАНЫН САҒ ВӘ СОЛ ЛИМИТИ

Функсија лимитинин тә'рифиндән ајдындыр ки, A әдәди $x = a$ нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын лимитидирсә, онда x-ин a-ја јахын вә онун истәнилән тәрәфиндә (сол вә ја сағ) јерләшән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{1}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Функсијанын $x = a$ нөгтәсиндә лимити олмадыгда исә (1) бәрабәрсизлији x-ин a-нын мүәјјән тәрәфиндә (мәсәлән, ја солунда, ја да сағында) јерләшән гијмәтләриндә өдәнилә биләр. Бу һалда функсијанын һәмин нөгтәдә биртәрәфли лимитиндән данышмаг олар.

Тә'риф. *Тутаг ки, сонлу а вә А әдәдләри вериләикдә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $\delta>0$ әдәди вар ки, х-ин Х чохлуғундан көтүрүлмүш вә*

$$0 < a - x < \delta \qquad (2)$$

бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (3)$$

мүнасибәти өдәнилир. Онда А әдәдинә $x \to a$ шәртиндә (вә ја $x=a$ нөгтәсиндә) $f(x)$ функсијасынын сол лимити дејилир вә

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x<a)}} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) \qquad (4)$$

шәклиндә ишарә олунур.

Бу тә'рифдәки (2) бәрабәрсизлијини $0 < x-a < \delta$ илә әвәз етсәк, $f(x)$ функсијасынын $x=a$ нөгтәсиндә сағ лимитинин тә'рифини аларыг. *Функсијанын сағ лимити*

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x>a)}} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \qquad (5)$$

шәклиндә ишарә олунур.

$f(x)$ функсијасынын $x=0$ нөгтәсиндә сол вә сағ лимитини ујғун олараг $f(-0)$ вә $f(+0)$ илә ишарә едирләр.

Теорем. ***$y=f(x)$ функсијасынын $x=a$ нөгтәсиндә лимитинин олмасы үчүн онун һәмин нөгтәдә сол вә сағ лимитләринин варлығы вә бир-биринә бәрабәр олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Исбаты. Тутаг ки, $f(x)\to A$ $(x\to a)$. Онда (3) бәрабәрсизлији, х-ин $0<|x-a|<\delta$ мүнасибәтини өдәјән вә буна көрә дә х-ин $0<a-x<\delta$ вә $0<x-a<\delta$ бәрабәрсизликләрини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә өдәнилир. Демәли,

$$A = \lim_{x\to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0),$$

јә'ни шәртин зәрурилији доғрудур.

Шәртин кафилијини исбат едәк.

Инди фәрз едәк ки, $f(x)$-ин $x=a$ нөгтәсиндә бир-биринә бәрабәр олан сол вә сағ лимитләри вар:

$$A = f(a-0) = f(a+0).$$

Онда сол вә сағ лимитләрин тә'рифинә көрә истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә δ_1 вә δ_2 әдәдләри вар ки, х-ин $0<a-x<\delta_1$ вә $0<x-a<\delta_2$ бәрабәрсизликләрини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x) - A| < \varepsilon \qquad (3)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан, $\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$ оларса х-ин $0<|x-a|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә (3) бәрабәрсизлијинин өдәнилдији алыныр, јә'ни

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

a вә A әдәдләринин һәр һансы бири вә ја һәр икиси $-\infty$, $+\infty$ вә ∞ олдугда да функсијанын сол вә сағ лимити (сонлу вә ја «сонсуз») ујғун шәкилдә тә'јин олунур.

Мисал 1. $f(x)=[x]$ функсијасынын (XI, § 7) $x=n$ (n натурал әдәддир) нөгтәсиндә сол вә сағ лимитини һесабламалы. Функсијанын тә'рифинә (XI, § 7, 4-чү мисал) көрә

$$f(x) = \begin{cases} n-1, & n-1\leqslant x<n \quad \text{оларса,}\\ n, & n\leqslant x<n+1 \quad \text{оларса}\end{cases}$$

олдуғундан истәнилән $\varepsilon>0$ үчүн х-ин $0<n-x<\delta(<1)$ гијмәтләриндә

$$|f(x) - (n-1)| = 0 < \varepsilon$$

вә х-ин $0<x-n<\delta\ (<1)$ гијмәтләриндә

$$|f(x) - n| = 0 < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Демәли,

$$f(n-0) = n-1 \quad \text{вә} \quad f(n+0) = n.$$

Ајдындыр ки, функсијанын $x=n$ нөгтәсиндә лимити јохдур.

Мисал 2. $f(x)=\operatorname{sign} x$ функсијасынын (XI, § 3) $x=0$ нөгтәсиндә сол вә сағ лимитини һесабламалы. х-ин $x<0$ гијмәтләриндә $f(x)=-1$ вә $x>0$ гијмәтләриндә исә $f(x)=1$ олдуғундан

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} f(x) = -1 = f(-0),$$

вә

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} f(x) = 1 = f(+0).$$

Мисал 3. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ функсијасы үчүн

$$f(-0) = 0 \quad \text{вә} \quad f(+0) = +\infty.$$

§ 11. ЛИМИТИ ОЛАН ФУНКСИЈАНЫН ХАССӘЛӘРИ

Фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасы $x=x_0$ нөгтәсини өз дахилинә алан һәр һансы интервалда тә'јин олунмушдур.

Т е о р е м 1. ***x_0 нөгтәсиндә сонлу лимити олан $f(x)$ функсијасы һәмин нөгтәнин мүәјјән $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ әтрафында (x_0 нөгтәси мүстәсна олмагла) мәһдуддур.***

И с б а т ы. Тутаг ки, $f(x)\to A\,(x\to x_0)$. Онда $\varepsilon=1$ әдәди үчүн елә $\delta>0$ вар ки, x-ин $0<|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

мүнасибәти өдәнилир. Бурадан, x-ин $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ интервалында јерләшән бүтүн гијмәтләри (x_0 мүстәсна олмагла) үчүн:

$$|f(x)|\leqslant|A|+|f(x)-A|<|A|+1=M.$$

Н ә т и ч ә. x_0 нөгтәсинин һеч бир әтрафында мәһдуд олмајан $f(x)$ функсијасынын $x\to x_0$ шәртиндә (вә ја $x=x_0$ нөгтәсиндә) сонлу лимити јохдур.

Т е о р е м 2. ***$f(x)$ функсијасынын бир x_0 нөгтәсиндә мүхтәлиф ики A вә B лимити ола билмәз.***

Бу теоремин доғрулуғу ардычыллығын лимитинин јеканә олмасы һаггындакы теоремдән (§ 1, теорем 1) ајдындыр.

Т е о р е м 3. ***$f(x)\to A(x\to x_0)$ вә $A>B$ $(A<B)$ олдугда x_0 нөгтәсинин елә $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ әтрафы вар ки, x-ин бу әтрафдакы бүтүн гијмәтләриндә (x_0 мүстәсна олмагла)***

$$f(x)>B\quad (f(x)<B).$$

И с б а т ы. $A>B$ олдугда $f(x)\to A\,(x\to x_0)$ олдуғундан $\varepsilon=A-B$ әдәди үчүн елә $\delta>0$ вар ки, x-ин $0<|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

вә ја

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$$

мүнасибәти өдәниләр. Демәли, x-ин $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә (x_0 мүстәсна олмагла)

$$f(x)>A-\varepsilon=B.$$

Н ә т и ч ә. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A>0$ $(A<0)$ *олдугда x_0 нөгтәсинин елә $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ әтрафы вар ки, x-ин бу әтрафдакы бүтүн гијмәтләриндә (x_0 нөгтәси мүстәсна олмагла)*

$$f(x)>0\quad (f(x)<0).$$

Т е о р е м 4 (Коши критеријасы). *$y=f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндә сонлу лимитинин олмасы үчүн ашағыдакы шәртин өдәнилмәси зәрури вә кафидир: истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ әдәди вар ки, x-ин $0<|x'-x_0|<\delta$ вә $0<|x''-x_0|<\delta$ бәрабәрсизликләрини өдәјән ихтијари ики x' вә x'' гијмәтләриндә*

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Бу теоремин исбатыны вермирик.

Исбат олунан теоремләрдә вә 4-чү теоремдә x_0 әвәзинә $-\infty$, $+\infty$ вә ∞ символларынын һәр бирини көтүрмәк олар.

§ 12. СОНСУЗ КИЧИЛӘН ФУНКСИЈАЛАР

Бурада биз $x=x_0$ нөгтәсини өз дахилинә алан һәр һансы интервалда тә'јин олунмуш (x_0 нөгтәси мүстәсна ола биләр) $f(x)$ функсијасына бахачағыг.

Лимити $x=x_0$ нөгтәсиндә сыфра бәрабәр олан $y=f(x)$ функсијасына һәмин нөгтәдә вә ја $x\to x_0$-да *сонсуз кичилән функсија* дејилир.

Т е о р е м 1. ***A әдәди $x\to x_0$ шәртиндә $f(x)$-ин лимити олмасы үчүн $\alpha(x)=f(x)-A$ фәргинин $x\to x_0$ шәртиндә сонсуз кичилән олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, $f(x)\to A$ $(x\to x_0)$. Онда ихтијари $\varepsilon>0$ үчүн елә $\delta>0$ вар ки, x-ин $|x-x_0|<\delta$ $(x\neq x_0)$ мүнасибәтини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|\alpha(x)|=|f(x)-A|<\varepsilon \tag{1}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан $\alpha(x)\to 0$ $(x\to x_0)$ алыныр.

Шәртин кафилији. $\alpha(x)\to 0$ $(x\to x_0)$ олдугда x-ин $|x-x_0|<\delta$ $(x\neq x_0)$ мүнасибәтини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә (1) бәрабәрсизлији өдәниләр, бу да $f(x)\to A\,(x\to x_0)$ олмасы демәкдир.

Бу теоремдән ајдын олур ки, $f(x)\to A\,(x\to x_0)$ олмасы функсијанын

$$f(x)=A+\alpha(x),\quad \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0 \tag{2}$$

шәклиндә көстәрилмәсинә еквивалентдир.

Мисал 1. $f(x)=5+(x-1)^2$ олдугда $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=5$, чүнки $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=0$.

Т е о р е м 2. *$x \to x_0$ шәртиндә $f(x)$ функсијасы сонсуз кичилән вә сыфра чеврилмәјән функсијадырса, онда $x \to x_0$ шәртиндә $\frac{1}{f(x)}$ сонсуз бөјүјән функсија олар. $x \to x_0$ шәртиндә $f(x)$ функсијасы сонсуз бөјүјән оларса, онда $\frac{1}{f(x)}$ сонсуз кичилән олар.*

И с б а т ы. $f(x) \to 0$ $(x \to x_0)$ олдугда истәнилән бөјүк $M>0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ тапмаг олар ки, x-ин $|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x)| < \frac{1}{M}$$

вә ја

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M.$$

Бурадан $\frac{1}{f(x)} \to \infty$ $(x \to x_0)$ алыныр.

Теоремин икинчи һиссәси дә ејни гајда илә исбат олунур.

Т е о р е м 3. *Сонсуз кичилән функсија илә мәһдуд функсијанын һасили сонсуз кичилән функсијадыр.*

И с б а т ы. Тутаг ки, $x \to x_0$ шәртиндә $f(x)$ сонсуз кичилән, $\varphi(x)$ исә мәһдуд функсијадыр. Онда истәнилән $\varepsilon>0$ вә $M>0$ әдәдләри үчүн елә δ_1 вә δ_2 вар ки,

$$|x-x_0|<\delta_1 \quad \text{олдугда} \quad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

вә

$$|x-x_0|<\delta_2 \quad \text{олдугда} \quad |\varphi(x)| < M$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан, δ илә δ_1 вә δ_2 әдәдләринин кичијини ишарә етсәк, x-ин $|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x)\cdot\varphi(x)| = |f(x)|\cdot|\varphi(x)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

олар, бу да $f(x)\cdot\varphi(x) \to 0$ $(x \to x_0)$ олдуғуну көстәрир.

Н ә т и ҹ ә 1. Сонсуз кичилән ики функсијанын һасили дә сонсуз кичиләндир.

Нәтиҹәнин доғрулуғуна инанмаг үчүн лимити сыфра бәрабәр олан функсијанын мәһдуд олмасыны јада салмаг кифајәтдир. Бу тәклиф истәнилән сонлу сајда вуругларын һасили үчүн дә доғрудур.

Н ә т и ҹ ә 2. Сабит әдәдлә сонсуз кичилән функсијанын һасили сонсуз кичилән функсијадыр.

Т е о р е м 4. *Сонлу сајда сонсуз кичилән $f_\kappa(x)$ $(\kappa = 1, N)$ функсијаларынын ҹәми дә сонсуз кичилән функсијадыр.*

И с б а т ы. Фәрз едәк ки, $f_\kappa(x) \to 0$ $(x \to x_0)$, $\kappa = 1, 2, \ldots, N$. Онда истәнилән $\frac{\varepsilon}{N}$ әдәди үчүн елә δ_κ вар ки, x-ин $|x-x_0|<\delta_\kappa$ $(\kappa=1, 2, \ldots, N)$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә ујғун олараг

$$|f_\kappa(x)| < \frac{\varepsilon}{N} \quad (\kappa=1, 2, \ldots, N)$$

мүнасибәтләри өдәниләр. Бу бәрабәрсизликләрә әсасән x-ин $|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$\left|\sum_{\kappa=1}^{N} f_\kappa(x)\right| \leqslant \sum_{\kappa=1}^{N} |f_\kappa(x)| < \frac{\varepsilon}{N}\cdot N = \varepsilon \qquad (3)$$

олар, бурада δ илә δ_κ $(\kappa=1, 2, \ldots, N)$ әдәдләринин ән кичијини ишарә едилмишдир.

(3) мүнасибәтиндән

$$\sum_{\kappa=1}^{N} f_\kappa(x) \to 0 \quad (x \to x_0)$$

олмасы ајдындыр.

Г е ј д 1. Бә'зән сонсуз кичилән функсијаларын елә ҹәмләринә бахмаг лазым кәлир ки, онларда топлананларын һәр бири кичилдикҹә һәдләрин сајы сонсуз артыр. Бу һал үчүн 4-чү теорем доғру олмаја биләр. Доғрудан да, һәдләри сонсуз кичилән олан

$$r_n = \underbrace{\frac{2}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{2}{n}}_{n \text{ сајда}} = 2,$$

$$R_n = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{n \text{ сајда}} = \frac{1}{n}$$

вә

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

ҹәмләрини көтүрсәк, онларын биринчиси (r_n) сабит, икинчиси (R_n) сонсуз кичилән вә үчүнҹүсү (S_n) сонсуз бөјүјән олар.

Г е ј д 2. Исбат етдијимиз теоремләрдән көрүнүр ки, ики сонсуз кичилән функсијанын ҹәми, фәрги вә һасили дә сонсуз кичиләндир. Ики сонсуз кичилән функсијанын нисбәти исә сонсуз кичилән олмаја да биләр. Доғрудан да, $x \to 1$ олдугда сонсуз кичилән олан

$$\varphi_1(x) = (x-1)^2,\ \varphi_2(x) = x^2(x-1)^2,\ \varphi_3(x) = (x-1)^4$$

функсијаларыны көтүрсәк, онлардан дүзәлмиш

$$\frac{\varphi_3(x)}{\varphi_1(x)} = (x-1)^2 \to 0 \quad (x \to 1)$$

нисбәти дә сонсуз кичилән олар,

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = x^2 \to 1 \quad (x \to 1)$$

нисбәтинин $x \to 1$ олдугда лимити 1 олар,

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = \frac{x^2}{(x-1)^2} \to \infty \quad (x \to 1)$$

нисбәти исә $x \to 1$ олдугда сонсуз бөјүјән функсијадыр.

§ 13. ЛИМИТЛӘР ҺАГГЫНДА ӘСАС ТЕОРЕМЛӘР

Әввәлки параграфда олдуғу кими бурада да биз, аргументин сонлу x_0 нөгтәсинә јахынлашдығы һалда лимитләри өјрәнәчәјик. Лакин ашағыда исбат едәчәјимиз теоремләр аргументин ∞, $(-\infty)$ вә $(+\infty)$-а јахынлашдығы һалларда да доғрудур.

Теорем 1. ***Сонлу лимитләри олан сонлу сајда $f_к(x)$ ($к=1, 2, ..., n$) функсијаларынын чәминин лимити онларын лимитләри чәминә бәрабәрдир:***

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{к=1}^{n} f_к(x) = \sum_{к=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_к(x). \tag{1}$$

Исбаты. Фәрз едәк ки, $f_к(x) \to A_к$ $(x \to x_0)$ $(к=\overline{1, n})$. Онда габагкы параграфда исбат етдијимиз 1-чи теоремә көрә

$$f_к(x) = A_к + \alpha_к(x) \quad (к=1, 2, ..., n), \tag{2}$$

бурада $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha_к(x) = 0$ $(к=\overline{1, n})$. (2) бәрабәрликләринә әсасән

$$\sum_{к=1}^{n} f_к(x) = \sum_{к=1}^{n} A_к + \sum_{к=1}^{n} \alpha_к(x).$$

Сонлу сајда сонсуз кичиләнләрин чәми сонсуз кичилән олдуғундан (§ 12, теорем 4)

$$\alpha(x) = \sum_{к=1}^{n} \alpha_к(x)$$

функсијасы $x \to x_0$ шәртиндә сонсуз кичиләндир. Онда:

$$\sum_{к=1}^{n} f_к(x) = \sum_{к=1}^{n} A_к + \alpha(x),$$

бу да 1-чи теоремә (§ 12) көрә

$$\sum_{к=1}^{n} f_к(x) \to \sum_{к=1}^{n} A_к \quad (x \to x_0)$$

вә ја (1) бәрабәрлијинин доғру олдуғуну көстәрир.

Теорем 2. ***Сонлу лимитләри олан сонлу сајда $f_к(x)$ ($к=1, 2, ..., n$) функсијаларынын һасилинин лимити онларын лимитләри һасилинә бәрабәрдир:***

$$\lim_{x\to x_0} \prod_{к=1}^{n} f_к(x) = \prod_{к=1}^{n} \lim_{x\to x_0} f_к(x). \tag{3}$$

Исбаты. Үмумилији азалтмадан, теореми $n=2$ олдугда исбат едәк. Әввәлки теоремин исбатында олдуғу кими јенә дә $f_к(x) \to A_к$ $(x \to x_0)$ гәбул етсәк (2) бәрабәрликләрини аларыг. Һәмин бәрабәрликләрә әсасән

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = [A_1 + \alpha_1(x)][A_2 + \alpha_2(x)] =$$
$$= A_1A_2 + [A_1\alpha_2(x) + A_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)].$$

вә ја

$$\alpha(x) = A_1\alpha_2(x) + A_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(x)$$

гәбул етсәк, онда:

$$f_1(x) \cdot f_2(x) = A_1 \cdot A_2 + \alpha(x).$$

$\alpha(x)$ функсијасы сонсуз кичилән олдуғундан (§ 12, теорем 3, 4) ахырынчы бәрабәрликдән (§ 12, теорем 1) (3) мүнасибәтинин $n=2$ олдугда доғрулуғу ајдындыр.

Нәтичә 1. Сабит вуруғу лимит ишарәси харичинә чыхармаг олар:

$$\lim_{x\to x_0} [cf(x)] = c \cdot [\lim_{x\to x_0} f(x)].$$

Нәтичәнин доғрулуғу сабитин лимитинин өзүнә бәрабәр олмасындан $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$ вә теоремдән ајдындыр.

Нәтичә 2. Сонлу лимити олан $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијаларынын фәргинин лимити онларын лимитләри фәргинә бәрабәрдир:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - \varphi(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} \varphi(x).$$

Доғрудан да,

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-\varphi(x)]=\lim_{x\to x_0}[f(x)+(-1)\varphi(x)]=$$

$$=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}(-1)\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Нәтичә 3. Сонлу лимити олан $f(x)$ функсијасы үчүн

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n=[\lim_{x\to x_0}f(x)]^n$$

бәрабәрлији доғрудур.

Теорем 3. ***$f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијаларынын сонлу лимитләри варса вә $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$ оларса, онларын нисбәтинин лимити лимитләринин нисбәтинә бәрабәрдир:***

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}. \qquad (4)$$

Исбаты. Фәрз едәк ки, $f(x)\to A$ $(x\to x_0)$ вә $\varphi(x)\to B$ $(x\to x_0)$. Онда $f(x)=A+\alpha(x)$ вә $\varphi(x)=B+\beta(x)$, бурада $\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ вә $\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0$. Бу мүнасибәтләрә әсасән

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}=\frac{A}{B}+\left(\frac{A+\alpha(x)}{B+\beta(x)}-\frac{A}{B}\right)$$

вә ја

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B}+\gamma(x). \qquad (5)$$

Бурада

$$\gamma(x)=\frac{\alpha(x)B-A\beta(x)}{B(B+\beta(x))}$$

ифадәси $x\to x_0$ олдугда сонсуз кичилән олдуғундан (5) көстәрилишиндән (4) алыныр.

Мисал. Ашағыдакы лимити тапмалы:

$$\lim_{x\to 2}\frac{8x^2+4}{4x+1}.$$

Лимитләр һаггында исбат етдијимиз 3-чү, 1-чи вә 2-чи теоремләрдән ардычыл истифадә етсәк:

$$\lim_{x\to 2}\frac{8x^2+4}{4x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(8x^2+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(4x+1)}=\frac{8\lim\limits_{x\to 2}x^2+4}{4\lim\limits_{x\to 2}x+1}=\frac{36}{9}=4.$$

§ 14. БӘРАБӘРСИЗЛИКДӘ ЛИМИТӘ КЕЧМӘК

Теорем 1. ***x-ин x_0-ын мүәјјән әтрафындакы бүтүн гијмәтләриндә $(x\neq x_0)$***

$$f(x)\geqslant q$$

бәрабәрсизлији өдәнилирсә вә $\lim_{x\to x_0}f(x)$ лимити сонлудурса, онда

$$\lim_{x\to x_0}f(x)\geqslant q. \qquad (1)$$

Исбаты. x_0 нөгтәсинә јығылан ихтијари x_n ардычыллығыны $(x_n\neq x_0)$ көтүрәк. Онда n-ин кифајәт гәдәр бөјүк бүтүн гијмәтләриндә $f(x_n)\geqslant q$ $(n>n_0)$ бәрабәрсизлији өдәниләр. Бурада лимитә кечсәк вә функсија лимитинин тә'рифини нәзәрә алсаг (1) бәрабәрсизлији алынар.

Нәтичә. $\varphi(x)$ вә $\psi(x)$ функсијаларынын $x\to x_0$ шәртиндә лимити варса вә x-ин x_0-ын мүәјјән әтрафындакы бүтүн $(x\neq x_0)$ гијмәтләриндә

$$\psi(x)\geqslant\varphi(x)$$

бәрабәрсизлији өдәниләрсә, онда:

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x)\geqslant\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Нәтичәнин доғрулуғуна инанмаг үчүн $f(x)=\psi(x)-\varphi(x)$ функсијасына теореми тәтбиг етмәк ($q=0$ һесаб едәрәк) кифајәтдир.

Теорем 2. ***Әкәр сонлу***

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A$$

лимити варса вә x-ин x_0-ын мүәјјән әтрафындакы бүтүн $(x\neq x_0)$ гијмәтләриндә

$$f(x)\leqslant\psi(x)\leqslant\varphi(x)$$

бәрабәрсизлији өдәниләрсә, онда:

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = A. \qquad (2)$$

Исбаты. x_0 нөгтәсинә јығылан ихтијари x_n ардычыллығыны $(x_n \neq x_0)$ көтүрсәк, n-ин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә

$$f(x_n) \leqslant \psi(x_n) \leqslant \varphi(x_n) \quad (n \geqslant n_0)$$

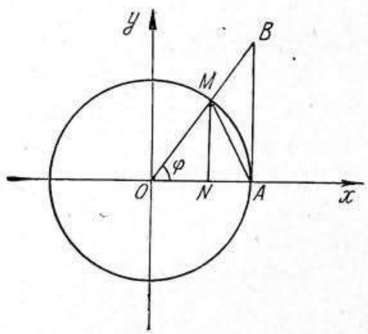
бәрабәрсизлији өдәниләр. Ахырынчы бәрабәрсизликдә $n \to \infty$ шәртиндә лимитә кечсәк (теорем 5, § 2) истәнилән $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ ардычыллығы үчүн

$$\lim_{n \to \infty} \psi(x_n) = A$$

аларыг ки, бу да лимитин тә'рифинә көрә (2) мүнасибәтинин доғру олдуғуну көстәрир.

Мисал 1. Ашағыдакы бәрабәрлијин доғру олдуғуну исбат етмәли:

$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0. \qquad (3)$$



Шәкил 129.

Бу мәгсәдлә мәркәзи координат башланғычында олан ваһид радиуслу чеврә чәкәк. AOM бучағынын (еләчә дә AM гөвсүнүн) радиан гијмәти x олсун. Онда $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ үчүн

саһә$\triangle OAM \leqslant$ саһә сек. $AOM \leqslant$ $\leqslant$ саһә $\triangle AOB$

бәрабәрсизлијиндә (129-чу шәкил):

$$\frac{1}{2} MN \cdot OA \leqslant \frac{1}{2} \breve{AM} \cdot (AO)^2 \leqslant \frac{1}{2} AB \cdot OA$$

вә ја

$$0 \leqslant \sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x \quad \left(0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\right).$$

$\sin x$, x вә $\operatorname{tg} x$ функсијаларынын тәк функсија олмасындан алынып ки, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$ олдугда ахырынчы бәрабәрсизлик

$$0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x| \qquad (4)$$

шәклиндә јазылар. Демәли, (4) бәрабәрсизлији x-ин $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында јерләшән бүтүн гијмәтләриндә доғрудур.

(4) бәрабәрсизлијинә көрә

$$0 \leqslant |\sin x| \leqslant |x| \qquad (5)$$

вә $\lim\limits_{x \to 0} 0 = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ олдуғундан 2-чи теоремә әсасән (3) мүнасибәтини аларыг.

Мисал 2. Ашағыдакы бәрабәрлијин доғрулуғуну исбат етмәли:

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1. \qquad (6)$$

Ајдындыр ки, (5) бәрабәрсизлијинә көрә:

$$0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant 2\sin^2 \frac{x}{2} \leqslant 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$

вә ја

$$0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

Бурада $\lim\limits_{x \to 0} 0 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2}{2} = 0$ олдуғундан 2-чи теореми тәтбиг етмәк олар:

$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Мисал 3. Биринчи гәрибә лимит адланан

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (7)$$

бәрабәрлијини исбат етмәли.

Бу мәгсәдлә $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында доғру олан (4) бәрабәрсизлијинин бүтүн тәрәфләрини $|\sin x|$ $(x \neq 0)$ кәмијјәтинә бөләк вә алынан

$$1 \leqslant \left|\frac{x}{\sin x}\right| \leqslant \frac{1}{|\cos x|}$$

бәрабәрсизлијини ашағыдакы кими јазаг:

$$|\cos x| \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1 \quad \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \ x \neq 0\right).$$

$\cos x$ вә $\frac{\sin x}{x}$ функсиjаларынын һәр икиси чүт вә $\left(-\frac{\pi}{2},\right.$ $\left.\frac{\pi}{2}\right)$ интервалында мүсбәт гиjмәт алан функсиjалар олдуғундан сон мүнасибәти

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \qquad (8)$$

кими јазмаг олар. (6) бәрабәрлиjинә көрә $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

олдуғундан 2-чи теоремә әсасән

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Мисал 4. Ашағыдакы лимити һесабламалы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = ?$$

(6) вә (7) бәрабәрликләриндән истифадә етсәк:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\cos 5x\cdot\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \frac{3}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos 5x = \frac{3}{5}.$$

§ 15. ФУНКСИЈАЛАРЫН МҮГАЈИСӘСИ

Фәрз едәк ки, $\alpha(x)$ вә $\beta(x)$, a нөгтәсинин (a сонлу нөгтә вә ја $(-\infty)$, $(+\infty)$, ∞ символларындан бири ола биләр) һәр һансы әтрафында (a нөгтәси мүстәсна олмагла) тә'јин олунмуш функсиjалардыр.

Т ә'р и ф 1. *Әкәр a нөгтәсинин һәр һансы әтрафында*

$$|\alpha(x)| \leqslant c|\beta(x)| \quad (x \neq a) \qquad (1)$$

бәрабәрсизлиjини өдәjән сабит (x-дән асылы олмаjан) $c > 0$ әдәди оларса, онда $\alpha(x)$ функсиjасына $\beta(x)$-ә нәзәрән $x \to a$ шәртиндә мәһдуд функсиjа дејилир вә

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \quad (x \to a) \qquad (2)$$

шәклиндә јазылыр (белә охунур: «$\alpha(x)$ бәрабәрдир O бөјүк $\beta(x)$»).

Хүсуси һалда, $\alpha(x) = O(1)$ $(x \to a)$ мүнасибәти $\alpha(x)$ функсиjасынын $x \to a$ олдугда мәһдуд олмасыны көстәрир.

Мисал 1. Ашағыдакы бәрабәрликләр доғрудур:

$$x^2 = O(x^n) \quad (x \to 1),$$
$$\sin x = O(1) \quad (x \to 0),$$
$$x^3 = O(x) \quad (x \to 1).$$

Т ә'р и ф 2. *Әкәр*

$$\alpha(x) = \varepsilon(x)\cdot\beta(x), \quad \lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0 \qquad (3)$$

оларса, онда $\alpha(x)$ функсиjасына $\beta(x)$-ә нәзәрән $x \to a$ шәртиндә сонсуз кичилән функсиjа дејилир вә

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \quad (x \to a) \qquad (4)$$

шәклиндә јазылыр («$\alpha(x)$ бәрабәрдир о кичик $\beta(x)$» кими охунур).

Хүсуси һалда, $\alpha(x) = o(1)$ $(x \to a)$ мүнасибәти $\alpha(x)$ функсиjасынын $x \to a$ шәртиндә сонсуз кичилән олмасыны көстәрир.

Гејд едәк ки, (4) мүнасибәтинин доғрулуғундан (2) мүнасибәти алыныр. Доғрудан да, (4) бәрабәрлиjинин доғрулуғу (3) бәрабәрликләринин өдәнилмәси демәкдир. $x \to a$ олдугда лимити сыфра бәрабәр олан $\varepsilon(x)$ функсиjасы a нөгтәсинин мүәjјән әтрафында (a нөгтәси мүстәсна олмагла) мәһдуд олар (§ 11, теорем 1): $|\varepsilon(x)| \leqslant c$ $(x \neq a)$.

Бурадан

$$|\alpha(x)| = |\varepsilon(x)||\beta(x)| \leqslant c|\beta(x)| \quad (x \neq a)$$

вә ја (2) мүнасибәти алыныр. Тә'рифдән ајдындыр ки, $\alpha(x) = o(\beta(x))$ $(x \to a)$ вә $\beta(x) = o(\gamma(x))$ $(x \to a)$ олдугда $\alpha(x) = o(\gamma(x))$ $(x \to a)$.

Бундан башга, $\beta(x)$ функсиjасы a нөгтәсинин мүәjјән әтрафында сыфырдан фәргли, jә'ни $\beta(x) \neq 0$ $(x \neq a)$ оларса, 2-чи тә'рифдә (3) бәрабәрликләрини

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0 \qquad (5)$$

илә әвәз етмәк олар.

Мисал 2. Ашағыдакы бәрабәрликләр доғрудур:

$$x^n = o(e^x) \quad (x \to +\infty), \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$x^n = o(x^2) \quad (x \to 0), \quad n > 2,$$
$$x^2 = o(x^n) \quad (x \to \infty), \quad n > 2,$$
$$x^2 = o(\sin x) \quad (x \to 0),$$
$$\sin^2 x = o(x) \quad (x \to 0).$$

Т ә'р и ф 3. *$\beta(x)$ функсијасы $x \to a$ шәртиндә сонсуз кичилән функсија оларса вә*

$$\alpha(x) = \varepsilon(x)\beta(x), \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \tag{3}$$

мүнасибәтләри өдәнијәрсә, онда $\alpha(x)$ сонсуз кичиләнә $\beta(x)$ сонсуз кичиләнинә нәзәрән јүксәк тәртибли сонсуз кичилән функсија дејилир. Бу һалда, $\beta(x)$ сонсуз кичиләни исә $\alpha(x)$ сонсуз кичиләнинә нәзәрән ашағы тәртибли сонсуз кичилән функсија адланыр.

$\beta(x) \neq 0$ $(x \neq a)$ олдугда, јенә дә бу тә'рифдә (3) әвәзинә (5) бәрабәрлијини көтүрмәк олар.

Мисал 3. $(x \to 1)$-да $\alpha(x) = (x-1)^4$ функсијасы $\beta(x) = (x-1)^2$-на нәзәрән јүксәк тәртибли сонсуз кичиләндир:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^4}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0.$$

Т ә'р и ф 4. *Әкәр $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ нисбәтинин $x \to a$ шәртиндә сыфырдан фәргли сонлу лимити варса, јә'ни $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ оларса, онда $\alpha(x)$ вә $\beta(x)$ сонсуз кичиләнләринә ејнитәртибли сонсуз кичилән функсијалар дејилир.*

Мисал 4. $\alpha(x) = 7x^2$ вә $\beta(x) = \sin^2 x$ функсијалары $x \to 0$ шәртиндә ејнитәртибли сонсуз кичилән функсијалардыр:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 7 \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 7 \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 7 \neq 0.$$

Мисал 5. $\alpha(x) = \sin 3x$ вә $\beta(x) = \operatorname{tg} 7x$ функсијалары ејнитәртибли сонсуз кичилән функсијалардыр.

Доғрудан да,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{3}{5} \neq 0$$

(§ 14, 4-чү мисал).

Т ә'р и ф 5. *$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^m} = A \neq 0$ олдугда $\alpha(x)$ сонсуз кичиләнинә $\beta(x)$ сонсуз кичиләнинә нәзәрән m-тәртибли сонсуз кичилән функсија дејилир.*

Сонсуз кичилән функсијалары бә'зән әсас (вә ја стандарт) һесаб олунан сонсуз кичилән функсијаларла мүгајисә едирләр. Чох һалларда мүгајисә үчүн $(x-a)^m$ (m натурал әдәддир) гүввәт шәклиндә сонсуз кичилән функсијалар көтүрүлүр.

Бу һалда

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{(x-a)^m} = A \neq 0$$

оларса, онда $\alpha(x)$ сонсуз кичиләнинә *a нөгтәсиндә m-тәртибли сонсуз кичилән функсија* дејилир.

Мисал 6. $\alpha(x) = 5(x-1)^4$ функсијасы $x = 1$ нөгтәсиндә $\beta(x) = x-1$ сонсуз кичиләнинә нәзәрән дөрдтәртибли сонсуз кичилән функсијадыр.

Доғрудан да,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^4} = \lim_{x \to 1} \frac{5(x-1)^4}{(x-1)^4} = 5 \neq 0.$$

Мисал 7. $\alpha(x) = 1 - \cos x$ функсијасы $x \to 0$-да икитәртибли ($\beta(x) = x$ сонсуз кичиләнинә нәзәрән) сонсуз кичилән функсијадыр:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Г е ј д. Верилмиш сонсуз кичилән функсијанын башга бир сонсуз кичиләнә нәзәрән мүәјјән тәртиби олмаја да биләр. Мәсәлән, $\alpha(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$ сонсуз кичилән функсијасынын $\beta(x) = x$ сонсуз кичиләнинә нәзәрән мүәјјән тәртиби јохдур. Доғрудан да, һеч бир m әдәди үчүн

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x^m} = \lim_{x \to 0} x^{1-m} \cdot \sin \frac{1}{x} \tag{6}$$

нисбәтинин сыфырдан фәргли сонлу лимити ола билмәз. (6) лимити ја јохдур, ја да сыфра бәрабәрдир.

§ 16. АСИМПТОТИК БӘРАБӘРЛИКЛӘР

Әввәлки параграфда ејнитәртибли сонсуз кичилән функсијалардан данышдыг. Бурада ејнитәртибли сонсуз кичиләнләрин мүһүм бир хүсуси һалыны ајрыча өјрәнәчәјик.

Фәрз едәк ки, $\alpha(x)$ вә $\beta(x)$, a нөгтәсинин һәр һансы әтрафында (a нөгтәси мүстәсна олмагла) тә'јин олунмуш, сыфырдан фәргли вә $x \to a$ шәртиндә сонсуз кичилән функсијалардыр.

Т ә'р и ф 1. *$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ олдугда $\alpha(x)$ вә $\beta(x)$ сонсуз кичиләнләринә еквивалент вә ја асимптотик бәрабәр сонсуз кичилән функсијалар дејилир вә*

$$\alpha(x) \approx \beta(x) \quad (x \to a) \tag{1}$$

шәклиндә ишарә олунур.

Асимптотик бәрабәрлијин бир сыра садә хассәләрини гејд едәк:

1) $\alpha(x) \approx \alpha(x) \quad (x \to a)$,

2) $\alpha(x) \approx \beta(x) \quad (x \to a)$ олдугда $\beta(x) \approx \alpha(x) \quad (x \to a)$.

3) $\alpha(x) \approx \beta(x) \quad (x \to a)$ вә $\beta(x) \approx \gamma(x) \quad (x \to a)$ олдугда $\alpha(x) \approx \gamma(x) \quad (x \to a)$.

Теорем 1. ***а нөгтәсинин һәр һансы әтрафында (а нөгтәси мүстәсна олмагла) тә'јин олунмуш $\alpha(x)$ вә $\beta(x)$ функсијаларынын $x \to a$ шәртиндә асимптотик бәрабәр олмасы үчүн***

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)) \quad (x \to a), \quad \beta(x) \neq 0, \quad (x \neq a) \tag{2}$$

мүнасибәтләринин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, $\alpha(x) \approx \beta(x) \quad (x \to a)$. Онда $\lim\limits_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Бурадан

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 + \varepsilon(x), \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

вә ја

$$\alpha(x) = \beta(x) + \varepsilon(x)\beta(x) = \beta(x) + o(\beta(x)) \quad (x \to a)$$

Шәртин кафилији. Тутаг ки, (2) мүнасибәтләри доғрудур. Онда

$$\alpha(x) = \beta(x) + \varepsilon(x)\beta(x), \quad \varepsilon(x) \to 0 \quad (x \to a).$$

Бурадан

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 + \varepsilon(x)$$

вә

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

алыныр, јә'ни (1) доғрудур.

Тә'риф 2. *Әкәр $\alpha(x)$ вә $\beta(x)$ функсијалары $x \to a$ шәртиндә сонсуз кичилән функсијалардырса вә*

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)) \tag{3}$$

көстәрилиши доғрудурса, онда $\beta(x)$ сонсуз кичиләнинә $\alpha(x)$ сонсуз кичиләнинин баш һиссәси дејилир.

Верилмиш $\alpha(x)$ сонсуз кичилән функсијасынын $\beta(x)$ баш һиссәсинин биргијмәтли тә'јин олунмасы үчүн ону ($\beta(x)$-и) мүәјјән шәкилдә ахтармаг лазымдыр. Мәсәлән, $\alpha(x)$ сонсуз кичиләнин $\beta(x)$ баш һиссәси $\beta(x) = A(x-a)^m$ гүввәт шәклиндә ахтарылдыгда онун биргијмәтли тә'јин олунмасы һаггында ашағыдакы кими тәклиф сөјләмәк олар:

Әкәр $\alpha(x)$ сонсуз кичиләнинин $\beta(x) = A(x-a)^m \quad (A \neq 0)$ гүввәт шәклиндә баш һиссәси варса, онда бу һиссә һәмин шәкилдә олан баш һиссәләр ичәрисиндә јеканә олараг тә'јин олунур.

Доғрудан да, $x \to a$ шәртиндә

$$\alpha(x) = A(x-a)^m + o((x-a)^m), \quad A \neq 0$$

вә

$$\alpha(x) = B(x-a)^m + o(x-a)^n, \quad B \neq 0$$

оларса, онда $A(x-a)^m = \alpha(x) \quad (x \to a)$, $\alpha(x) \approx B(x-a)^n \quad (x \to a)$, бурадан да

$$A(x-a)^m \approx B(x-a)^n.$$

Ахырынчы мүнасибәт

$$\lim_{x \to a} \frac{A(x-a)^m}{B(x-a)^n} = 1 \tag{4}$$

олдуғуну көстәрир. (4) бәрабәрлији исә анҹаг $A = B$ вә $m = n$ олдугда мүмкүндүр.

Сонсуз кичилән функсијаларын баш һиссәсинин ајрылмасы бир чох мәсәләләрин һәллиндә вә хүсусилә, лимитләрин һесабланмасында кениш тәтбиг олунур.

Теорем 2. ***Әкәр $\alpha(x) \approx \alpha_1(x) \quad (x \to a)$, $\beta(x) \approx \beta_1(x) \quad (x \to a)$ вә $\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \to A \quad (x \to a)$ оларса, онда $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \to A \quad (x \to a)$.***

Доғрудан да, $x \to a$ олдугда

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to a} \left[\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \right] = 1 \cdot A \cdot 1 = A.$$

Бу теорем көстәрир ки, ики функсија нисбәтинин лимитини һесабладыгда, онлары ујғун олараг еквивалент функсијаларла әвәз етсәк лимитин гијмәти дәјишмәз.

Мисал 1. $\sin x \approx x \quad (x \to 0)$. Доғрудан да,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(§ 14, 3-чү мисал). Бундан башга, ахырынчы бәрабәрлији

$$\sin x = x + o(x) \quad (x \to 0)$$

шәклиндә дә јазмаг олар. Демәли, $\beta(x) = x$ сонсуз кичилән функсијасы $\alpha(x) = \sin x$ функсијасынын $x \to 0$ шәртиндә баш һиссәсидир.

Мисал 2. $\ln(1+x) \approx x$ $(x \to 0)$. Бу мүнасибәтин доғрулугу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln e = 1$$

(§ 8, 3-чү мисал) бәрабәрлијиндән алыныр.

Мисал 3. $\operatorname{tg} x \approx x$ $(x\to 0)$. Доғрудан да,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1$$

(§ 14, 2 вә 3-чү мисал).

Мисал 4. $a^x-1=\ln a\cdot x$ $(x\to 0)$. Бу мүнасибәти исбат етмәк үчүн $a^x-1=y$ гәбул едәк. Онда $a^x=y+1$ вә $\ln a\cdot x=\ln(1+y)$. Бурадан:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}}=\lim_{y\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+y)^{1/y}}=\frac{\ln a}{\ln e}=\ln a.$$

Мисал 5. $(1+x)^a-1=ax$ $(x\to 0)$. Доғрудан да, $(1+x)^a-1=y$ гәбул етсәк, $y\approx\ln(1+y)$ $(y\to 0)$ мүнасибәтинә әсасән:

$$(1+x)^a-1\approx\ln[1+(1+x)^a-1]=\ln(1+x)^a=a\ln(1+x)\quad(x\to a),$$

бурадан:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\ln(1+x)}{x}=a.$$

XIII ФӘСИЛ

ФУНКСИЈАНЫН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

§ 1. ФУНКСИЈАНЫН НӨГТӘДӘ КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмуш функсијадыр.

Т ә'р и ф 1. *Әкәр*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\tag{1}$$

бәрабәрлији өдәнилирсә, онда $f(x)$ функсијасына $x=x_0$ нөгтәсиндә (вә ја $x=x_0$ гијмәтиндә) кәсилмәјән функсија дејилир. (1) бәрабәрлији өдәнилмәдикдә, дејирләр ки, $f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсиндә кәсилир вә x_0 нөгтәси $f(x)$-ин кәсилмә нөгтәсидир.

Тә'рифдән көрүнүр ки, $f(x)$ функсијасынын $x=x_0$ нөгтәсиндә кәсилмәз олмасы үчүн $x\to x_0$ шәртиндә онун сонлу лимити функсијанын x_0 нөгтәсиндәки хүсуси гијмәтинә бәрабәр олмалыдыр. Функсијанын x_0 нөгтәсиндә кәсилмәзлијини тә'јин едән (1) бәрабәрлијини

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)\tag{2}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Функсија лимитинин тә'рифләриндән (XII фәсил, § 6) истифадә етсәк кәсилмәзлијин тә'рифини башга шәкилләрдә дә ифадә едә биләрик.

Т ә'р и ф 2. *Тутаг ки, истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $\delta>0$ әдәди вар ки, x-ин $|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу һалда $f(x)$ функсијасына $x=x_0$ нөгтәсиндә кәсилмәјән функсија дејилир.*

Т ә'р и ф 3. *(a, b) интервалынын x_0-а јығылан истәнилән x_n $(n=1, 2, \ldots)$ нөгтәләри ардычыллығына $f(x)$ функсијасынын ујғун $f(x_n)$ гијмәтләри ардычыллығы һәмишә $f(x_0)$ әдәдинә јығыларса, онда $f(x)$ функсијасына x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән функсија дејилир.*

Функсија лимити тә'рифләринин еквивалент олмасыны көстәрән теоремә (XII фәсил, § 6) көрә кәсилмәзлијә вердијимиз тә'рифләрин үчү дә еквивалентдир.

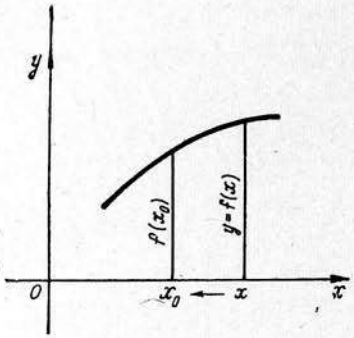
Әкәр $y=f(x)$ функсијасы сағдан гапалы $(a, b]$ јарыминтервалында тә'јин олунмушдурса, онда онун b нөгтәсиндә солдан кәсилмәзлијиндән, солдан гапалы $[a, b)$ јарыминтервалында тә'јин олундугда исә онун a нөгтәсиндә сағдан кәсилмәзлијиндән данышмаг олар.

Т ә'р и ф 4. *Әкәр $f(b-0)=f(b)$ $(f(a+0)=f(a))$ бәрабәрлији өдәниләрсә, онда $f(x)$ функсијасына $x=b$ нөгтәсиндә ($x=a$ нөгтәсиндә) солдан (сағдан) кәсилмәјән функсија дејилир.*

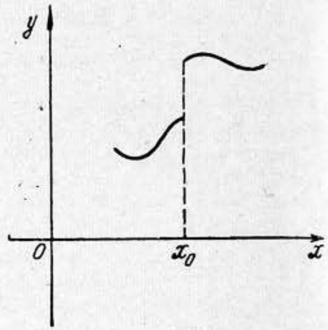
Ајдындыр ки, (a, b) интервалында тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасынын интервалын ихтијари дахили x_0 нөгтәсиндә дә сағдан вә солдан кәсилмәзлијиндән данышмаг олар: $f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјәндирсә, онда һәмин нөгтәдә о һәм сағдан вә һәм дә солдан кәсилмәјән олар. Тәрсинә, $f(x)$ функсијасы $x_0\in(a, b)$ нөгтәсиндә һәм солдан вә һәм дә сағдан ејни заманда кәсилмәјән оларса, онда о һәмин нөгтәдә кәсилмәјән олар. Ола биләр ки, функсија x_0 нөгтәсиндә кәсилән, лакин һәмин нөгтәдә ја солдан, ја да сағдан кәсилмәјән олсун.

$f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндә кәсилмәзлији һәндәси олараг о демәкдир ки, x нөгтәси истәнилән јолла (солдан, сағдан вә јахуд рәгс едәрәк) x_0 нөгтәсинә јахынлашдыгда функсија графикинин $y=f(x)$ ординатлары $f(x_0)$ әдәдинә (ординатына)

јахынлашыр (130-чу шәкил). Бурадан көрүнүр ки, кәсилмәјән функсијанын графики бүтөв (гырылмаз) хәтт олмалыдыр. Функсија графикинин «гырылдығы» нөгтәдә исә функсија кәсилән олар (131-чи шәкил).



Шәкил 130.



Шәкил 131.

Функсија тә'јин областынын бүтүн нөгтәләриндә вә јахуд мүәјјән һиссәсиндә кәсилмәјән ола биләр.

Мисал 1. Бүтүн әдәд охунда тә'јин олунмуш $f(x) = x^2$ функсијасы тә'јин областынын һәр бир нөгтәсиндә кәсилмәјәндир. Доғрудан да, истәнилән $x_0 \in (-\infty, \infty)$ нөгтәсиндә

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x^2 = x_0{}^2 = f(x_0)$$

бәрабәрлији өдәнилир.

Мисал 2. Әдәд охунда тә'јин олунмуш $f(x) = \text{sign}\, x$ функсијасы (XI, § 3, 4-чү мисал) тә'јин областынын $(-\infty, 0)$ вә $(0, \infty)$ һиссәләриндә кәсилмәјәндир, лакин $x=0$ нөгтәсиндә кәсиләндир. Функсијанын $x=0$ нөгтәсиндә гијмәти сыфра бәрабәрдир: $f(0)=0$, һәмин нөгтәдә лимити исә јохдур. Буна көрә дә

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

бәрабәрлији өдәнилмир (бу бәрабәрлијин өдәнилмәсиндән һеч данышмаг мүмкүн дејилдир).

Мисал 3. Бүтүн әдәд охунда тә'јин олунмуш

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ расионал әдәд олдугда,} \\ 0 & x \text{ иррасионал әдәд олдугда} \end{cases}$$

Дирихле функсијасы (XI, § 6, III мисал) тә'јин областынын һеч бир нөгтәсиндә кәсилмәјән дејилдир, јә'ни тә'јин областынын бүтүн нөгтәләри онун кәсилмә нөгтәләридир.

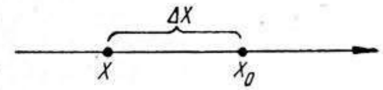
Т ә' р и ф 5. *X чохлуғунун (парчанын, интервалын вә с.) һәр бир нөгтәсиндә кәсилмәјән $f(x)$ функсијасына һәмин чохлугда кәсилмәјән функсија дејилир.*

$f(x) = x^2$ функсијасы $(-\infty, \infty)$ интервалында кәсилмәјән функсијадыр.

§ 2. АРТЫМ ВАСИТӘСИЛӘ КӘСИЛМӘЗЛИЈИН ТӘ'РИФИ

Әввәлчә верилмиш x_0 нөгтәсини өз дахилинә алан һәр һансы интервалда тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасынын вә онун x аргументинин артымына тә'риф верәк.

Т ә' р и ф 1. *Аргументин x_0 гијмәти илә она гоншу олан x гијмәтинин фәргинә аргументин x_0 нөгтәсиндәки артымы дејилир* (132-чи шәкил). Аргумент артымыны $x - x_0 = \Delta x$ илә ишарә едәк.



Шәкил 132.

Ајдындыр ки, аргумент артымы мүсбәт вә ја мәнфи ола биләр. Аргументин x_0 гијмәтинин үзәринә Δx артымыны әлавә етмәклә онун һәмин нөгтәнин әтрафында јерләшән гијмәтләрини алмаг олар: $x = x_0 + \Delta x$.

Т ә' р и ф 2. *$f(x)$ функсијасынын x вә x_0 нөгтәләриндәки гијмәтләринин фәргинә онун x_0 нөгтәсиндәки артымы дејилир вә*

$$\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$$

шәклиндә ишарә едилир.

$x = x_0 + \Delta x$ олдуғуну нәзәрә алсаг, функсијанын x_0 нөгтәсиндәки артымыны

$$\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Бурадан ајдындыр ки, $f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндәки артымы, x_0 нөгтәсиндән вә аргументин һәмин нөгтәдәки Δx артымындан асылыдыр.

Т ә' р и ф 3. *$f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндәки $\Delta f(x)$ артымы үчүн*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) = 0$$

вә јахуд

$$\lim_{\Delta x\to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$$

мүнасибәти өдәниләрсә, онда $f(x)$ функсијасына x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән функсија дејилир.

Бурадан көрүнүр ки, $f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән олмасы үчүн аргументин һәмин нөгтәдәки сонсуз кичилән артымына функсијанын да сонсуз кичилән артымы ујғун

1349—20

олмалыдыр. Бу тә'рифдән истифадә едәрәк, бир нечә функсијанын кәсилмәзлијини тәдгиг едәк.

Мисал 1. $f(x) = C$ (сабит) вә $\varphi(x) = x$ функсијалары истәнилән нөгтәдә кәсилмәјәндир.

Доғрудан да,

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

вә

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+\Delta x) - \varphi(x) = (x+\Delta x) - x = \Delta x$$

олдуғундан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x)=0,\quad \lim_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0.$$

Мисал 2. $\varphi(x)=\frac{1}{x-2}$ функсијасынын кәсилмәзлијини арашдырмалы.

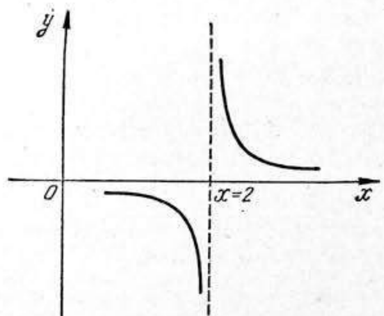
$x\neq 2$ нөгтәсиндә аргументә Δx артымы верәрәк функсијанын уйғун артымыны һесаблајаг:

$$\Delta\varphi(x)=\frac{1}{x+\Delta x-2}-\frac{1}{x-2}=\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)(x-2)}.$$

Бурадан

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\varphi(x)=0$$

олмасы ајдындыр. Ахырынчы бәрабәрлик көстәрир ки, $\varphi(x)$ функсијасы $x\neq 2$ нөгтәсиндә кәсилмәјәндир. $x=2$ нөгтәсиндә исә $\varphi(x)$ функсијасы тә'јин олунмајыб, чүнки $\frac{1}{x-2}$ кәсринин мәхрәҹи $x=2$ нөгтәсиндә сыфра чеврилир, сыфра исә бөлмәк олмаз. О бири тәрәфдән $\lim_{x\to 2}\varphi(x)=\infty$ олмасы ајдындыр. Демәли, $x=2$ нөгтәсиндә $\lim_{x\to 2}\varphi(x)=\varphi(2)$ бәрабәрлијиндән данышмаг олмаз. Јә'ни, $\varphi(x)$ функсијасы $x=2$ нөгтәсиндә кәсиләндир. Дедикләримиз $\varphi(x)$ функсијасынын графикиндән дә (133-чү шәкил) ајдын көрүнүр.



Шәкил 133.

$\varphi(x)$ функсијасынын графики $x=2$ нөгтәсиндә гырылыр. x аргументи сол тәрәфдән 2 нөгтәсинә јахынлашдыгда функсијанын графики ашағы истигамәтә, x аргументи сағ тәрәфдән 2 нөгтәсинә јахынлашдыгда исә функсијанын графики јухары истигамәтә гејри-мәһдуд олараг кедир.

Мисал 3. $y=\sin x$ функсијасы истәнилән x нөгтәсиндә кәсилмәјәндир. Доғрудан да,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

вә $\lim_{\Delta x\to 0}\sin\frac{\Delta x}{2}=0$ олдуғундан $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$

Мисал 4. $y=\cos x$ функсијасы истәнилән x нөгтәсиндә кәсилмәјәндир. Јенә дә,

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

бәрабәрлијинә әсасән

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

олмасы ајдындыр.

§ 3. НӨГТӘДӘ КӘСИЛМӘЈӘН ФУНКСИЈАНЫН ХАССӘЛӘРИ

Бурада бахдығымыз функсијаларын һамысынын верилмиш x_0 нөгтәсини өз дахилинә алан бир интервалда тә'јин олундуғуну фәрз едирик.

Теорем 1. ***Верилмиш x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы һәмин нөгтәнин мүәјјән әтрафында мәһдуддур.***

Исбаты. Кәсилмәзлијин тә'рифинә көрә $\varepsilon=1$ әдәди үчүн елә $\delta>0$ вар ки, x-ин $|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x)-f(x_0)|<1$$

мүнасибәти өдәниләр. Онда x-ин $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x)|=|[f(x)-f(x_0)]+f(x_0)|<1+|f(x_0)|$$

бәрабәрсизлији доғру олар. Бурадан $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ интервалында $f(x)$ функсијасынын мәһдуд олмасы ајдындыр.

Теорем 2. ***x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән $f(x)$ функсијасынын $f(x_0)$ гијмәти мүсбәт (мәнфи) олдуғда, һәмин нөгтәнин мүәјјән әтрафында***

$$f(x)>\frac{1}{2}f(x_0),$$

$$\left(f(x)<\frac{1}{2}f(x_0)\right)$$

бәрабәрсизлији өдәниләр.

Башга сөзлә, $f(x)$ функсијасы кәсилмәјән олдуғу x_0 нөгтәсинин јахын әтрафында ($f(x_0) \neq 0$ шәрти илә) өз ишарәсини сахлајыр.

Исбаты. Кәсилмәзлијин тә'рифинә көрә $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ вар ки, x-ин $|x - x_0| < \delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

вә јахуд

$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2}$$

мүнасибәти өдәнилир. Бурадан алыныр ки, x-ин $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2}$$

вә ја тәләб олунан

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

Теорем 3. ***x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән сонлу сајда $f_к(x)$ ($к = 1, 2, ..., m$) функсијаларынын чәми вә һасили дә һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндир.***

Исбаты. $f_к(x)$ $(к = \overline{1, m})$ функсијалары x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән олдуғундан $\lim\limits_{x \to x_0} f_к(x) = f_к(x_0)$. Онда

$$F(x) = \sum_{к=1}^{m} f_к(x)$$

вә

$$\psi(x) = \prod_{к=1}^{m} f_к(x)$$

функсијалары үчүн лимитләр һаггындакы теоремләрә (XII, § 13) көрә:

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \sum_{к=1}^{m} \lim_{x \to x_0} f_к(x) = \sum_{к=1}^{m} f_к(x_0) = F(x_0)$$

вә

$$\lim_{x \to x_0} \psi(x) = \prod_{к=1}^{m} \lim_{x \to x_0} f_к(x) = \prod_{к=1}^{m} f_к(x_0) = \psi(x_0).$$

Бу да һәмин функсијаларын x_0 нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну көстәрир.

Нәтичә. $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән функсијалар вә C ихтијари сабит әдәд олдуғда $f(x) - \varphi(x)$ вә $Cf(x)$ функсијалары һәмин нөгтәдә кәсилмәјән олар.

Теорем 4. ***Әкәр $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјәндирсә вә $\varphi(x_0) \neq 0$ шәрти өдәнилирсә, онда $f(x)/\varphi(x)$ нисбәти һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндир.***

Доғрудан да, нисбәтин лимити һаггындакы теоремә (XII, § 13) көрә:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}.$$

Теорем 5. ***Әкәр $x = \varphi(t)$ функсијасы t_0 нөгтәсиндә вә $y = f(x)$ функсијасы $x_0 = \varphi(t_0)$ нөгтәсиндә кәсилмәјәндирсә, онда $y = f[\varphi(t)]$ мүрәккәб функсијасы t_0 нөгтәсиндә кәсилмәјәндир.***

Исбаты. Фәрз едәк ки, $\varepsilon > 0$ ихтијари әдәддир. Онда $f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән олдуғундан $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $\eta > 0$ вар ки, x-иң $|x - x_0| < \eta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

мүнасибәти өдәнилир. $x = \varphi(t)$ функсијасы t_0 нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғундан $\eta > 0$ әдәди үчүн елә $\delta > 0$ тапмаг олар ки, t-нин $|t - t_0| < \delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә:

$$|x - x_0| = |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \eta.$$

Онда t-нин $|t - t_0| < \delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$|f[\varphi(t)] - f[\varphi(t_0)]| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

мүнасибәти өдәниләр, бу исә $f[\varphi(t)]$-нин t_0 нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну көстәрир.

Гејд. Теоремин ифадә етдији нәтичәни

$$\lim_{t \to t_0} f[\varphi(t)] = f[\lim_{t \to t_0} \varphi(t)]$$

дүстуру кими дә јазмаг олар. Бурадан кәсилмәз функсијаларын лимитини һесабламаг үчүн дәјишәнин әвәз едилмәси гајдасы алыныр:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{t \to t_0} f[\varphi(t)].$$

§ 4. ТӘРС ФУНКСИЈАНЫН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Верилмиш областда монотон олан $y = f(x)$ функсијасынын тәрс функсијасынын варлығы вә функсијанын гијмәтләр чохлуғунда онун монотон олмасы әввәлдән мә'лумдур (XI, § 14), Инди тәрс функсијанын кәсилмәзлији һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем. *$[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш кәсилмәјән вә артан (ја да азалан) $y = f(x)$ функсијасынын тәрс функсијасы олан $x = \varphi(y)$ функсијасы $[c, d]$ $(c = f(a),\ d = f(b))$ парчасында кәсилмәјәндир.*

Исбаты. Тәрс функсијанын истәнилән $y_0 \in [c, d]$ нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну исбат етмәк үчүн һәмин нөгтәјә јығылан ихтијари $\{y_n\}$ ардычыллығыны көтүрәк: $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$, $y_n \in [c, d]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ $x_0 = \varphi(y_0)$ вә $x_n = \varphi(y_n)$ оларса, онда $y_0 = f(x_0)$ вә $y_n = f(x_n)$. Кәсилмәзлијин тә'рифинә көрә $x = \varphi(y)$ функсијасынын y_0 нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну јәгин етмәк үчүн истәнилән $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$ ардычыллығы үчүн һәмишә $x_n = \varphi(y_n) \to \varphi(y_0) = x_0$ $(n \to \infty)$ олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир. Буну исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк. Тутаг ки, елә $\{x_{n_к}\}$ алтардычыллығы вар ки, x_0 нөгтәсинә дејил, башга x^* нөгтәсинә јығылыр $(x^* \in [a, b],\ x^* \neq x_0)$, онда $f(x)$ артан функсија олдуғундан $f(x^*) \neq f(x_0)$.

Шәртә көрә бүтүн $f(x_{n_к}) = y_{n_к}$ ардычыллыглары $y_0 = f(x_0)$ нөгтәсинә јығылыр:

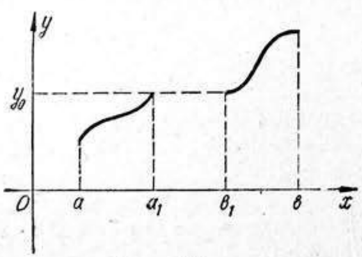
$$f(x_{n_к}) = y_{n_к} \to y_0 = f(x_0) \quad (к \to \infty).$$

О бири тәрәфдән исә $x_{n_к} \to x^*$ $(к \to \infty)$ олдуғундан $f(x)$ функсијасынын кәсилмәзлијинә көрә

$$f(x_{n_к}) \to f(x^*) \quad (к \to \infty)$$

олмалыдыр. Демәли, $\{f(x_{n_к})\}$ ардычыллығы ики мүхтәлиф $f(x_0)$ вә $f(x^*)$ лимитләринә јығылыр. Бу исә ола билмәз. Алынан зиддијјәт теоремин доғру олдуғуну көстәрир.

Бу теоремдә функсијанын тә'јин областы олараг парча әвәзинә интервал да көтүрмәк олар. Лакин тә'јин областы парча вә интервалдан фәргли област көтүрүлдүкдә теорем доғру олмаја да биләр.



Шәкил 134.

Доғрудан да, тә'јин областы ики $[a, a_1]$ вә $[b_1, b]$ парчаларындан ибарәт олан вә монотон артан $y = f(x)$ функсијасынын $x = \varphi(y)$ тәрс функсијасы y_0 нөгтәсиндә кәсиләндир (134-чү шәкил).

§ 5. ЕЛЕМЕНТАР ФУНКСИЈАЛАРЫН КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

$f(x) = c$ (сабит) вә $f(x) = x$ функсијалары бүтүн әдәд охунда кәсилмәјән олдуғундан (§ 2) кәсилмәјән функсијаларын һасили һаггындакы теоремә (§ 3) көрә $f(x) = Cx^n$ (n—натурал әдәддир) функсијасы да бүтүн әдәд охунда кәсилмәјән олар. Онда

$$P_n(x) = \sum_{к=0}^{n} C_к x^к$$

чохһәдлиси дә бүтүн әдәд охунда кәсилмәјән функсијадыр (§ 3, 3-чү теорем), һәр бир

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

расионал функсијасы исә ики кәсилмәјән функсијанын нисбәти олдуғундан, мәхрәчин сыфра чеврилмәдији бүтүн нөгтәләрдә кәсилмәјән олар.

$f(x) = a^x$ $(a > 0)$ үстлү функсијасы бүтүн әдәд охунда, $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ логарифмик функсијасы исә $(0, \infty)$ интервалында кәсилмәјәндир.

$f(x) = \sin x$ вә $f(x) = \cos x$ функсијалары бүтүн әдәд охунда кәсилмәјән олдуғундан (§ 2) онларын нисбәти олан

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x \quad \text{вә} \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

функсијалары да мәхрәчин сыфра чеврилмәдији бүтүн нөгтәләрдә кәсилмәјән олар.

Тәрс тригонометрик функсијаларын кәсилмәзлији исә тәрс функсијанын кәсилмәзлији һаггындакы теоремдән (§ 4) ајдындыр. Мәсәлән, буну $\varphi(x) = \arcsin x$ функсијасы үчүн көстәрәк. $f(x) = \sin x$ функсијасы $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ парчасында тә'јин олунмуш, кәсилмәјән вә артан функсија олдуғундан онун тәрс функсијасы олан $\varphi(x) = \arcsin x$ функсијасы $[-1, 1]$ парчасында кәсилмәјән олар.

Ејни гајда илә дә һиперболик вә тәрс һиперболик функсијаларын варлыг областларында кәсилмәзлијини јохламаг олар.

Беләликлә, ашағыдакы тәклифи алырыг:

Теорем. ***Бүтүн елементар функсијалар тә'јин областларынын һәр бир нөгтәсиндә кәсилмәјәндир.***

§ 6. КӘСИЛМӘ НӨГТӘЛӘРИ

Верилмиш $f(x)$ функсијасынын тә'јин областына дахил олан x_0 нөгтәсинә о заман онун кәсилмә нөгтәси дејилир ки, һәмин нөгтәдә

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

бәрабәрлији өдәнилмәсин (§ 1). Елементар функсијаларын белә кәсилмә нөгтәси ола билмәз, чүнки бүтүн елементар функсијалар (§ 5) тә'јин областларынын һәр бир нөгтәсиндә кәсилмәјәндир.

Гејд едәк ки, $f(x)$ функсијасынын тә'јин областына дахил олмајан, лакин һәмин областын сәрһәд нөгтәси олан нөгтәни дә $f(x)$ функсијасынын кәсилмә нөгтәси һесаб едәҹәјик. Елементар функсијаларын кәсилмә нөгтәләри исә елә бу типли нөгтәләр олур.

Лимитин тә'рифинә әсасән (1) бәрабәрлији $f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндәки сол вә сағ лимитләри васитәсилә јазылмыш

$$f(x_0-0) = f(x_0) = f(x_0+0) \qquad (2)$$

мүнасибәтинә еквивалентдир. Демәли, x_0 нөгтәси $f(x)$ функсијасынын кәсилмә нөгтәсидирсә, онда (2) мүнасибәтиндәки бәрабәрликләрин һеч олмаса бири позулмалыдыр.

Тә'риф 1. *Әкәр x_0 нөгтәси $f(x)$ функсијасынын кәсилмә нөгтәсидирсә вә бу нөгтәдә функсијанын сонлу $f(x_0-0)$ вә $f(x_0+0)$ сол вә сағ лимитләри варса, онда x_0 нөгтәсинә $f(x)$ функсијасынын биринчи нөв кәсилмә нөгтәси дејилир.*

$f(x)$ функсијасынын x_0 кәсилмә нөгтәсиндә

$$f(x_0-0) = f(x_0+0)$$

мүнасибәти өдәнилдикдә, x_0 нөгтәсинә $f(x)$-ин арадан галдырыла билән кәсилмә нөгтәси дејилир. Бу һалда функсија x_0 нөгтәсиндә тә'јин олунмуш оларса, онун һәмин нөгтәдәки гијмәтини дәјишәрәк

$$f(x_0) = f(x_0-0) = f(x_0+0) \qquad (3)$$

гәбул етсәк, $f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән олар. Функсија x_0 нөгтәсиндә тә'јин олунмамышса, онда һәмин нөгтәдә функсијаны (3) бәрабәрлији илә тә'јин едәрәк, нәтиҹәдә x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән функсија аларыг.

Функсијанын x_0 кәсилмә нөгтәсиндә

$$f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$$

мүнасибәти өдәнилдикдә, x_0 нөгтәсинә $f(x)$-ин *сонлу сычрајышлы кәсилмә нөгтәси* дејилир вә

$$d = |f(x_0+0) - f(x_0-0)|$$

фәрги $f(x)$ функсијасынын x_0 ***нөгтәсиндәки сычрајышы*** адланыр. d әдәди, x_0 нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын нечә дәјишдијини характеризә едир.

Дедикләримиздән ајдындыр ки, функсијанын биринчи нөв кәсилмә нөгтәләри арадан галдырыла билән вә сонлу сычрајышлы кәсилмә нөгтәләриндән ибарәтдир.

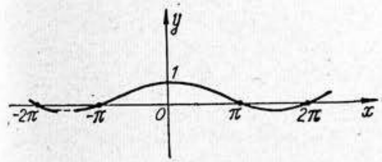
Тә'риф 2. *Әкәр $f(x)$ функсијасынын x_0 кәсилмә нөгтәсиндә $f(x_0-0)$ (сол) вә $f(x_0+0)$ (сағ) лимитләринин һеч олмазса бири јохдурса ја да сонсузлуға бәрабәрдирсә, онда x_0 нөгтәсинә $f(x)$ функсијасынын икинчи нөв кәсилмә нөгтәси дејилир.*

Мисал 1. $f(x) = \operatorname{sign} x$ функсијасы $x=0$ нөгтәсиндә кәсиләндир. $x=0$ нөгтәси бу функсијанын биринчи нөв (сонлу сычрајышлы) кәсилмә нөгтәсидир. $f(-0) = -1$ вә $f(+0) = 1$ олдуғундан $x=0$ нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын сычрајышы $d=2$ олар.

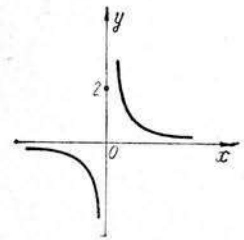
Мисал 2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $(x\neq 0)$ функсијасы $x=0$ нөгтәсиндә кәсилир. $x=0$ нөгтәси бу функсијанын биринчи нөв (арадан галдырыла билән) кәсилмә нөгтәсидир.

$f(-0) = 1 = f(+0)$ олдуғундан (XII, § 14) $f(0) = 1$ гәбул етсәк, функсија $x=0$ нөгтәсиндә кәсилмәјән олар (135-чи шәкил).

Мисал 3. Әдәд охунун һәр бир нөгтәси $y = D(x)$ Дирихле функсијасынын (§ 1, 3-чү мисал) икинчи нөв кәсилмә нөгтәсидир. Ихтијари $x_0 \in (-\infty, \infty)$ нөгтәсиндә $D(x)$ функсијасынын нә сол $D(x_0-0)$, нә дә сағ $D(x_0+0)$ лимити јохдур.



Шәкил 135.



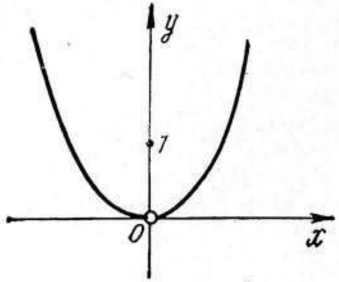
Шәкил 136.

Мисал 4.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ олдугда} \\ 2, & x=0 \text{ олдугда} \end{cases}$$

функсијасы $x=0$ нөгтәсиндә кәсиләндир. $x=0$ нөгтәси функсијанын икинчи нөв кәсилмә нөгтәсидир. Бу нөгтәдә: $f(0)=2$, $f(-0) = -\infty$ вә $f(+0) = +\infty$ (136-чы шәкил).

Мисал 5. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ функсијасы үчүн $x=0$ икинчи нөв кәсилмә нөгтәсидир. Бу нөгтәдә $f(-0)$ вә $f(+0)$ лимитләринин һеч бири јохдур.



Шәкил 137.

Мисал 6.

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0 \text{ олдугда,}\\ 1, & x=0 \text{ олдугда}\end{cases}$$

функсијасы $x=0$ нөгтәсиндә кәсилир. Бу нөгтә $f(x)$ функсијасы үчүн биринчи нөв кәсилмә нөгтәсидир. $f(-0)=f(+0)=0$ олдуғундан $x=0$ нөгтәсиндә функсијанын гијмәтини дәјишәрәк сыфра бәрабәр етсәк:

$$\varphi(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0 \text{ олдугда,}\\ 0, & x=0 \text{ олдугда}\end{cases}$$

вә ја $\varphi(x)=x^2$ функсијасы һәмин нөгтәдә кәсилмәјән олар (137-чи шәкил).

§ 7. МОНОТОН ФУНКСИЈАНЫН КӘСИЛМӘ НӨГТӘЛӘРИ

Фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш монотон (артан, азалмајан, азалан, артмајан) функсијадыр. Бу функсија $[a, b]$ парчасында мәһдуддур. $f(a)$ вә $f(b)$ әдәдләри (парчанын уч нөгтәләриндәки гијмәтләри) онун $[a, b]$ парчасында ән кичик вә ән бөјүк гијмәтләридир.

Монотон функсија тә'јин областынын бүтүн нөгтәләриндә кәсилмәјән олмаја да биләр. Лакин онун кәсилмә нөгтәләринин характери һаггында мүәјјән фикир сөјләмәк мүмкүндүр.

Т е о р е м 1. *$[a, b]$ парчасында монотон олан $f(x)$ функсијасынын һәмин парчада анчаг биринчи нөв кәсилмә нөгтәси ола биләр.*

И с б а т ы. Үмумилији азалтмадан теореми азалмајан функсија үчүн исбат етмәк кифајәтдир. Тутаг ки, $x_0\in[a, b]$ нөгтәси парчанын сол учундан фәргли һәр һансы нөгтәдир. $[a, b]$ парчасынын x_0-дан солда јерләшән һиссәсиндә $f(x)\leqslant f(x_0)$ бәрабәрсизлији өдәнилдијиндән һәмин чохлугда $f(x)$ функсијасы јухарыдан мәһдуддур. Бу чохлугда $f(x)$ функсијасынын дәгиг јухары сәрһәдди M_0 олсун. Онда дәгиг јухары сәрһәддин тә'рифинә көрә ихтијари $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $x_0'<x_0$ нөгтәси вар ки,

$$M_0-\varepsilon<f(x_0')\leqslant M_0$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. $f(x)$ функсијасы азалмајан олдуғундан x-ин $x_0'<x<x_0$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә дә һәмин

$$M_0-\varepsilon<f(x)\leqslant M_0$$

бәрабәрсизлији доғру олар. Бурадан көрүнүр ки,

$$M_0=f(x_0-0)$$

вә

$$M_0=f(x_0-0)\leqslant f(x_0) \qquad (1)$$

мүнасибәти доғрудур.

Ејни мүһакимә илә көстәрмәк олар ки, $f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндә сағ лимити дә вар вә

$$f(x_0)\leqslant f(x_0+0) \qquad (2)$$

мүнасибәти өдәнилир. (1) вә (2) бәрабәрсизликләриндән

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0). \qquad (3)$$

Демәли, истәнилән x_0 нөгтәсиндә ја $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ (бу һалда, $f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсиндә кәсилмәјәндир), ја да $f(x_0-0)<f(x_0+0)$ олар, бу исә x_0 нөгтәсинин $f(x)$-ин биринчи нөв кәсилмә нөгтәси олдуғуну көстәрир.

Т е о р е м 2. *$[a, b]$ парчасында ((a, b) интервалында) монотон артан (вә ја азалан) $f(x)$ функсијасынын гијмәтләри $[c, d]$ парчасыны (ја да (c, d) интервалыны) әмәлә кәтирирсә, онда $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында ((a, b) интервалында) кәсилмәјәндир.*

И с б а т ы. Әксини фәрз едәк. Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы бир $x_0\in[a, b]$ нөгтәсиндә кәсилир. Әввәлки теоремә көрә бу анчаг биринчи нөв кәсилмә нөгтәси ола биләр. Бу һалда x_0 нөгтәсиндә ја $f(x_0-0)<f(x_0)$, ја да $f(x_0)<f(x_0+0)$ мүнасибәти өдәнилмәлидир. Тутаг ки, биринчи бәрабәрсизлик өдәнилир (икинчи өдәнилдикдә дә ејни мүһакимә апарылыр). Онда $x<x_0$ олдугда $f(x)\leqslant f(x_0-0)$ вә $x>x_0$ олдугда $f(x)>f(x_0)$ бәрабәрсизлији өдәнилдијиндән, $f(x)$ функсијасы $f(x_0-0)$ илә $f(x_0)$ арасында јерләшән $y_0\in[c, d]$ гијмәтини һеч јердә ала билмәз. Бу исә $f(x)$ функсијасы гијмәтләринин $[c, d]$ парчасыны тәшкил етмәси шәртинә зиддир, јә'ни $f(x)$-ин $[a, b]$-дә һеч бир кәсилмә нөгтәси јохдур.

Г е ј д 1. Теоремдә функсијанын монотон артан (азалан) олмасы мүһүм шәртдир. Һәмин шәрт позулдугда тәклиф доғру дејилдир. Функсија гијмәтләринин парча тәшкил етмәсиндән онун кәсилмәзлији алынмыр. Мәсәлән,

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

функсијасынын $[-2, 2]$ парчасындакы гијмәтләри $[-1, 1]$ парчасыны тәшкил едир. Лакин бу функсија $[-2, 2]$ парчасында кәсилмәјән дејилдир, $x=0$ нөгтәсиндә кәсилир (§ 6, 5-чи мисал).

Г е ј д 2. Верилмиш парчада монотон олан функсијанын кәсилмә нөгтәләри, ән чоху һесаби сајда ола биләр.

§ 8. ПАРЧАДА КӘСИЛМӘЈӘН ФУНКСИЈАНЫН ХАССӘЛӘРИ

Бурада $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $y=f(x)$ функсијасынын бир сыра әсас хассәләри шәрһ олунур. Гејд едәк ки, $f(x)$ функсијасынын парчанын a сол уч нөгтәсиндә кәсилмәзлији дедикдә, онун һәмин нөгтәдә сағдан кәсилмәзлији ($f(a+0)=f(a)$), b сағ уч нөгтәсиндә кәсилмәзлији дедикдә исә һәмин нөгтәдә солдан кәсилмәзлији ($f(b-0)=f(b)$) баша дүшүлүр.

Хассә 1 (Вејерштрассын биринчи теореми). *Сонлу $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы һәмин парчада мәһдуддур.*

Исбаты. Әксинә фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуд дејилдир. Онда һәр бир натурал n әдәди үчүн елә $x_n \in [a, b]$ нөгтәси вар ки,

$$|f(x_n)| > n \quad (n=1, 2, \ldots) \tag{1}$$

олур. Бу $\{x_n\}$ ардычыллығы мәһдуд олдуғундан ($a \leqslant x_n \leqslant b$), ондан бир $x_0 \in [a, b]$ нөгтәсинә јығылан $\{x_{n_k}\}$ ардычыллығы ајырмаг олар: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Шәртә көрә $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдуғундан x_0 нөгтәсиндә дә кәсилмәјәндир. Онда кәсилмәзлијин тә'рифинә көрә $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Бу исә (1) бәрабәрсизлијинә зиддир. Демәли, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында мәһдуддур.

Гејд. Теоремдә парчанын сонлу вә гапалы олмасы (a вә b учларынын өзүнә дахил олмасы) мүһүм шәртдир. Мәсәлән, $f(x)=x$ функсијасы бүтүн әдәд охунда (бу мәһдуд дејилдир) кәсилмәјән олдуғуна бахмајараг мәһдуд дејилдир.

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ функсијасы $(0, 1]$ јарыминтервалында (гапалы олмајан чохлугда) кәсилмәјәндир, лакин мәһдуд дејилдир.

Хассә 2 (Вејерштрассын икинчи теореми). *Сонлу $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы бу парчанын heч олмаса бир α нөгтәсиндә өзүнүн һәмин парчадакы дәгиг ашағы сәрһәддини, heч олмаса бир β нөгтәсиндә исә дәгиг јухары сәрһәддини алыр, јә'ни*

$$f(\alpha) = \inf_{x\in[a, b]} f(x) = m_0, \qquad f(\beta) = \sup_{x\in[a, b]} f(x) = M_0. \tag{1}$$

Исбаты. Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасынын heч бир нөгтәсиндә M_0 гијмәтини алмыр. Онда x-ин $[a, b]$-дәки бүтүн гијмәтләриндә $f(x) < M_0$ олар. Јени

$$\varphi(x) = \frac{1}{M_0 - f(x)}$$

функсијасы дүзәлдәк. $\varphi(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдуғундан I хассәјә көрә мәһдуддур: $\varphi(x) \leqslant M_1$ $(M_1>0)$.

Бурадан:

$$f(x) \leqslant M_0 - \frac{1}{M_1} \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

(бу исә M_0 әдәдинин $[a, b]$ парчасында $f(x)$ функсијасынын дәгиг јухары сәрһәдди олмадығыны көстәрир). Демәли, фәрзијјәмиз доғру дејил, јә'ни heч олмаса бир $\beta \in [a, b]$ нөгтәсиндә $f(\beta) = M_0$.

Функсијанын heч олмаса бир $\alpha \in [a, b]$ нөгтәсиндә дәгиг ашағы сәрһәддини алмасы да ејни гајда илә исбат олунур.

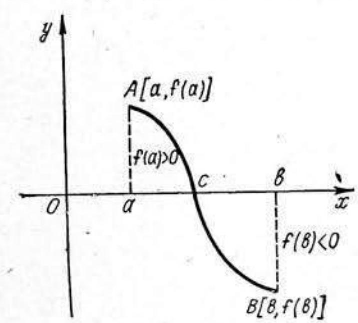
Гејд. Бу теоремдә дә парчанын сонлу вә гапалы олмасы мүһүм шәртдир. Бу шәртләр өдәнилмәдикдә теорем доғру олмаја да биләр. Мәсәлән, $f(x)=x$ функсијасы $(0, 1)$ интервалында кәсилмәјәндир, лакин һәмин интервалын heч бир нөгтәсиндә нә өзүнүн дәгиг ашағы сәрһәддини $0 = \inf\limits_{x\in(0,1)} x$ гијмәтини, нә дә дәгиг јухары сәрһәддини $1 = \sup\limits_{x\in(0,1)} x$ гијмәтини алмыр.

$f(x)=e^x$ функсијасы исә $(-\infty, 0]$ чохлуғунда (гејри-мәһдуд чохлугда) кәсилмәјәндир, лакин һәмин чохлугда дәгиг ашағы сәрһәдди олан $0 = \inf e^x$ гијмәтини һәмин чохлуғун heч бир нөгтәсиндә алмыр.

Хассә 3. *$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $y=f(x)$ функсијасы һәмин парчанын уч нөгтәләриндә мүхтәлифишарәли гијмәтләр алырса, онда a вә b нөгтәләри арасында јерләшән ән азы бир $c\,(a<c<b)$ нөгтәси вар ки, бу нөгтәдә $f(x)$ функсијасы сыфра чеврилир: $f(c)=0$.*

Бу хассәнин чох садә һәндәси мә'насы вар: абсис охунун мүхтәлиф тәрәфләриндә јерләшән $A[a, f(a)]$ вә $B[b, f(b)]$ нөгтәләрини ($f(a)>0$, $f(b)<0$ вә јахуд да $f(a)<0$, $f(b)>0$) бирләшдирән вә кәсилмәз $y=f(x)$ функсијасынын графики олан әјри Ox охуну heч олмаса бир c нөгтәсиндә кәсир (138-чи шәкил).

$f(c)=0$ олдугда c нөгтәсинә $f(x)$ функсијасынын *сыфры* дејилир.



Шәкил 138.

Хассә 4. *$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $y=f(x)$ функсијасы һәмин парчанын уч нөгтәләриндә бәрабәр олмајан $A=f(a)\neq B=f(b)$ гијмәтләрини алырса, онда һәмин A вә B әдәдләри арасында јерләшән һәр бир c әдәди үчүн $[a, b]$ парчасында јерләшән ән азы бир ξ нөгтәси вар ки, $f(\xi)=C$ олар.*

Исбаты. $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән

$$\psi(x) = f(x) - C$$

функсијасы дүзәлдәк. Бу функсијанын парчанын уч нөгтәләриндә алдығы

$$\psi(a) = f(a) - C = A - C$$

вә

$$\psi(b) = f(b) - C = B - C$$

гијмәтләри мүхтәлиф ишарәлидир, чүнки теоремин шәртинә көрә $A<B$ олдугда $A<C<B$, $A-C<0$ вә $B-C>0$ олар. $A>B$ олдугда исә $A>C>B$, $A-C>0$ вә $B-C<0$ олар. Онда IV хассәјә көрә ән азы елә бир $\xi(a<\xi<b)$ вар ки,

$$\psi(\xi)=0, \ f(\xi)-C=0, \ f(\xi)=C.$$

Гејд едәк ки, $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $y=f(x)$ функсијасы II хассәјә көрә бу парчанын бир α нөгтәсиндә өзүнүн дәгиг ашағы сәрһәддини, бир β нөгтәсиндә исә өзүнүн дәгиг јухары сәрһәддини алыр:

$$f(\alpha) = m_0, \ f(\beta) = M_0.$$

$[\alpha, \beta]$ парчасында $f(x)$ функсијасы кәсилмәјән олдуғундан һәр бир $m_0 < \eta < M_0$ әдәди үчүн IV хассәјә көрә дә елә бир $\xi(\alpha<\xi<\beta)$ нөгтәси вар ки, $f(\xi) = \eta$. Демәли, $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы өзүнүн дәгиг ашағы вә дәгиг јухары сәрһәдләри арасындакы бүтүн гијмәтләри алыр. Башга сөзлә, $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасынын алдығы гијмәтләр $[m_0, M_0]$ парчасыны тәшкил едир.

Кәсилмәјән функсијалар үчүн бу хассә ашағыдакы даһа үмуми шәкилдә доғрудур:

Хассә 5. *Мәһдуд вә гапалы X чохлуғунда (хүсуси һалда, $X=[a, b]$ парчасында) кәсилмәјән $f(x)$ функсијасынын $f(X)$ гијмәтләри чохлуғу мәһдуд вә гапалы чохлугдур, јә'ни мәһдуд вә гапалы X чохлуғунда кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы һәмин чохлуғу мәһдуд вә гапалы $f(X)$ чохлуғуна ин'икас етдирир.*

Гејд едәк ки, бу хассә интервал үчүн доғру дејилдир: $I=(a, b)$ интервалында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы үчүн $f(I)$ ачыг чохлуг олмаја да биләр. Кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы монотон олдугда да бу хассә доғру дејилдир. Мәсәлән, $I=(a, b)$ интервалында ејниликлә ваһидә бәрабәр олан $f(x)=1$ функсијасы кәсилмәјән вә монотон олдуғуна бахмајараг $f(I) = \{1\}$ чохлуғу ачыг дејилдир. (Тәкчә 1-дән ибарәт олан чохлуг гапалы чохлугдур.) Интервалда кәсилмәјән функсија артан (чидди) вә ја азалан олдугда исә һәмин хассә доғру олур. Бундан даһа күчлү олан ашағыдакы хассә доғрудур:

$I=(a, b)$ интервалында кәсилмәјән вә артан (јахуд азалан) $f(x)$ функсијасы һәмин интервалы $f(I)$ интервалына гаршылыглы биргијмәтли вә кәсилмәз ин'икас етдирир, јә'ни, $f(x)$ функсијасы $I=(a, b)$ интервалында кәсилмәз вә артан олдугда, онун $x=f^{-1}(y)$ тәрс функсијасы да вар вә бу функсија $f(I)$ интервалында кәсилмәз вә артандыр.

Бу һалда, $y=f(x)$ функсијасы вә ја ин'икасы *һомеоморфизм*, I вә $f(I)$ интерваллары исә *һомеоморф интерваллар* адланыр.

§ 9. ТӘНЛИК ВӘ БӘРАБӘРСИЗЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛИ

Парчада кәсилмәјән функсијаларын хассәләри тәнликләрин вә бәрабәрсизликләрин һәллиндә кениш тәтбиг олунур. Мәсәлән, тәк дәрәчәли вә һәгиги әмсаллы

$$x^{2m+1} + a_1 x^{2m} + a_2 x^{2m-1} + \ldots + a_{2m+1} = 0 \qquad (1)$$

чәбри тәнлијинә бахаг. (1) тәнлијинин сол тәрәфи олан

$$f(x) = x^{2m+1} + a_1 x^{2m} + \ldots + a_{2m+1}$$

функсијасы x-ә нәзәрән чохһәдли олдуғундан бүтүн әдәд охунда кәсилмәјәндир (§ 5). Бундан башга $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ вә $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ олдуғундан елә x_1 вә x_2 нөгтәләри тапмаг олар ки,

$$f(x_1) < 0 \ \text{ вә } \ f(x_2) > 0$$

олсун. Инди $[x_1, x_2]$ парчасына вә $f(x)$ функсијасына әввәлки параграфда шәрһ етдијимиз III хассәни тәтбиг едә биләрик. Һәмин хассәјә көрә $[x_1, x_2]$ парчасында јерләшән елә бир ξ $(x_1<\xi<x_2)$ нөгтәси вар ки,

$$f(\xi) = 0.$$

Демәли, тәк дәрәчәли вә һәгиги әмсаллы һәр бир чәбри тәнлијин ән азы бир һәгиги көкү вардыр.

Кәсилмәјән функсијаларын хассәләри чүт дәрәчәли чәбри тәнликләрин һәллинә дә тәтбиг олуна биләр. Буну изаһ етмәк үчүн дөрддәрәчәли

$$x^4 - 3x + 1 = 0 \qquad (2)$$

тәнлијини көтүрәк.

$f(x) = x^4 - 3x + 1$ функсијасы бүтүн әдәд охунда кәсилмәјәндир вә $[1, 2]$ парчасынын уч нөгтәләриндә мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр алыр: $f(1) = -1$, $f(2) = 11$. Онда III хассәјә (§ 8) көрә елә бир ξ нөгтәси вар ки, $f(\xi)=0$. Демәли, (2) тәнлијинин $[1, 2]$ парчасында јерләшән һәгиги көкү вардыр.

Бу көкү мүәјјән дәгигликлә һесабламаг олар. Бу мәгсәдлә $[1, 2]$ парчасыны 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; ... нөгтәләри васитәсилә 10 бәрабәр һиссәјә бөләк. Бөлкү нөгтәләриндә $f(x)$ функсијасынын гијмәтләрини һесаблајаг:

$$f(1{,}1) = -0{,}8359; \quad f(1{,}2) = -0{,}5264;$$

$$f(1{,}3) = -0{,}0439; \quad f(1{,}4) = 0{,}6416; \ \ldots$$

Демәли, тәнлијин көкү 1,3 илә 1,4 арасында јерләшир. Бу араны да 1,30; 1,31; 1,32; 1,33; 1,34; ... нөгтәләри илә јенидән 10 бәрабәр

һиссәјә бөләк. Һәмин нөгтәләрдә функсијанын гијмәтләри $f(1,30) = -0,0439$;

$$f(1,31) = 0,0149; \quad f(1,32) = 0,0759; \ ...$$

олдуғундан (2) тәнлијинин көкү 1,30 илә 1,31 арасында јерләшир. Беләликлә, һәмин көкү 0,01 дәгигликлә тапмыш олуруг.

Инди

$$4^x - 8x = 0 \qquad (3)$$

тәнлијини тәдгиг едәк. $x=2$ әдәди (3) тәнлијинин көкүдүр. Бу тәнлијин башга көкү дә вармы? Вардыр.

$$f(x) = 4^x - 8x$$

функсијасы $x=0$ нөгтәсиндә мүсбәт $f(0)=1$, $x=\frac{1}{2}$ нөгтәсиндә исә мәнфи $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2<0$ гијмәтини алыр. Онда $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ парчасында $f(x)$ функсијасынын сыфры олар, јә'ни (3) тәнлијинин 0 вә $\frac{1}{2}$ әдәдләри арасында јерләшән көкү вардыр.

Кәсилмәјән функсијаларын хассәләриндән бәрабәрсизликләрин һәллиндә дә истифадә олунур.

Тутаг ки,

$$f(x) > 0 \qquad (4)$$

бәрабәрсизлијинин һәр һансы (a, b) интервалында вә јахуд әдәд охунда һәллини тапмаг лазымдыр. Бу мәгсәдлә $y = f(x)$ функсијасынын бүтүн сыфырларыны вә кәсилмә нөгтәләрини (a, b) интервалында гејд едәк. Һәмин $x_1, x_2, ..., x_m$ нөгтәләри интервалы (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_m, b) кими һиссәләрә бөләр. Бу һиссәләрин һәр бириндә кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы өз ишарәсини сахлајыр (§ 3, теорем 2). $f(x)$ функсијасы бу кичик интервалларын һансында мүсбәт гијмәтләр алырса, һәмин интерваллар (4) бәрабәрсизлијинин һәлли олар. Буну

Шәкил 139.

$$\frac{x^2-5x+6}{x-1} > 0 \qquad (5)$$

бәрабәрсизлијинин әдәд охунда һәлли үзәриндә изаһ едәк.

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-1} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-1}$$

функсијасынын сыфырлары $x=2$, $x=3$ нөгтәләри, кәсилмә нөгтәси исә $x=1$-дир. $x_1=1$, $x_2=2$ вә $x_3=3$ нөгтәләрини әдәд оху үзәриндә гејд едәк (139-чу шәкил). Бу нөгтәләр әдәд охуну $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ вә $(3, \infty)$ кими һиссәләрә бөлүр. Бу һиссәләрин анҹаг икисиндә $f(x)$ функсијасы мүсбәт гијмәтләр алыр. Демәли, (5) бәрабәрсизлијинин һәлли $(1, 2)$ вә $(3, \infty)$ интерваллары чохлуғудур.

§ 10. ФУНКСИЈАЛАРЫН МҮНТӘЗӘМ КӘСИЛМӘЗЛИЈИ

Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы X чохлуғунда тә'јин олунмушдур. Функсијанын X чохлуғунда кәсилмәјән олмасы о демәкдир ки, $f(x)$ функсијасы бу чохлуғун һәр бир $x_0 \in X$ нөгтәсиндә кәсилмәјәндир, јә'ни верилмиш ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta>0$ вар ки, x-ин $|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ бәрабәрсизлији өдәнилир. Ајдындыр ки, бу тә'рифдә верилмиш ε-на көрә сечилән $\delta>0$ әдәди тәкҹә ε-дан дејил, бахылан x_0 нөгтәсиндән дә асылыдыр: $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$.

ε әдәди верилдикдә бир x_0 нөгтәси үчүн сечилән $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$ әдәди башга x_0' нөгтәси үчүн сечилән $\delta'=\delta'(\varepsilon, x_0')$ әдәдиндән фәргли ола биләр. Бу заман x_0 нөгтәси үчүн сечилмиш $\varepsilon>0$ әдәди x_0' нөгтәси үчүн јарамаз. Үмумијјәтлә, верилмиш $\varepsilon>0$ әдәди сабит сахланылдыгда x_0-ын дәјишмәси илә сечилән $\delta=\delta(\varepsilon, x_0)$ әдәди дә дәјишилир.

Бурада ики һал мүмкүндүр: ја ејни бир $\varepsilon>0$ әдәди вә X чохлуғунун бүтүн нөгтәләри үчүн јарајан бир δ әдәди сечмәк мүмкүндүр, јахуд да $\varepsilon>0$ әдәди верилдикдә (бүтүн нөгтәләр үчүн ејни олан) X чохлуғунун бүтүн нөгтәләри үчүн јарајан бир δ әдәди сечмәк мүмкүн дејилдир. Биринҹи һалда $f(x)$ функсијасына X чохлуғунда мүнтәзәм кәсилмәјән функсија дејилир.

Тә'риф. *$y=f(x)$ функсијасына X чохлуғунда о заман мүнтәзәм кәсилмәјән функсија дејилир ки, верилмиш ихтијари $\varepsilon>0$ әдәдинә гаршы елә $\delta>0$ әдәди (чохлуғун нөгтәләриндән асылы олмајан) вар ки, x-ин $|x'-x''|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари x' вә x'' гијмәтләриндә $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ бәрабәрсизлији өдәнилир.*

Беләликлә, функсијанын кәсилмәзлији ону нөгтәдә характеризә етдији һалда, мүнтәзәм кәсилмәзлији функсијаны бүтүн X чохлуғу үзәриндә характеризә едир.

Ајдындыр ки, $f(x)$ функсијасы X чохлуғунда мүнтәзәм кәсилмәјән олдугда һәмин чохлуғун һәр бир нөгтәсиндә дә кәсилмәјән олар, јә'ни X чохлуғунда кәсилмәјән олар. Лакин бу тәклифин тәрси доғру дејилдир: X чохлуғунда кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы һәмин чохлугда мүнтәзәм кәсилмәјән олмаја да биләр.

Теорем (Кантор теореми). ***Парчада кәсилмәјән функсија һәмин парчада мүнтәзәм кәсилмәјәндир.***

1349—21

Демәли, функсијанын парчада кәсилмәзлији анлајышы илә парчада мүнтәзәм кәсилмәзлији анлајышы ејнидир. Лакин бу хассә интервал вә јарыминтервал үчүн доғру дејилдир.

Мәсәлән, $f(x)=\frac{1}{x}$ функсијасы $(0, 1)$ интервалында кәсилмәјәндир, лакин һәмин интервалда мүнтәзәм кәсилмәјән дејилдир (јохламалы).

XIV ФӘСИЛ

ТӨРӘМӘ

§ 1. ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ

Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы (a, b) интервалында тә'јин олунмушдур вә x, бу интервалын гејд олунмуш нөгтәсидир: $x\in(a, b)$. Аргументин x нөгтәсиндә алдығы $h=\Delta x$ артымына функсијанын ујғун артымы

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x), \quad x+\Delta x\in(a, b)$$

олар. $\Delta x\neq 0$ олдуғуну ғәбул едәрәк, функсија артымынын аргументин ујғун артымына нисбәтини дүзәлдәк:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Аргументин x гијмәти гејд олундуғундан (1) нисбәти $h=\Delta x$ кәмијјәтиндән асылыдыр. Һәмин нисбәт $h=0$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында ($h=0$ нөгтәсинин өзү мүстәсна олмагла) тә'јин олундуғундан $h=\Delta x\to 0$ олдугда һәмин нисбәтин лимитиндән данышмаг олар.

Тә'риф 1. *Әкәр $\Delta x\to 0$ шәртиндә (1) нисбәтинин сонлу лимити варса, онда һәмин лимитә $y=f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндә төрәмәси дејилир.*

Төрәмәни y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y'_x вә ја $\frac{df(x)}{dx}$ илә ишарә едирләр:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)=y'=\frac{df(x)}{dx}=\ldots \tag{2}$$

Лагранж[1] төрәмәни y' вә јахуд $f'(x)$ илә, Лејбнис[2] исә $\frac{dy}{dx}$ вә јахуд $\frac{df(x)}{dx}$ илә ишарә етмишдир.

---

[1] Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) мәшһур франсыз ријазијјатчысы вә механикидир.

[2] Готфрид Вилһелм Лејбнис (1646—1716) алман философу вә ријазијјатчысыдыр.

Әкәр $t=x+\Delta x$ илә ишарә етсәк, онда $\Delta x=t-x$ вә (2) бәрабәрлијини, јә'ни x нөгтәсиндә төрәмәнин тә'рифини

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'(x) \tag{3}$$

шәклиндә јаза биләрик. Төрәмәнин тә'рифини (3) шәклиндә јазмаг бә'зән даһа мүнасиб олур. Буна көрә дә кәләчәкдә, биз төрәмәнин тә'рифи олараг (2) вә (3) бәрабәрликләриндән јери кәлдикчә истифадә едәчәјик.

Верилмиш x нөгтәсиндә ($x\in(a, b)$) төрәмәси олан функсијаја һәмин нөгтәдә *диференсиалланан* (вә јахуд диференсиаллана билән) *функсија* дејилир. (a, b) интервалынын һәр бир нөгтәсиндә төрәмәси олан функсија һәмин интервалда диференсиаллана билән функсија адланыр.

$y=f(x)$ функсијасына $[a, b]$ парчасында бахдыгда парчанын a вә b уч нөгтәләриндә онун биртәрәфли төрәмәләриндән данышмаг лазымдыр.

Тә'риф 2. *(1) нисбәтинин $\Delta x\to 0$ шәртиндә сонлу сол (сағ) лимити варса, һәмин лимитә $f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндә сол (сағ) төрәмәси дејилир вә*

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x<0)}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'_-(x)$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x>0)}}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'_+(x)\right)$$

илә ишарә олунур.

Биртәрәфли лимитләр һаггындакы теоремә (XII, § 10) көрә $f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндә төрәмәсинин олмасы үчүн һәмин нөгтәдә $f(x)$ функсијасынын сонлу сол $f'_-(x)$ вә сағ $f'_+(x)$ төрәмәләринин варлығы вә бәрабәр олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Демәли, x нөгтәсиндә төрәмәси олан $f(x)$ функсијасы үчүн

$$f'(x)=f'_-(x)=f'_+(x).$$

Ола биләр ки, функсијанын верилмиш нөгтәдә һәм сонлу сол, һәм дә сонлу сағ төрәмәси олсун, лакин һәмин нөгтәдә төрәмәси олмасын. Мәсәлән, $f(x)=|x|$ функсијасынын $x=0$ нөгтәсиндә сонлу сол вә сағ төрәмәләри вар:

$$f'_-(0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x<0)}}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x<0)}}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}1=-1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x>0)}} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta x>0)}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1.$$

Лакин $f(x)$ функсијасынын $x = 0$ нөгтәсиндә төрәмәси јохдур:

$$f'_-(0) \neq f'_+(0).$$

Функсијанын төрәмәсини тапмаг әмәлинә һәмин *функсијанын диференсиалланмасы* дејилир.

Мисал 1. $f(x) = C$ (һәр јердә ејни гијмәт алан функсија) оларса, онда $f'(x) = 0$, јә'ни сабитин төрәмәси сыфра бәрабәрдир.

Доғрудан да, $f(x)=C$, $f(x+\Delta x)=C$ олдуғундан

$$f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$$

вә

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Бурадан

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0.$$

Мисал 2. $f(x)=x$ функсијасынын төрәмәси ваһидә бәрабәрдир:

$$f'(x) = x' = 1.$$

Буну исбат етмәк үчүн аргументин верилмиш Δx артымына функсијанын ујғун артымыны тапаг:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x) - x = \Delta x.$$

Бурадан:

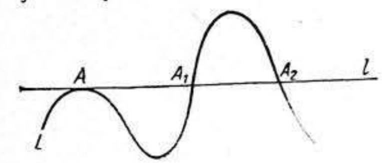
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

вә

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1,$$

§ 2. ТОХУНАН. ТӨРӘМӘНИН ҺӘНДӘСИ МӘ'НАСЫ

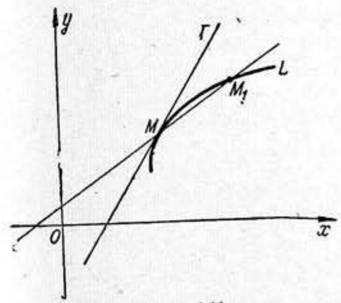
Елементар һәндәсә курсунда чеврәјә тохунаны, һәмин чеврә илә анчаг бир ортаг нөгтәси олан дүз хәтт кими тә'риф едирләр. Бу тә'риф истәнилән әјри үчүн јарамыр, чүнки верилмиш әјринин һәр һансы A нөгтәсиндә она тохунан дүз хәттин, әјри илә бир нечә ортаг нөгтәси дә ола биләр. Бу, 140-чы шәкилдән ајдындыр. L әјрисинә A нөгтәсиндә тохунан l дүз хәттинин һәмин әјри илә A_1 вә A_2 кими башга ортаг нөгтәләри дә вардыр.



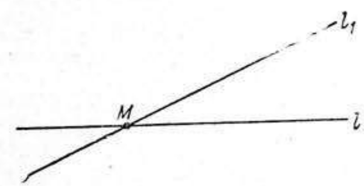
Шәкил 140.

Инди верилмиш әјринин һәр һансы нөгтәсиндә тохунанын тә'рифини верәк.

Бу мәгсәдлә ихтијари L әјриси вә бунун үзәриндә бир M нөгтәси көтүрәк (141-чи шәкил). L әјрисинин ихтијари M_1 вә M нөгтәсиндән MM_1 кәсәнини чәкәк. M_1 нөгтәси L әјриси бојунча өз јерини дәјишдикдә MM_1 кәсәни дә, үмумијјәтлә, M нөгтәси әтрафында өз вәзијјәтини дәјишәр. M_1 нөгтәси L әјриси бојунча M нөгтәсинә јахынлашдыгда MM_1 кәсәни мүәјјән MT лимит вәзијјәтинә јахынлашырса, кәсәнин һәмин лимит вәзијјәтинә M нөгтәсиндә L әјрисинә *тохунан* дејилир.



Шәкил 141.



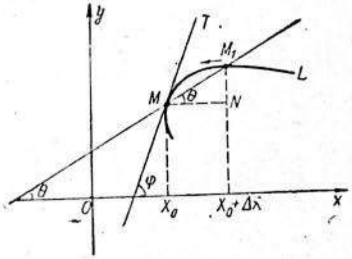
Шәкил 142.

Гејд едәк ки, M нөгтәсиндән кечән тәрпәнмәз l дүз хәттинә һәмин нөгтәдән кечән һәрәкәт едән l_1 дүз хәттинин о заман лимит вәзијјәти дејилир ки, һәрәкәт заманы һәмин дүз хәтләр арасындакы бучаг сыфыра јахынлашсын (142-чи шәкил).

Чеврәјә тохунанын тә'рифи бу үмуми тә'рифин хүсуси һалыдыр.

Мә'лумдур ки, дүз хәттин, абсис охунун мүсбәт истигамәти илә әмәлә кәтирдији бучағын тангенсинә һәмин дүз хәттин *бучаг әмсалы* дејилир.

Инди тәнлији верилмиш L әјрисинин M нөгтәсиндә тохунанынын бучаг әмсалыны тә'јин едәк. Бу мәгсәдлә фәрз едәк ки, x_0 нөгтәсиндә диференсиалланан $y=f(x)$ функсијасы L әјрисинин тәнлијидир. M нөгтәсинин абсиси x_0, M_1 нөгтәсинин абсиси $x_0+\Delta x$ олсун (143-чү шәкил). Онда:



Шәкил 143.

$$NM_1 = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x),$$

MN исә аргументин Δx артымыдыр. Шәкилдән ајдындыр ки, MM_1 кәсәнинин бучаг әмсалы

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{NM_1}{MN}$$

вә јахуд

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

бурадан

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Ајдындыр ки, M_1 нөгтәси әјри бојунча M нөгтәсинә јахынлашдыгда Δx кәмијјәти дә сыфра јахынлашыр: $\Delta x\to 0$. Бунун тәрси дә доғрудур. $\Delta x\to 0$ олдугда M_1 нөгтәси дә M нөгтәсинә јахынлашыр. Демәли,

$$\lim_{M_1\to M}\theta = \lim_{\Delta x\to 0}\theta = \lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

$f'(x_0)$ төрәмәсинин варлығындан вә $u=\operatorname{arc\,tg}x$ функсијасынын кәсилмәзлијиндән алыныр ки, (1) лимити вар вә

$$\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\theta=\lim_{\Delta x\to 0}\operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\operatorname{arc\,tg}f'(x_0) \qquad (2)$$

бәрабәрлији доғрудур. Бу о демәкдир ки, M_1 нөгтәси әјри үзрә M нөгтәсинә јахынлашдыгда M_1M кәсәни MT лимит вәзијјәтинә јахынлашыр (јә'ни, L әјрисинин M нөгтәсиндә тохунаны вар) вә бу лимит вәзијјәтинин (MT тохунанынын) бучаг әмсалы

$$\kappa=\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0) \qquad (3)$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур.

Бурадан төрәмәнин һәндәси мә'насы да алыныр: $y=f(x)$ *функсијасынын x_0 нөгтәсиндә $f'(x_0)$ төрәмәси функсијанын графики олан әјријә $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын бучаг әмсалына бәрабәрдир:* $\kappa=f'(x_0)$.

Инди L әјрисинә $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәсиндә чәкилмиш MT тохунанынын тәнлијини јазмаг олар. Мә'лумдур ки, $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәсиндән кечән вә бучаг әмсалы $\kappa_т = f'(x_0)$ олан MT дүз хәттинин тәнлији

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

шәклиндә јазылар. Онда $y_0=f(x_0)$ оларса, тохунанын тәнлији

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \qquad (4)$$

олачагдыр.

L әјрисинин M нөгтәсиндәки тохунанына һәмин нөгтәдә перпендикулјар олан дүз хәттә әјринин *нормалы* дејилир. Бу нормалын бучаг әмсалыны ики дүз хәттин перпендикулјар олмасы шәртиндән тапмаг олар:

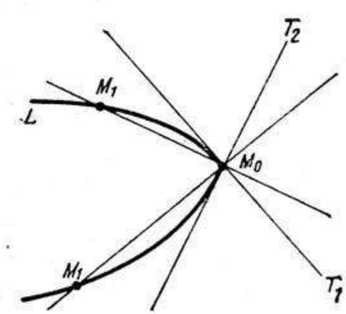
$$\kappa_н=-\frac{1}{\kappa_т}=-\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Онда L әјрисинин $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәсиндәки нормалынын тәнлији

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

шәклиндә јазылар.

Гејд едәк ки, әјринин (һәтта кәсилмәз әјринин) бир чох нөгтәләриндә тохунаны олмаја да биләр. Буна M_0 нөгтәсиндә мүәјјән бучаг әмәлә кәтирән L әјриси мисал ола биләр (144-чү шәкил). Бу әјринин M_0 нөгтәсиндә тохунаны јохдур, чүнки M_1M_0 кәсәни, M_1 нөгтәси әјри үзрә M_0 нөгтәсинә јахынлашдыгда јеканә лимит вәзијјәтинә јахынлашмыр. M_1 нөгтәсинин әјринин һансы голу үзәриндә јерләшмәсиндән асылы олараг M_1M_0 кәсәни ја M_0T_1 лимит вәзијјәтинә, ја да M_0T_2 лимит вәзијјәтинә јахынлашыр (M_0T_1 вә M_0T_2 дүз хәтләри әјринин M_0 нөгтәсиндә *биртәрәфли тохунанлары* адланыр). Бу исә M_0 нөгтәсиндә әјринин тохунаны олмадығыны көстәрир.



Шәкил 144.

§ 3. ТӨРӘМӘНИН МЕХАНИКИ МӘ'НАСЫ

Һәр һансы чисмин дүзхәтли дәјишәнсүр'әтли һәрәкәтинә бахаг. Бу чисмин өлчүләрини вә шәклини нәзәрә алмајараг ону нөгтә һесаб етмәк олар.

Мә'лумдур ки, һәрәкәт едән нөгтәнин кетдији јол замандан асылыдыр: $s=s(t)$. Бу $s=s(t)$ функсијасына *нөгтәнин һәрәкәт*

гануну дејилир. Нөгтәнин t вахтда кетдији јол $s(t)$, $t+\Delta t$ вахтда кетдији јол $s(t+\Delta t) = s(t) + \Delta s$ оларса, онда нөгтә Δt вахтда Δs мәсафәсини кетмиш олар (145-чи шәкил).

Бу һалда

$$v_{\text{орта}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \tag{1}$$

нисбәти, нөгтәнин t анындан $t+\Delta t$ анына гәдәр мүддәтдәки һәрәкәтинин орта сүр'әтинә бәрабәр олар. Ајдын мәсәләдир ки, (1) орта сүр'әти нөгтәнин t анындакы сүр'әтини характеризә едә билмәз. Лакин Δt заман фасиләсини чох кичик көтүрсәк, онда орта сүр'әт t анындакы сүр'әтә чох јахын олар. Буна көрә дә (1) орта сүр'әтинин $\Delta t \to 0$-да лимити чисмин t анындакы сүр'әти адланыр вә

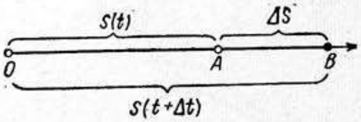
$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} \tag{2}$$

илә ишарә олунур. Төрәмәнин тә'рифинә көрә (2) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи $s(t)$ функсијасынын t дәјишәнинә нәзәрән төрәмәсидир:

$$v(t) = s'(t). \tag{3}$$

Бурадан төрәмәнин механики мә'насы алыныр: һәрәкәт едән нөгтәнин сүр'әти кедилән мәсафәнин замана көрә төрәмәсинә бәрабәрдир.

Нөгтәнин дәјишәнсүр'әтли һәрәкәтинин сүр'әти замандан асылыдыр: $v = v(t)$. Һәрәкәт едән нөгтәнин сүр'әти t анындан $t+\Delta t$ анына гәдәр олан мүддәтдә



Шәкил 145.

$$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$$

гәдәр дәјишәр. Бу һалда

$$a_{\text{орта}} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

нисбәтинә Δt заман фасиләсиндә *һәрәкәтин орта тә'чили* дејилир.

Орта тә'чилин $\Delta t \to 0$ шәртиндә лимити һәрәкәтин t анындакы тә'чили адланыр вә

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = v'(t) \tag{4}$$

илә ишарә олунур. Демәли, *һәрәкәт едән нөгтәнин тә'чили онун сүр'әтинин замана көрә төрәмәсинә бәрабәрдир.*

Апардығымыз мүһакимәдән ајдын олур ки, $y = f(x)$ функсијасы замандан асылы һәр һансы просеси кәмијјәтчә характеризә

едирсә, онда $y' = f'(t)$ функсијасы просесин t анындакы дәјишмә сүр'әтини көстәрир.

Үмумијјәтлә, $y = f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндә төрәмәси функсијанын верилмиш нөгтәдә *дәјишмә сүр'әти* адланыр.

Мисал 1. $y = f(x) = ax + b$ хәтти функсијасынын дәјишмә сүр'әтини тапмалы.

Бу мәсәләдә $f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндә төрәмәсини һесабламаг лазымдыр. Аргументә x нөгтәсиндә Δx артымыны версәк, функсија

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = [a(x+\Delta x)+b] - ax - b = a\Delta x$$

вә јахуд

$$\Delta y = a\cdot\Delta x$$

артымыны алар. Бурадан

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

вә ја

$$f'(x) = a.$$

Демәли, $f(x) = ax + b$ хәтти функсијасынын дәјишмә сүр'әти бүтүн нөгтәләрдә сабит олуб a әдәдинә бәрабәрдир.

§ 4. КӘСИЛМӘЗЛИКЛӘ ДИФЕРЕНСИАЛЛАНМАНЫН ӘЛАГӘСИ

Фәрз едәк ки, $y = f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмушдур, x исә бу парчанын һәр һансы дахили нөгтәсидир.

Теорем. ***x нөгтәсиндә диференсиалланан $y = f(x)$ функсијасы һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндир.***

Доғрудан да, төрәмәнин тә'рифинә көрә

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

олдуғундан, мә'лум теоремә (XII, § 12) әсасән:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

бурада

$$\alpha = \alpha(\Delta x) \quad \text{вә} \quad \lim_{\Delta x\to 0} \alpha = 0.$$

Бурадан функсијанын

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

артымы үчүн

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \tag{1}$$

бәрабәрлијини аларыг. (1) бәрабәрлијиндән

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

мүнасибәти алыныр, бу исә функсијанын x нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғуну көстәрир.

Теоремин исбатындан ајдындыр ки, $f(x)$ функсијасынын парчанын сол уч нөгтәси олан $x=a$ нөгтәсиндә сағ төрәмәси варса, онда һәмин нөгтәдә о сағдан кәсилмәјән, сағ уч нөгтәси олан $x=b$ нөгтәсиндә сол төрәмәси олдугда исә һәмин нөгтәдә солдан кәсилмәјән олар.

Гејд. Теоремин тәрси доғру дејилдир, верилмиш x нөгтәсиндә кәсилмәјән функсијанын һәмин нөгтәдә төрәмәси олмаја да биләр. Мәсәлән, $f(x) = |x|$ функсијасы $x = 0$ нөгтәсиндә кәсилмәјәндир, лакин һәмин нөгтәдә төрәмәси јохдур (§ 1).

Бурадан ајдындыр ки, верилмиш нөгтәдә функсијанын кәсилмәјән олмасы һәмин нөгтәдә онун диференсиалланан олмасы үчүн зәрури шәртдир, лакин кафи дејилдир. Демәли, функсијанын кәсилмә нөгтәсиндә төрәмәси ола билмәз.

§ 5. ЧӘМИН, ҺАСИЛИН ВӘ НИСБӘТИН ТӨРӘМӘСИ

Теорем 1. ***Верилмиш $t=x$ нөгтәсиндә диференсиалланан сонлу сајда $f_к(t)$ $(к = 1, 2, ..., n)$ функсијаларынын чәми дә һәмин нөгтәдә диференсиалланандыр вә чәмин төрәмәси топлананларын төрәмәләри чәминә бәрабәрдир:***

$$\left(\sum_{к=1}^{n} f_к(x)\right)' = \sum_{к=1}^{n} f_к'(x). \tag{1}$$

Исбаты. Функсијаларын чәмини

$$\Phi(t) = \sum_{к=1}^{n} f_к(t)$$

илә ишарә етсәк,

$$\frac{\Phi(t)-\Phi(x)}{t-x} = \frac{\sum\limits_{к=1}^{n} f_к(t) - \sum\limits_{к=1}^{n} f_к(x)}{t-x} = \sum_{к=1}^{n} \frac{f_к(t)-f_к(x)}{t-x}$$

мүнасибәтиндән чәмин лимити һаггындакы теоремә (XII, § 13) әсасән

$$\lim_{t\to x} \frac{\Phi(t)-\Phi(x)}{t-x} = \sum_{к=1}^{n} \lim_{t\to x} \frac{f_к(t)-f_к(x)}{t-x} \tag{2}$$

бәрабәрлијини аларыг. Шәртә көрә

$$\lim_{t\to x} \frac{f_к(t)-f_к(x)}{t-x} = f_к'(x) \quad (к=1, 2, ..., n)$$

олдуғундан (2) бәрабәрлијиндән

$$\Phi'(x) = \sum_{к=1}^{n} f_к'(x)$$

мүнасибәти вә јахуд тәләб олунан (1) бәрабәрлији алыныр.

Теорем 2. ***Верилмиш $t = x$ нөгтәсиндә диференсиалланан $f(t)$ вә $\varphi(t)$ функсијаларынын һасили дә һәмин нөгтәдә диференсиалланандыр вә һасилин төрәмәси ашағыдакы гајда илә һесабланыр:***

$$(f(x)\varphi(x))' = f'(x)\cdot\varphi(x) + f(x)\varphi'(x). \tag{3}$$

Исбаты. Әкәр функсијаларын һасилини

$$F(t) = f(t)\cdot\varphi(t)$$

илә ишарә етсәк, онда:

$$\frac{F(t)-F(x)}{t-x} = \frac{f(t)-f(x)}{t-x}\cdot\varphi(t) + f(x)\,\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x}.$$

Бурадан $t\to x$-да чәмин вә һасилин лимити һаггындакы теоремләрә (XII, § 13) вә диференсиалланан функсијанын кәсилмәјән олмасына (§ 4) әсасән

$$F'(x) = f'(x)\cdot\varphi(x) + f(x)\cdot\varphi'(x)$$

мүнасибәтини вә ја (3) бәрабәрлијини аларыг.

Нәтиҹә 1. Сабит вуруғу төрәмә ишарәси харичинә чыхармаг олар:

$$(Cf(x))' = Cf'(x). \tag{4}$$

Доғрудан да, $C' = 0$ олдуғундан

$$(Cf(x))' = C'\cdot f(x) + Cf'(x) = Cf'(x).$$

Нәтиҹә 2. Верилмиш $t=x$ нөгтәсиндә диференсиалланан $f(t)$ вә $\varphi(t)$ функсијаларынын фәрги дә һәмин нөгтәдә диференсиалланандыр вә функсијаларын фәргинин төрәмәси онларын төрәмәләри фәргинә бәрабәрдир:

$$(f(x) - \varphi(x))' = f'(x) - \varphi'(x). \tag{5}$$

Доғрудан да,

$$(f(x)-\varphi(x))'=[f(x)+(-1)\varphi(x)]'=f'(x)+((-1)\cdot\varphi(x))'=$$
$$=f'(x)+(-1)\varphi'(x)=f'(x)-\varphi'(x).$$

Гејд. *Верилмиш $t=x$ нөгтәсиндә диференсиалланан сонлу сајда $f_к(t)$ $(к=1, 2, ..., n)$ функсијаларынын һасили дә һәмин нөгтәдә диференсиалланандыр вә һасилин төрәмәси ашағыдакы гајда илә һесабланыр:*

$$(\prod_{к=1}^{n} f_к(x))'=f_1'(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_n(x)+f_1(x)\cdot f_2'(x)\cdot f_3(x)\cdot...\cdot f_n(x)+$$
$$+...+f_1(x)\cdot...\cdot f_{n-1}(x)\cdot f'_n(x). \quad (6)$$

Бурадан

$$f_1(x)=f_2(x)=...=f_n(x)=f(x)$$

олдугда

$$([f(x)]^n)'=n\,[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$$

алыныр.

Теорем 3. ***Верилмиш $t=x$ нөгтәсиндә диференсиалланан $f(t)$ вә $\varphi(t)$ функсијаларынын нисбәти $\varphi(t)\neq 0$ олдугда һәмин нөгтәдә диференсиалланандыр вә нисбәтин төрәмәси ашағыдакы гајда илә һесабланыр:***

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)'=\frac{f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}. \quad (7)$$

Исбаты. Верилмиш функсијаларын

$$F(t)=\frac{f(t)}{\varphi(t)}$$

нисбәти үчүн

$$\frac{F(t)-F(x)}{t-x}=\frac{1}{\varphi(t)\cdot\varphi(x)}\left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\cdot\varphi(x)-f(x)\;\frac{\varphi(t)-\varphi(x)}{t-x}\right]$$

бәрабәрлијини јазмаг олар. Ахырынчы бәрабәрликдә $t\to x$ шәртиндә лимитә кечсәк вә лимитләр һаггындакы әсас теоремләри (XII, § 13) вә диференсиалланан функсијанын кәсилмәјән олдуғуну (§ 4) нәзәрә алсаг:

$$\lim_{t\to x}\frac{F(t)-F(x)}{t-x}=\frac{f'(x)\cdot\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$$

вә јахуд

$$F'(x)=\frac{f'(x)\varphi(x)-f(x)\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}.$$

Бурадан (7) бәрабәрлијинин доғрулуғу ајдындыр.

Нәтиҹә. C сабит әдәд олдугда

$$\left(\frac{f(x)}{C}\right)'=\frac{f'(x)}{C},\qquad \left(\frac{C}{f(x)}\right)'=-\frac{Cf'(x)}{f^2(x)} \quad (8)$$

бәрабәрликләри доғру олар.

§ 6. МҮРӘККӘБ ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ

Тутаг ки, $y=f(x)$ вә $x=\varphi(t)$ функсијалары вә һәмин функсијалар васитәсилә дүзәлмиш $y=f[\varphi(t)]$ мүрәккәб функсијасы верилмишдир (XI, § 13). $y=f(x)$ вә $x=\varphi(t)$ функсијалары диференсиалланан олдугда $y=f[\varphi(t)]$ мүрәккәб функсијасы һаггында нә демәк олар?

Теорем. *$x=\varphi(t)$ функсијасы t_0 нөгтәсиндә вә $y=f(x)$ функсијасы ујғун $x_0=\varphi(t_0)$ нөгтәсиндә диференсиалланан олдугда $y=f[\varphi(t)]$ мүрәккәб функсијасы t_0 нөгтәсиндә диференсиалланандыр вә онун төрәмәси*

$$(f[\varphi(t_0)])'=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) \quad (1)$$

дүстуру илә һесабланыр[1].

Исбаты. Төрәмәнин тә'рифинә көрә

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}=\varphi'(t_0)+\alpha(t),\quad \lim_{t\to t_0}\alpha(t)=0$$

вә ја

$$x-x_0=\varphi(t)-\varphi(t_0)=(t-t_0)[\varphi'(t_0)+\alpha(t)] \quad (2)$$

бәрабәрлијини јазмаг олар. Белә бәрабәрлији $y=f(x)$ функсијасы үчүн дә јазаг:

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)[f'(x_0)+\beta(x)],\ \lim_{x\to x_0}\beta(x)=0. \quad (3)$$

(2) вә (3) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг:

$$f[\varphi(t)]-f[\varphi(t_0)]=f(x)-f(x_0)=$$
$$=(x-x_0)[f'(x_0)+\beta(x)]=$$
$$=(t-t_0)[\varphi'(t_0)+\alpha(t)][f'(x_0)+\beta(x)].$$

$x=\varphi(t)$ функсијасы t_0 нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғундан һәмин нөгтәдә кәсилмәјәндир. Буна көрә дә $t\to t_0$ шәртиндә $x\to x_0$ вә

$$\lim_{t\to t_0}\beta(x)=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0.$$

[1] Бурада $(f[\varphi(t_0)])'$ илә $y=f[\varphi(t)]$ мүрәккәб функсијасынын t_0 нөгтәсиндә төрәмәси ишарә олунмушдур.

Буну нәзәрә алараг

$$\frac{f[\varphi(t)]-f[\varphi(t_0)]}{t-t_0}=[\varphi'(t_0)+\alpha(t)][f'(x_0)+\beta(x)]$$

бәрабәрлијиндә $t\to t_0$ шәртиндә лимитә кечсәк

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f[\varphi(t)]-f[\varphi(t_0)]}{t-t_0}=\varphi'(t_0)\cdot f'(x_0)$$

мүнасибәтини аларыг, бу да (1) бәрабәрлијинин доғру олдуғуну көстәрир.

$y=f[\varphi(t)]$ мүрәккәб функсијасынын диференсиалланма гајдасыны, јә'ни (1) бәрабәрлијини бә'зән

$$y_t'=y_x'\cdot x_t' \qquad (4)$$

шәклиндә јазырлар.

§ 7. ТӘРС ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ

Фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш, кәсилмәјән вә артан (вә ја азалан) функсијадыр. Онда $[c, d]$ парчасында ($f(x)$ функсијасынын гијмәтләр чохлуғунда) онун $x=\varphi(y)$ тәрс функсијасы вар (XI, §14) вә кәсилмәјәндир (XIII, § 4). Верилмиш $y=f(x)$ функсијасы диференсиалланан олдугда онун тәрс функсијасы һаггында нә демәк олар?

Теорем. ***$y=f(x)$ функсијасы $x=x_0$ нөгтәсиндә диференсиалланандырса вә $f'(x_0)\neq 0$ оларса, онда онун тәрс функсијасы $x=\varphi(y)$ ујғун y_0 нөгтәсиндә $(y_0=f(x_0))$ диференсиалланандыр вә онун төрәмәси***

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)} \qquad (1)$$

дүстуру илә һесабланыр.

Исбаты. Әввәлчә гејд едәк ки, тәрс функсијанын тә'рифинә көрә

$$y=f(x),\quad x=\varphi(y),\quad \varphi(y_0)=x_0,\quad y_0=f(x_0)$$

бәрабәрликләри доғрудур. Онда тәрс функсија үчүн

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

бәрабәрлијини јазмаг олар. Тәрс функсија кәсилмәјән олдуғундан (XIII, § 4) $y\to y_0$ шәртиндә $x\to x_0$ олур. Буна көрә дә:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\varphi(y)-\varphi(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)},$$

јә'ни (1) дүстуру доғрудур. Бу дүстуру

$$x_y'=\frac{1}{y_x'} \qquad (2)$$

шәклиндә дә јазмаг олар.

§ 8. ӘСАС ЕЛЕМЕНТАР ФУНКСИЈАЛАРЫН ТӨРӘМӘСИ

1. $y=\log_a x\,(0<a\neq 1)$ логарифмик функсијасынын төрәмәси

Логарифмик функсијанын төрәмәсини һесабламаг үчүн әввәлчә фәрз едәк ки, x мүсбәтдир. x аргументи Δx артымы алдыгда y функсијасы да ујғун олараг

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

артымыны алар. Бурадан:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

$\alpha=\dfrac{x}{\Delta x}$ гәбул етсәк, ахырынчы ифадәни

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

шәклиндә јазмаг олар. Ајдындыр ки, $\Delta x\to 0$ шәртиндә $\dfrac{x}{\Delta x}\to\infty$, јә'ни $\Delta x\to 0$ шәртиндә α кәмијјәти ∞-а јахынлашыр. Онда:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

вә

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e$$

олдуғуну (XII, § 5) нәзәрә алсаг:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

Демәли,

$$y'=\frac{1}{x}\log_a e$$

вә јахуд

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e \qquad (1)$$

мүнасибәти доғрудур. Хүсуси һалда, $a=e$ көтүрсәк:

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Бурадан көрүнүр ки, натурал логарифм үчүн төрәмә дүстуру даһа садә шәкилдәдир.

Инди $y=\ln|x|$ функсијасынын төрәмәсини һесаблајаг. Бу функсија x-ин сыфырдан фәргли бүтүн гијмәтләриндә тә'јин олунмушдур:

$$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$$

вә $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $[\ln(-x)]'=\frac{(-x)'}{-x}=\frac{1}{x}$ (мүрәккәб функсијанын төрәмәси кими) олдуғундан

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x} \qquad (3)$$

дүстуруну аларыг.

$$\log_a|x|=\frac{\ln|x|}{\ln a}$$

дүстуруну нәзәрә алсаг, онда:

$$(\log_a|x|)'=\frac{1}{x\ln a}. \qquad (4)$$

2. Логарифмик төрәмә

Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы диференсиалланандыр вә бахылан нөгтәдә сыфыра чеврилмир. Онда мүрәккәб функсијанын диференсиалланмасы гајдасына (§ 6) вә (3) дүстуруна әсасән $y=\ln|f(x)|$ функсијасынын төрәмәсини һесабламаг олар $(u=f(x))$:

$$y'=[\ln|f(x)|]'=(\ln|u|)'\cdot u'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

вә јахуд

$$[\ln|f(x)|]'=\frac{f'(x)}{f(x)}. \qquad (5)$$

(5) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки $\frac{f'(x)}{f(x)}$ кәсринә $f(x)$ *функсијасынын логарифмик төрәмәси* дејилир. Ајдындыр ки, функсијанын логарифмик төрәмәси мә'лум олдугда (5) дүстуру васитәсилә өзүнүн төрәмәсини тапмаг олар:

$$f'(x)=f(x)\cdot[\ln|f(x)|]'. \qquad (6)$$

Функсија төрәмәсинин бу јолла тапылмасына *логарифмик диференсиаллама үсулу* дејилир.

Логарифмик диференсиаллама үсулу илә функсијаларын төрәмәсини һесабладыгда, садә олмаг үчүн кәләчәкдә модул ишарәсини јазмајачағыг.

3. Үстлү функсијанын төрәмәси

$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ үстлү функсијасынын логарифмик диференсиаллама үсулу илә төрәмәсини һесаблајаг:

$$\ln y=x\cdot\ln a,$$

$$\frac{y'}{y}=\ln a,\ y'=y\ln a,\ y'=a^x\cdot\ln a,$$

$$(a^x)'=a^x\ln a. \qquad (7)$$

Хүсуси һалда, $a=e$ оларса,

$$(e^x)'=e^x. \qquad (8)$$

Мүрәккәб функсијанын диференсиалланма гајдасына (§ 6) әсасән (7) дүстурундан

$$[a^{f(x)}]'=a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\ln a, \qquad (9)$$

хүсуси һалда,

$$[e^{f(x)}]'=e^{f(x)}\cdot f'(x). \qquad (10)$$

Мисал 1. $y=8^{\ln x}$.

(9) дүстуруна көрә

$$y'=(8^{\ln x})'=8^{\ln x}\cdot(\ln x)'\cdot\ln 8=\frac{8^{\ln x}}{x}\cdot\ln 8.$$

1349—22

4. Гүввәт функсијасынын төрәмәси

$y = x^{\alpha}$ (α истәнилән һәгиги әдәддир) гүввәт функсијасынын төрәмәсини дә логарифмик диференсиаллама үсулу илә тапаг:

$$\ln y = \alpha \cdot \ln x \quad (x \neq 0).$$

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x}, \quad y' = y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}, \quad y' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{11}$$

Хүсуси һалда, $\alpha = \frac{1}{n}$ олдугда:

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \tag{12}$$

$\alpha = -n$ олдугда:

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

вә с. аларыг. Бундан башга, (11) дүстуруна көрә

$$([f(x)]^{\alpha})' = \alpha [f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x). \tag{13}$$

Мисал 2. $y = \sqrt{2x^2 + 1}.$

$$y' = [(3x^2+1)^{\frac{1}{2}}]' = \frac{1}{2}(3x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2+1)' = \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}.$$

5. Үстлү-мүрәккәб функсијанын төрәмәси

$y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ ($f(x) > 0$) шәклиндә функсијаја *үстлү-мүрәккәб функсија* дејилир. $u = f(x)$ вә $v = \varphi(x)$ функсијалары диференсиалланан олдугда $y = u^v$ функсијасы да диференсиалланандыр вә онун төрәмәсини логарифмик диференсиаллама үсулу илә тапмаг олар.

$$y = u^v, \quad \ln y = v \ln u,$$

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u},$$

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u}\right) = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u',$$

$$(u^v)' = u^v \cdot v' \ln u + vu^{v-1} \cdot u'. \tag{14}$$

Үстлү вә гүввәт функсијалары үчүн исбат етдијимиз (9) вә (13) дүстурлары (14) дүстурунун хүсуси һалларыдыр.

Мисал 3. $y = x^x.$

$$y' = x^x \cdot \ln x \cdot (x)' + x \cdot x^{x-1} \cdot x' = x^x \ln x + x^x = x^x(\ln x + 1).$$

Мисал 4. $y = (x^2 + 1)^{\sqrt{x}}.$

$$y' = (x^2+1)^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' \ln(x^2+1) + \sqrt{x}(x^2+1)^{\sqrt{x}-1} \cdot (x^2+1)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+1)^{\sqrt{x}} \cdot \ln(x^2+1) + 2x^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\sqrt{x}-1}.$$

6. $y = \sin x$ функсијасынын төрәмәси

Аргументә Δx артымы вериб функсијанын ујғун артымыны һесаблајаг:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

$$(\sin x)' = \cos x, \tag{15}$$

$$[\sin f(x)]' = \cos f(x) \cdot f'(x). \tag{16}$$

7. $y = \cos x$ функсијасынын төрәмәси

Чевирмә дүстуруна көрә

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Бурадан

$$y' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad (17)$$

Үмуми һалда,

$$[\cos f(x)]' = -\sin f(x) \cdot f'(x). \qquad (18)$$

8. $y = \operatorname{tg} x$ функсијасынын төрәмәси

Қәсрин төрәмәсини һесабламa гајдасына вә (15), (17) дүстурларына әсасән:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x. \qquad (19)$$

Үмуми һалда,

$$[\operatorname{tg} f(x)]' = \sec^2 f(x) \cdot f'(x). \qquad (20)$$

9. $y = \operatorname{ctg} x$ функсијасынын төрәмәси

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x,$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x, \qquad (21)$$

$$[\operatorname{ctg} f(x)]' = -\operatorname{cosec}^2 f(x) \cdot f'(x). \qquad (22)$$

10. $y = \arcsin x$ функсијасынын төрәмәси

$y = \arcsin x$ $(-1<x<1)$ функсијасынын тәрс функсијасы $x = \sin y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$ олар. Онда тәрс функсијанын төрәмәсинин һесабланмасы дүстуруна (§ 7) көрә

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $\cos y$ мүсбәт олдуғундан квадрат көкүн габағында $+$ ишарәси көтүрүлмәлидир. Беләликлә,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (23)$$

үмуми һалда,

$$[\arcsin f(x)]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}. \qquad (24)$$

11. $y = \arccos x$ функсијасынын төрәмәси

$y = \arccos x$ $(-1<x<1)$ функсијасынын тәрс функсијасы $x = \cos y$ $(0<y<\pi)$ олар. Онда:

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (25)$$

$$[\arccos f(x)]' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}. \qquad (26)$$

12. $y = \operatorname{arc\,tg} x$ вә $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ функсијаларынын төрәмәси

$y = \operatorname{arc\,tg} x$ $(-\infty<x<\infty)$ функсијасынын тәрс функсијасы $x = \operatorname{tg} y$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ олар. Онда:

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad (27)$$

вә үмуми һалда

$$[\operatorname{arc\,tg} f(x)]' = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}. \qquad (28)$$

Ејни гајда илә:

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \qquad (29)$$

$$[\operatorname{arc\,ctg} f(x)]' = -\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}. \qquad (30)$$

13. Һиперболик функсијаларын төрәмәси

Һиперболик функсијаларын тә'рифинә әсасән онларын төрәмәсини һесабламаг олар:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$(\mathrm{ch}\,x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\,x.$$

$$(\mathrm{th}\,x)' = \left(\frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}x}\right)' = \frac{(\mathrm{sh}\,x)'\cdot \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}\,x\cdot(\mathrm{ch}x)'}{\mathrm{ch}^2\,x} =$$

$$= \frac{\mathrm{ch}^2\,x - \mathrm{sh}^2\,x}{\mathrm{ch}^2\,x} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}$$

$$(\mathrm{cth}\,x) = \left(\frac{\mathrm{ch}\,x}{\mathrm{sh}\,x}\right)' = \frac{(\mathrm{ch}\,x)'\cdot \mathrm{sh}x - \mathrm{ch}\,x\cdot(\mathrm{sh}x)'}{\mathrm{sh}^2\,x} =$$

$$= \frac{\mathrm{sh}^2 x - \mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2\,x} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2\,x}.$$

§ 9. ЈҮКСӘК ТӘРТИБЛИ ТӨРӘМӘЛӘР

$y = f(x)$ функсијасы (a, b) интервалында диференсиалланан олдугда онун $f'(x)$ төрәмәсинин гијмәти бахылан x нөгтәсиндән асылыдыр. Буна көрә дә x-ин функсијасы олан $f'(x)$-ин төрәмәсиндән данышмаг олар.

$f'(x)$-ин төрәмәсинә $y = f(x)$ функсијасынын *икитәртибли төрәмәси* вә јахуд *икинчи төрәмәси* дејилир вә

$$y'',\ f''(x),\quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2},\quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

илә ишарә олунур. Беләликлә,

$$y'' = (y')' = [f'(x)]' = f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

$f(x)$ функсијасынын икинчи $f''(x)$ төрәмәсинин төрәмәсинә онун *үчүнчү төрәмәси* вә јахуд *үчтәртибли төрәмәси* дејилир вә y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$ илә ишарә олунур:

$$y''' = (y'')' = [f''(x)]' = f'''(x).$$

Үмумијјәтлә, $f(x)$ функсијасынын $(n-1)$-тәртибли төрәмәсинин төрәмәсинә онун *n-тәртибли төрәмәси* дејилир вә

$$y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \frac{d^n y}{dx^n},\ \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

илә ишарә олунур. Беләликлә,

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = [f^{(n-1)}(x)]' = f^{(n)}(x) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

Төрәмәнин тәртибини гүввәт үстү илә гарышдырмамаг үчүн ону мө'тәризәдә јазырлар. Биринчи, икинчи вә үчүнчү төрәмәләр штрихлә ишарә олунур:

$$y',\ y'',\ y'''.$$

Дөрд, беш вә даһа јүксәк тәртибли төрәмәләрин тәртибини көстәрән әдәдләр исә мө'тәризәдә јазылыр:

$$y^{(IV)},\quad y^{(V)},\quad \ldots,$$

$$y^{(4)},\quad y^{(5)},\quad \ldots,\ y^{(n)}.$$

Јүксәк тәртибли төрәмәләрин тә'рифиндән ајдындыр ки, верилмиш x нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын икитәртибли төрәмәсинин варлығы үчүн һәмин нөгтәнин мүәјјән әтрафында онун биринчи төрәмәси һөкмән олмалыдыр. Үчтәртибли төрәмәнин варлығы үчүн исә һәмин нөгтәнин мүәјјән әтрафында икитәртибли төрәмә олмалыдыр. Беләликлә, верилмиш нөгтәдә функсијанын n-тәртибли төрәмәси варса, онда һәмин нөгтәнин мүәјјән әтрафында функсијанын n-дән кичик бүтүн тәртибли төрәмәләри дә вардыр.

Верилмиш нөгтәдә n-тәртибли төрәмәси олан функсијаја һәмин нөгтәдә *n дәфә диференсиалланан* вә јахуд *n-чи тәртибдән диференсиалланан функсија* дејилир.

Төрәмәнин механики мә'насындан данышаркән (§ 3) көстәрмишдик ки, һәрәкәт едән нөгтәнин кетдији мәсафә, сүр'әти вә тә'чили арасында $v(t) = s'(t)$ вә $a(t) = v'(t)$ кими асылылыглар вардыр. Бурадан

$$a(t) = v'(t) = [s'(t)]' = s''(t)$$

мүнасибәти алыныр. Демәли, һәрәкәт едән нөгтәнин тә'чили кедилән мәсафәнин замана көрә икитәртибли төрәмәсинә бәрабәрдир. Бу, икитәртибли төрәмәнин механики мә'насыны ифадә едир.

Фәрз едәк ки, $u = f(x)$ вә $v = \varphi(x)$ функсијаларынын (a, b) интервалынын бүтүн нөгтәләриндә n-тәртибли төрәмәләри вардыр, јә'ни (a, b) интервалында n дәфә диференсиалланандыр. Бу һалда јүксәк тәртибли төрәмәләрин һесабланмасы үчүн ашағыдакы гајдалары сөјләмәк олар:

1. *Сабит вуруғу n-тәртибли төрәмә ишарәси харичинә чыхармаг олар.* Доғрудан да,

$$(Cu)' = Cu',$$

$$(Cu)'' = [(Cu)']' = (Cu')' = Cu'',$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}.$$

2. *Ики функсија чәминин n-тәртибли төрәмәси онларын n-тәртибли төрәмәләринин чәминә бәрабәрдир:*

$$(u+v)' = u' + v',$$
$$(u+v)'' = (u'+v')' = u'' + v'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}.$$

3. Ики функсија һасилинин n-тәртибли төрәмәсини һесаблајаг.

$$(u\cdot v)' = u'v + uv',$$
$$(uv)'' = (u'v+uv')' = u''v+2u'v'+uv'',$$
$$(uv)''' = u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

Бу гајда илә сонракы төрәмәләри дә һесабласаг n-тәртибли төрәмә үчүн:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots[n-(\kappa-1)]}{\kappa!}u^{(n-\kappa)}v^{(\kappa)} + \ldots + uv^{(n)} \qquad (1)$$

дүстуруну аларыг. (1) дүстуруна *Лејбнис дүстуру* дејилир.

Мисал 1. $y = a^x \quad (0<a\neq 1);\ y^{(n)} = ?$

$$y' = a^x \ln a,$$
$$y'' = a^x(\ln a)^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = a^x(\ln a)^n.$$

Хүсуси һалда, $a=e$ оларса, онда:

$$y = e^x,\ y' = y'' = \ldots = y^{(n)} = e^x.$$

Мисал 2. $y = \ln x,\ y^{(n)} = ?$

$$y' = \frac{1}{x},\ y'' = -\frac{1}{x^2} = (-1)^{2-1}\cdot\frac{1}{x^2},\ y''' = (-1)^{3-1}\cdot\frac{2!}{x^3}, \ldots,$$
$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Мисал 3. $y = \sin x,\ y^{(n)} = ?$

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\left(x + \frac{\pi}{2}\right)' =$$

$$= \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$y''' = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Мисал 4.

$$y = \cos x,\quad y^{(n)} = ?$$
$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$y'' = \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

§ 10. ПАРАМЕТРИК ШӘКИЛДӘ ВЕРИЛМИШ ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ

Фәрз едәк ки,

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}(t\in T)$$

тәнликләри васитәсилә y дәјишәни x-ин функсијасы кими тә'јин олунмушдур (XI, § 8). Параметрик шәкилдә тә'јин олунмуш бу функсија $y = f(x)$ олсун. Белә бир суал гаршыја чыхыр: $y=f(x)$ функсијасынын төрәмәләрини неҹә тапмаг олар?

Теорем. ***Әкәр $x=\varphi(t)$ вә $y=\psi(t)$ функсијаларынын төрәмәләри варса вә $\varphi'(t)\neq 0$ оларса, онда $y=f(x)$ функсијасы диференсиалланандыр вә онун төрәмәси***

$$y_x' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{вә ја} \quad y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} \qquad (1)$$

дүстуру илә һесабланыр.

Доғрудан да, $y=\psi(t)$ бәрабәрлијини x-ә нәзәрән диференсиалласаг вә сағ тәрәфи x-ин мүрәккәб функсијасы һесаб етсәк:

$$y_x' = y_t'\cdot t_x'. \qquad (2)$$

t_x' кәмиjјәтини тәрс функсијанын диференсиалланмасы гајдасына әсасән $x=\varphi(t)$ функсијасындан тапмаг олар:

$$t_x'=\frac{1}{x_t'}\quad\left(=\frac{1}{\varphi'(t)}\right). \qquad (3)$$

Тапдығымыз гијмәти (2) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг тәләб олунан

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}$$

дүстуруну аларыг.

$x=\varphi(t)$ вә $y=\psi(t)$ функсијаларынын јүксәк тәртибдән төрәмәләри олдугда онлар васитәсилә тә'јин олунмуш $y=f(x)$ функсијасынын да јүксәк тәртибли төрәмәләри олар. Бу функсијанын икитәртибли төрәмәсини тапаг.

(1) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфиндән x-ә нәзәрән төрәмә алаг:

$$y''=\frac{d}{dx}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]\frac{dt}{dx}=$$

$$=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}\cdot t_x'.$$

Бу бәрабәрликдә t_x' әвәзинә (3) бәрабәрлијиндәки гијмәти јазсаг

$$y''_x=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \qquad (4)$$

вә ја

$$y''_x=\frac{y_t''\cdot x_t'-x_t''\cdot y_t'}{(x_t')^3} \qquad (5)$$

дүстуруну аларыг. Функсијанын үч, дөрд вә с. тәртибли төрәмәләри дә ејни гајда илә һесабланыр.

Мисал 1.

$$\left.\begin{aligned}x&=t-2,\\ y&=3t+1\end{aligned}\right\}(t\in(-\infty,\infty))$$

параметрик шәклиндә верилмиш $y=f_0(x)$ функсијасынын төрәмәләрини һесабламалы. (1) дүстуруна көрә

$$f_0'(x)=\frac{(3t+1)_t'}{(t-2)_t'}=\frac{3}{1}=3,\quad f_0'(x)=3,$$

$$f''_0(x)=f'''_0(x)=...=0.$$

Мисал 2.

$$\left.\begin{aligned}x&=a\cos t,\\ y&=b\sin t\end{aligned}\right\}(t\in(0,\pi))$$

параметрик шәклиндә верилмиш функсијанын бир вә икитәртибли төрәмәләрини һесабламалы.

$$x_t'=-a\sin t,\qquad x_t''=-a\cos t,$$
$$y_t'=b\cos t,\qquad y_t''=-b\sin t$$

олдуғундан (1) вә (5) дүстурларына көрә y_x' вә y_x'' төрәмәләрини һесаблаја биләрик:

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=-\frac{b\cos t}{a\sin t}=-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$y''_x=\frac{(-b\sin t)(-a\sin t)-(-a\cos t)(b\cos t)}{(-a\sin t)^3}=$$

$$=\frac{+ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}{-a^3\sin^3 t}=-\frac{b}{a^2}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}.$$

§ 11. ГЕЈРИ-АШКАР ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ

Тутаг ки, $y=y(x)$ гејри-ашкар функсијасы

$$F(x,y)=0 \qquad (1)$$

тәнлији васитәсилә верилмишдир. Бу функсијанын аналитик ифадәсини ашкар шәкилдә тапмадан онун мүхтәлиф тәртибли төрәмәләрини тапмаг бә'зән мүмкүн олур. Бу мәгсәдлә (1) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини x-ә көрә диференсиаллајырлар вә y дәјишәни x-ин функсијасы олдуғуну нәзәрә алырлар. Алынан бәрабәрлији y'-ә нәзәрән һәлл едәрәк y' төрәмәсини тапырлар. Бу просеси давам етдирмәклә функсијанын ики, үч вә с. тәртибли төрәмәләрини дә тапмаг олар.

Буну бир мисал үзәриндә изаһ едәк.

Мисал 1.

$$ax^2+by^2=2 \qquad (2)$$

тәнлији илә тә'јин олунан $y=y(x)$ функсијасынын бир вә икитәртибли төрәмәсини тапмалы.

(2) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфиндән x-ә нәзәрән төрәмә алаг (јадда сахлајаг ки, y дәјишән x-ин функсијасыдыр):

$$2ax+2by\cdot y'=0,$$

$$y'=-\frac{ax}{by}. \qquad (3)$$

Бу бәрабәрлији јенидән x-ә нәзәрән диференсиалласаг:

$$y'' = -\frac{a}{b}\left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{a}{b}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}.$$

Бурада y'-ин әвәзинә (3) гијмәтини јазсаг:

$$y'' = -\frac{a}{b}\cdot\frac{y-x\cdot\left(-\frac{ax}{by}\right)}{y^2} = -\frac{a}{b}\cdot\frac{by^2+ax^2}{by^3}.$$

(2) бәрабәрлијинә көрә $ax^2+by^2=2$ олдуғундан икитәртибли төрәмә үчүн

$$y'' = -\frac{2a}{b^2}\cdot\frac{1}{y^3}$$

ифадәсини аларыг.

Мисал 2.

$$y^2 = 5+xe^y \tag{4}$$

тәнлији илә тә'јин олунан $y=y(x)$ гејри-ашкар функсијасынын төрәмәсини тапмалы.

(4) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини x-ә нәзәрән диференсиаллајаг:

$$2yy' = e^y + xe^y y',$$

$$(2y - xe^y)\, y' = e^y,$$

$$y' = \frac{e^y}{2y-y^2+5}.$$

(4) бәрабәрлијинә көрә $xe^y = y^2-5$ олдуғундан:

$$y' = \frac{e^y}{2y-y^2+5}.$$

XV ФӘСИЛ

ДИФЕРЕНСИАЛ

§ 1. ДИФЕРЕНСИАЛЛАНМАНЫН ЈЕНИ ТӘ'РИФИ

Фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасы (a, b) интервалында тә'јин олунмуш функсијадыр вә онун x нөгтәсиндә артымы

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \quad (x, x+\Delta x \in (a, b)).$$

Мә'лумдур ки, верилмиш x нөгтәсиндә төрәмәси олан функсијаја һәмин нөгтәдә диференсиалланан функсија дејилир (XIV, § 1). Функсијанын нөгтәдә диференсиалланмасына ашағыдакы кими јени тә'риф дә вермәк олар.

Тә'риф. *$f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндәки артымыны*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x \tag{1}$$

шәклиндә көстәрмәк мүмкүн олдуғда, она һәмин нөгтәдә диференсиалланан функсија дејилир. Бурада A, аргументин Δx артымындан асылы олмајан кәмијјәт, $\alpha(\Delta x)$ исә $\Delta x\to 0$ шәртиндә сонсуз кичилән функсијадыр:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0.$$

Бу тә'рифлә, әввәлки фәсилдә нөгтәдә диференсиалланмаја верилән тә'риф (XIV, § 1), јә'ни нөгтәдә төрәмәси олан функсијанын һәмин нөгтәдә диференсиалланан олмасы тә'рифи ејникүчлүдүр. Бу тәклифин доғрулуғу ашағыдакы теоремдән ајдындыр.

Теорем. ***$f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндәки артымынын (1) шәклиндә көстәрилә билмәси үчүн һәмин нөгтәдә онун $f'(x)$ төрәмәсинин олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, $f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндәки артымы (1) шәклиндә көстәрилмишдир:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Бурадан

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A+\alpha(\Delta x),\ \Delta x\neq 0,$$

вә

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = A$$

алыныр, бу да

$$A = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

олдуғуну, јә'ни x нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын төрәмәсинин олдуғуну көстәрир.

Шәртин кафилији. Инди фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндә $f'(x)$ төрәмәси вар. Онда төрәмәнин тә'рифинә көрә:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

вә ја

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)+\alpha(\Delta x),\quad \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$$

Бурадан функсијанын Δy артымы үчүн (1) шәклиндә

$$\Delta y = f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \tag{2}$$

көстәрилиши алыныр.

Нəтичə. Верилмиш x нөгтəсиндə диференсиалланан f(x) функсијасынын һəмин нөгтəдə артымы (2) шəклиндə көстəрилə билəр.

§ 2. ДИФЕРЕНСИАЛЫН ТƏ'РИФИ

Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы (a, b) интервалында диференсиалланандыр. Онда истəнилəн $x\in(a, b)$ нөгтəсиндə онун артымы

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \tag{1}$$

шəклиндə көстəрилə билəр; бурада $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$

Функсијанын артымы ики $f'(x)\Delta x$ вə $\alpha(\Delta x)\Delta x$ һəдлəринин чəми шəклиндə көстəрилмишдир. Бу һəдлəрин биринчиси аргументин Δx артымындан хəтти асылыдыр. Икинчиси исə Δx-дан хəтти асылы дејилдир вə $f'(x)\neq 0$ олдугда биринчи һəддə нəзəрəн јүксəк тəртибли сонсуз кичилəн кəмиjјəтдир:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{f'(x)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{f'(\Delta x)}=0.$$

Демəли, $f'(x)\Delta x$ һəдди функсија артымынын баш һиссəсидир:

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x). \tag{2}$$

Т ə' р и ф. *Диференсиалланан $y=f(x)$ функсијасынын x нөгтəсиндəки артымынын баш һиссəсинə, јə'ни Δx-дан хəтти асылы олан $f'(x)\Delta x$ ифадəсинə онун x нөгтəсиндə диференсиалы[1] дејилир. $y=f(x)$ функсијасынын x нөгтəсиндə диференсиалы dy вə ја $df(x)$ илə ишарə олунур:*

$$df(x)=f'(x)\Delta x \tag{3}$$

вə јахуд

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{4}$$

Гејд едəк ки, $f'(x)=0$ олдугда $f'(x)\Delta x=0$ олур, $\alpha(\Delta x)\Delta x$ ифадəси исə, үмумиjјəтлə, сыфра бəрабəр дејилдир. Буна көрə дə $f'(x)\Delta x$ һəдди функсија артымынын баш һиссəси ола билмəз. Лакин бу һалда да функсијанын диференсиалыны (3) вə ја (4) дүстуру илə тə'јин едирлəр: $df(x)=0$.

Демəли, бүтүн һалларда функсијанын диференсиалы онун төрəмəси илə аргументин артымы һасилинə бəрабəрдир.

Инди $f(x)=x$ функсијасынын диференсиалыны һесаблајаг. $f'(x)=x'=1$ олдуғундан

$$df(x)=dx=1\cdot\Delta x=\Delta x$$

вə јахуд

$$dx=\Delta x.$$

[1] Диференсиал термини латынча мə'насы фəрг олан «differentia» сөзүндəн көтүрүлмүшдүр.

Јə'ни, сəрбəст дəјишəн олан аргументин диференсиалы һəмишə өзүнүн артымына бəрабəрдир. Буну нəзəрə алсаг (3) дүстуруну

$$df(x)=f'(x)dx \tag{5}$$

шəклиндə јазмаг олар. Демəли, $y=f(x)$ функсијасынын x нөгтəсиндə диференсиалы онун һəмин нөгтəдəки төрəмəси илə аргументин диференсиалы һасилинə бəрабəрдир. (5) дүстурундан төрəмəни тапсаг

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$$

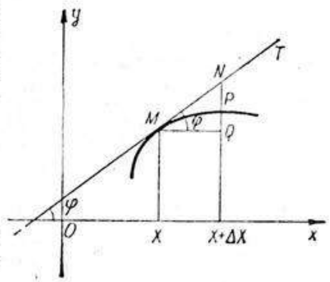
аларыг, бу да функсија төрəмəсинин функсија диференсиалынын аргументин диференсиалына нисбəтинə бəрабəр олдуғуну көстəрир.

Функсијанын $f'(x)$ төрəмəси анчаг x-дəн асылы олдуғу һалда, онун $df(x)=f'(x)dx$ диференсиалы асылы олмајан ики дəјишəндəн, x вə dx-дан асылыдыр.

§ 3. ДИФЕРЕНСИАЛЫН ҺƏНДƏСИ МƏ'НАСЫ

$y=f(x)$ функсијасынын диференсиалынын һəндəси мə'насыны изаһ етмəк үчүн онун графики үзəриндə $M(x, y)$ нөгтəси көтүрəк (146-чы шəкил). Бу нөгтəдə функсија графикинə чəкилəн тохунан MT дүз хəтти олсун. Абсис оху үзəриндəки $x+\Delta x$ нөгтəсиндəн ордината охуна паралел галдырылан дүз хəтт MT тохунаныны N нөгтəсиндə кəсəр. Дүзбучаглы NMQ үчбучағында:

$$\frac{NQ}{MQ}=\operatorname{tg}\varphi,\quad NQ=MQ\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$



Шəкил 146.

$MQ=\Delta x$ вə төрəмəнин һəндəси мə'насына көрə (XIV, § 2) $\operatorname{tg}\varphi=f'(x)$ олдуғундан:

$$NQ=f'(x)\cdot\Delta x=df(x). \tag{1}$$

NQ кəмиjјəти, x абсиси Δx артымы алдыгда MT тохунаны ординатынын алдығы артымдыр. (1) бəрабəрлијиндəн функсија диференсиалынын һəндəси мə'насы алыныр:

$f(x)$ функсијасынын x нөгтəсиндə диференсиалы, функсијанын графикинə $M(x, y)$ нөгтəсиндə чəкилмиш тохунанын тохунма нөгтəсинин абсиси Δx артымы алдыгда ординатынын алдығы артыма бəрабəрдир.

Гејд едəк ки, функсијанын диференсиалы $(QN=df(x))$ онун ујғун артымындан $(\Delta f(x)=QP)$ бөјүк, кичик вə ја она бəрабəр ола билəр.

§ 4. ДИФЕРЕНСИАЛЫН МЕХАНИКИ МӘ'НАСЫ

Тутаг ки, һәр һансы чисим дүз хәтт бојунча һәрәкәт едир вә диференсиалланан $s=s(t)$ функсијасы онун һәрәкәт ганунудур. Ајдындыр ки, чисим t анындан $t+\Delta t$ анына гәдәр олан мүддәтдә

$$\Delta s(t) = s(t + \Delta t) - s(t)$$

гәдәр јол кедәр. Һәрәкәтин t анында сүр'әтинин $v(t)=s'(t)$ олмасы мә'лумдур (XIV, § 3). Демәли, әкәр һәрәкәт едән чисмин бүтүн Δt заман фасиләсиндә сүр'әти сабит олуб t анындакы $v(t) = s'(t)$ сүр'әтинә бәрабәр олса иди, онда чисим һәмин мүддәтдә

$$ds(t) = s'(t) \cdot \Delta t \qquad (1)$$

гәдәр мәсафә кетмиш оларды. Бу, $s(t)$ функсијасы диференсиалынын механики мә'насыны ифадә едир.

Чисим дәјишән сүр'әтлә һәрәкәт етдикдә онун Δt заман фасиләсиндә сүр'әти дәјишир вә бу мүддәтдә кетдији $\Delta s(t)$ мәсафәси (1) мәсафәсинә бәрабәр олмур. Ајдындыр ки, Δt заман фасиләси чох кичик олдугда

$$\Delta s(t) \approx s'(t) \cdot \Delta t$$

һесаб етмәк олар.

§ 5. ДИФЕРЕНСИАЛ ШӘКЛИНИН ИНВАРИАНТЛЫҒЫ

Диференсиалланан $y = f(x)$ функсијасынын диференсиалы, онун төрәмәси илә аргументин артымы һасилинә бәрабәрдир:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (1)$$

Ихтијари дәјишән олан x аргументинин артымы өз диференсиалына бәрабәр олдуғундан ($dx = \Delta x$) (1) дүстурунун

$$dy = f'(x)\, dx \qquad (2)$$

шәклиндә јазылдығы јухарыда (§ 2) көстәрилмишдир. Инди фәрз едәк ки, x аргументи сәрбәст дәјишән олмајыб башга бир t дәјишәнинин функсијасыдыр: $x = \varphi(t)$. Онда y дәјишәни t-нин мүрәккәб функсијасы олар:

$$y = f[\varphi(t)].$$

Бу мүрәккәб функсијанын t дәјишәнинә көрә диференсиалыны һесаблајаг:

$$dy = y_t' \cdot dt = \{f[\varphi(t)]\}_t' \cdot dt = f'(x) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

(мүрәккәб функсијанын төрәмәси дүстуруна әсасән). Бурадан

$$dx = \varphi'(t)\, dt$$

олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$dy = f'(x)\, dx. \qquad (2)$$

Демәли, x аргументи башга бир t дәјишәнинин функсијасы олдугда да $y=f(x)$ функсијасынын диференсиалы (2) шәклиндә олур, јә'ни x аргументи сәрбәст дәјишән олдугда $y=f(x)$ функсијасынын диференсиалы нә шәкилдәдирсә, x аргументи башга бир t дәјишәнинин функсијасы олдугда да диференсиалы һәмин шәкилдә олур.

Буна диференсиалын (2) шәклинин *инвариантлыг (дәјишмәзлик) хассәси* дејилир.

Функсија диференсиалынын (1) шәкли исә инвариант дејилдир. x аргументи сәрбәст дәјишән олдугда онун артымы диференсиалына бәрабәрдир, лакин башга бир t дәјишәнинин функсијасы, јә'ни $x = \varphi(t)$ олдугда исә онун артымы үмумијјәтлә диференсиалына бәрабәр олмур: $\Delta x \neq dx$.

Функсија диференсиалынын (2) инвариант ифадәсиндән јенә дә онун төрәмәсинин функсија диференсиалынын аргумент диференсиалына нисбәтинә бәрабәр олдуғуну аларыг:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \qquad (3)$$

Бу дүстура әсасән мүрәккәб вә тәрс функсијаларын төрәмәләрини һесаблама дүстурлары садә ејниликләр шәклиндә јазыла биләр:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Үмумијјәтлә, аргумент вә функсија диференсиаллары үзәриндә һәгиги әдәдләр үзәриндә олдуғу кими һесаб әмәлләри апармаг олар. Буна көрә дә төрәмәни диференсиалларын нисбәти кими јазмаг, јә'ни (3) шәклиндә јазмаг чох заман даһа әлверишли олур.

§ 6. ДИФЕРЕНСИАЛЛАРЫН ҺЕСАБЛАНМА ДҮСТУРЛАРЫ

Мә'лумдур ки, функсијанын диференсиалы онун төрәмәси илә аргументин диференсиалы һасилинә бәрабәрдир (§ 2 вә § 5). Демәли, функсијанын диференсиалыны тапмаг үчүн онун төрәмәсини һесабламаг лазымдыр.

Буна көрә дә, *һәм төрәмәалма вә һәм дә диференсиалы тапма әмәлләринә диференсиаллама әмәли дејилир.*

Тутаг ки, диференсиалланан $u = f(x)$ вә $v=\varphi(x)$ функсијалары верилмишдир. Онларын диференсиалы

$$du = f'(x)\, dx = u'dx, \; dv = \varphi'(x)\, dx = v'dx$$

шәклиндә олдуғундан функсијаларын чәминин, фәргинин, һасилинин вә нисбәтинин диференсиалыны һесабламаг үчүн

$$d(u\pm v)=(u\pm v)'dx=u'dx\pm v'dx=du\pm dv,$$

$$d(uv)=(uv)'dx=(u'v+uv')dx=vdu+udv$$

вә

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx=\frac{vdu-udv}{v^2}$$

дүстурларыны аларыг.

Ејни гајда илә дә әсас елементар функсијаларын төрәмәләри (XIV, § 8) дүстурларына әсасән онларын диференсиалларыны тапмаг олар:

1. $d(u^\alpha)=\alpha u^{\alpha-1}du$ (α сабит әдәддир).

2. $d(a^u)=a^u\ln a\,du$ $(0<a\neq1)$,

$d(e^u)=e^u du.$

3. $d(\log_a u)=\frac{du}{u}\cdot\log_a e=\frac{du}{u\cdot\ln a}.$

$d(\ln u)=\frac{du}{u}.$

4. $d(\sin u)=\cos u\cdot du,$

$d(\cos u)=-\sin u\cdot du,$

$d(\operatorname{tg} u)=\frac{du}{\cos^2 u}.$

$d(\operatorname{ctg} u)=-\frac{du}{\sin^2 u}.$

5. $d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

$d(\arccos u)=-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$

$d(\operatorname{arc\,tg} u)=\frac{du}{1+u^2}.$

$d(\operatorname{arc\,ctg} u)=-\frac{du}{1+u^2}.$

6. $d(\operatorname{sh} u)=\operatorname{ch} u\cdot du.$

$d(\operatorname{ch} u)=\operatorname{sh} u\cdot du.$

$d(\operatorname{th} u)=\frac{du}{\operatorname{ch}^2 u}.$

$d(\operatorname{cth} u)=-\frac{du}{\operatorname{sh}^2 u}.$

§ 7. ЈУКСӘК ТӘРТИБЛИ ДИФЕРЕНСИАЛЛАР

Тутаг ки, $y=f(x)$ диференсиалланан функсијадыр вә x аргументи сәрбәст дәјишәндир. Онда функсијанын диференсиалы

$$dy=f'(x)dx. \tag{1}$$

олар. (1) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки һәддин биринчи вуруғу олан $f'(x)$ төрәмәси x-дән асылыдыр, икинчи dx вуруғу исә сәрбәст дәјишән x аргументинин артымы олдуғундан x-дән асылы дејил (сабит әдәддир). Буна көрә дә (1) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи x аргументиндән асылыдыр вә онун диференсиалындан данышмаг олар.

Функсија диференсиалынын диференсиалына һәмин функсијанын *икитәртибли вә јахуд икинчи диференсиалы* дејилир вә d^2y, $d^2f(x)$ вә с. илә ишарә олунур. Беләликлә,

$$d^2y=d(dy) \quad \text{вә ја} \quad d^2f(x)=d(df(x)).$$

Диференсиалын тә'рифиндән истифадә едәрәк, икинчи диференсиалын ифадәсини тапаг:

$$d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)(dx)^2.$$

Бу әмәлијјат заманы dx диференсиалы x-дән асылы олмадығындан төрәмә ишарәсинин харичинә чыхарылыр. Ејни гајда илә дә үчүнчү вә ја үчтәртибли диференсиалы тә'јин етмәк олар:

$$d^3y=d(d^2y)=d[f''(x)(dx)^2]=[f''(x)(dx)^2]'dx=$$
$$=f'''(x)(dx)^3.$$

Функсијанын $(n-1)$-тәртибли диференсиалынын диференсиалына һәмин функсијанын *n-тәртибли диференсиалы* дејилир вә $d^n y$ (вә ја $d^n f(x)$) илә ишарә олунур. Беләликлә,

$$d^ny=d(d^{n-1}y)=d[f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}]=$$
$$=[f^{(n-1)}(x)(dx)^{n-1}]'dx=f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Гејд едәк ки, функсија диференсиалынын ифадәсини јаздыгда dx ифадәсини мө'тәризәдә јазмырлар, $(dx)^n$ әвәзинә dx^n јазырлар. Буну нәзәрә алсаг, функсијанын n-тәртибли диференсиалы үчүн

$$d^n y=f^{(n)}(x)dx^n \tag{2}$$

ифадәсини аларыг. (2) дүстурундан функсијанын n-тәртибли төрәмәси үчүн

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n} \tag{3}$$

мүнасибәтини аларыг.

Биз индијә кими функсијанын диференсиалларыны һесабларкән x аргументини сәрбәст дәјишән һесаб едирдик. Функсија диференсиалынын (1) шәкли инвариант олдуғундан (§ 5) x аргу-

менти бир t дәјишәнинин функсијасы олдугда да һәмин функсија-нын биринчи диференсиалы

$$dy = f'(x)\,dx \tag{4}$$

шәклиндә олар. Лакин бурада dx кәмијјәти әввәлки кими сабит олмајыб t-дән асылыдыр. Бу һалда да функсијанын икинчи диференсиалыны һесабламаг олар:

$$d^2y = d(dy) = d\,[f'(x)\,dx] = d\,[f'(x)]dx + f'(x)\cdot d(dx) = \\ = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x. \tag{5}$$

Функсијанын үчүнчү диференсиалыны һесабласаг:

$$d^3y = d(d^2y) = d[f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x] = d[f''(x)\,dx^2] + \\ + d[f'(x)\,d^2x] = d[f''(x)]dx^2 + f''(x)\,d(dx^2) + d[f'(x)]d^2x + \\ + f'(x)\,d(d^2x) = f'''(x)\,dx^3 + f''(x)\,2dxd(dx) + \\ + f''(x)\,dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2x + \\ + f'(x)\,d^3x$$

вә јахуд

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x. \tag{6}$$

Бу гајда илә функсијанын дөрдүнчү, бешинчи вә с. диференсиалларыны да һесабламаг олар.

(5) вә (6) дүстурларындан ајдындыр ки, диференсиалын (2) шәкли мүрәккәб функсијалар үчүн, јә'ни x аргументи башга t дәјишәнинин функсијасы олан һалда инвариант дејилдир. Демәли, n-тәртибли диференсиалын (2) шәкли $n \geqslant 2$ олдугда, үмумијјәтлә инвариант дејилдир. Бу инвариантлыг анчаг бир хүсуси һалда, x дәјишәни t-дән хәтти асылы олдугда олур:

$$x = at + b.$$

$dx = adt$ (сабит әдәд) вә $d^2x = d^3x = ... d^n x = 0$. Бу һалда да (5) вә (6) дүстурлары ујғун олараг

$$d^2y = f''(x)\,dx^2,$$
$$d^3y = f'''(x)\,dx^3$$

кими, функсијанын n-тәртибли диференсиалы исә (2) шәклиндә олур:

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

§ 8. ФУНКСИЈАЛАРЫН ХӘТТИЛӘШДИРИЛМӘСИ

$y = f(x)$ функсијасы (a, b) интервалында диференсиалланан олдугда һәмин интервалын истәнилән $x_0 \in (a, b)$ нөгтәсиндә

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x) \tag{1}$$

көстәрилиши доғру олар (§ 1, нәтиҹә). Бурада $x = x_0 + \Delta x$ һесаб етсәк $\Delta x = x - x_0$ олар вә (1) көстәрилишиндән

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \tag{2}$$

мүнасибәтини аларыг.

Бурадан ајдындыр ки, $\Delta x = x - x_0$ артымы чох кичик олдугда $f(x)$ функсијасыны x_0 нөгтәсинин јахын әтрафында

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{3}$$

хәтти функсијасы илә әвәз етмәк олар:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0); \quad (x \to x_0) \tag{4}$$

јә'ни x_0 нөгтәсинин јахын әтрафында $f(x)$ функсијасы өзүнү (3) хәтти функсијасы кими апарар.

Демәли, $f(x)$ функсијасы диференсиалланан олдуғу x_0 нөгтәсинин јахын әтрафында (3) хәтти функсијасындан $\Delta x = x - x_0$ артымына нәзәрән јүксәк тәртибли сонсуз кичилән олан бир кәмијјәтлә фәргләнир. Бу һалда, јә'ни $x \to x_0$ *шәртиндә (2) мүнасибәти доғру олдугда, дејирләр ки,* $f(x)$ *функсијасы* x_0 *нөгтәсинин јахын әтрафында хәттиләшдириләбилир.*

Мисал 1. $f(x) = (1 + x)^n$ функсијасыны $x_0 = 0$ нөгтәси әтрафында хәттиләшдирмәли.

$f(x) = (1 + x)^n$ функсијасы $x_0 = 0$ нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғундан

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1}, \quad f'(0) = n$$

вә (2) дүстуруна көрә:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + o(x), \quad x \to 0. \tag{5}$$

Мисал 2. $f(x) = \log_a(1 + x)$ функсијасыны $x_0 = 0$ нөгтәси әтрафында хәттиләшдирмә дүстуру

$$\log_a(1 + x) = \frac{x}{\ln a} + o(x) \tag{6}$$

шәклиндә јазылыр. Хүсуси һалда,

$$\ln(1 + x) = x + o(x).$$

Мисал 3. $f(x) = \sin x$ функсијасыны истәнилән x_0 нөгтәси әтрафында хәттиләшдирмәк олар. Доғрудан да, $f'(x) = \cos x$ олдуғундан (2) дүстуруна көрә:

$$\sin x = \sin x_0 + (x - x_0)\cos x_0 + o(x - x_0). \tag{7}$$

Мисал 4. $f(x) = a^x$ $(0 < a \neq 1)$ функсијасыны истәнилән x_0 нөгтәси әтрафында хәттиләшдирмә дүстуру

$$a^x = a^{x_0} + a^{x_0}\cdot\ln a\cdot(x - x_0) + o(x - x_0) \tag{8}$$

шәклиндә јазылыр.

Мисал 5. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ функсијасыны x_0 нөгтәси әтрафында хәттиләшдирсәк

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x_0^n} - \frac{n}{x_0^{n+1}}(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad (9)$$

дүстуруну аларыг.

§ 9. ФУНКСИЈАНЫН ГИЈМӘТЛӘРИНИН ТӘГРИБИ ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Бундан габагкы параграфда (§ 8) көстәрдик ки, $y=f(x)$ функсијасыны диференсиалланан олдуғу һәр бир x_0 нөгтәсинин јахын әтрафында хәттиләшдирмәк олар, јә'ни x_0 нөгтәсинин јахын әтрафында $f(x)$ функсијасы үчүн

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0) \qquad (1)$$

мүнасибәти доғрудур. Бу мүнасибәтдән истифадә едәрәк $f(x)$ функсијасынын гијмәтләрини тәгриби һесабламаг олар. Доғрудан да, $x-x_0$ фәрги (аргументин артымы) чох кичик олдугда јүксәк тәртибли сонсуз кичилән олан $o(x-x_0)$ һәддини атсаг, (1) мүнасибәтиндән

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2)$$

тәгриби бәрабәрлијини алмыш оларыг. Бу заман тәгриби (2) бәрабәрлијинин

$$\Delta(x) = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)|$$

хәтасы $\Delta x = x - x_0$ артымына нәзәрән јүксәк тәртибли сонсуз кичилән кәмијјәт олар:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta(x) = 0. \qquad (3)$$

(2) тәгриби бәрабәрлијини

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x-x_0)$$

шәклиндә јазыб, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ вә $df(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, һәмин бәрабәрлик

$$\Delta y \approx df(x_0) = dy \qquad (4)$$

шәклиндә јазылар. (4) тәгриби бәрабәрлијинин мүтләг хәтасы (3) бәрабәрлијинә көрә Δx-ә нәзәрән сонсуз кичилән кәмијјәтдир. Функсијанын x_0 нөгтәсиндәки артымыны онун һәмин нөгтәдәки диференсиалы илә әвәз етдикдә алынан нисби хәта

$$\delta_{dy} = \left| \frac{\Delta y - dy}{dy} \right|$$

олачагдыр. Бу нисби хәта да $f'(x_0) \neq 0$ олдугда Δx артымына нәзәрән сонсуз кичилән кәмијјәтдир. Доғрудан да, (1) бәрабәрлијинә көрә

$$\lim_{\Delta x\to 0} \delta_{dy} = \lim_{\Delta x\to 0} \left| \frac{\Delta y - dy}{dy} \right| = \lim_{\Delta x\to 0} \left| \frac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} \right| = 0.$$

Демәли, (4) тәгриби бәрабәрлијинин вә һәм дә онун башга шәкилдә јазылышы олан (2) тәгриби бәрабәрлијинин мүтләг вә нисби хәталарынын $\Delta x \to 0$ шәртиндә лимитләри сыфра бәрабәрдир.

(2) бәрабәрлијиндән истифадә едәрәк, бир чох функсијаларын гијмәтләрини тәгриби һесабламаг үчүн садә дүстурлар алмаг олар.

Мисал 1. $f(x) = \sqrt[n]{1+x}$ функсијасынын $x_0 = 0$ нөгтәсинин јахын әтрафында гијмәтләрини тәгриби һесабламаг үчүн дүстур чыхармалы.

$$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}}$$

олдуғундан $f(0)=1$ вә $f'(0) = \frac{1}{n}$. Онда (2) дүстуруна көрә

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x \qquad (5)$$

мүнасибәтини аларыг. Хүсуси һалда, $n=2$ вә $x=0{,}002$ олдугда

$$\sqrt{1{,}002} \approx 1{,}001.$$

(5) бәрабәрлијинин көмәји илә $\sqrt[n]{a^n+x}$ $(a>0)$ функсијасынын гијмәтләрини һесабламаг үчүн дә дүстур чыхармаг олар:

$$\sqrt[n]{a^n+x} = a\sqrt[n]{1+\frac{x}{a^n}} \approx a\left(1+\frac{x}{na^n}\right) = a + \frac{x}{n\cdot a^{n-1}}$$

вә ја

$$\sqrt[n]{a^n+x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}}. \qquad (6)$$

Хүсуси һалда,

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10}-24} \approx 2 - \frac{24}{10\cdot 512} \approx 1{,}995,$$

$$\sqrt[3]{131} = \sqrt[3]{5^3+6} \approx 5 + \frac{6}{3\cdot 5^2} = 5{,}08,$$

$$\sqrt{5} = \sqrt{2^2+1} \approx 2 + \frac{1}{2\cdot 2} = 2{,}25.$$

Мисал 2. $f(x) = \sin x$ функсијасынын гијмәтләрини тәгриби һесабламаг үчүн (2) бәрабәрлијиндән

$$\sin x \approx \sin x_0 + (x-x_0)\cos x_0 \qquad (7)$$

дүстуруну аларыг. Хүсуси һалда,

$$\sin 29^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}\right)$$

олдуғундан $x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$ вә $x_0 = \frac{\pi}{6}$ гәбул етсәк:

$$\sin 29^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{180}\right) \cos\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx \frac{1}{2} - \frac{1{,}732}{2}\cdot 0{,}017 \approx 0{,}485.$$

Мисал 3. $f(x) = \ln x$ функсијасынын гијмәтләрини тәгриби һесабламаг үчүн (2) бәрабәрлијиндән

$$\ln x \approx \ln x_0 + \frac{x - x_0}{x_0} \qquad (8)$$

дүстуру алыныр. Хүсуси һалда,

$$\ln 1{,}05 \approx \ln 1 + \frac{0{,}05}{1} = 0{,}05,$$

$$\ln 17 = \ln(16+1) \approx \ln 16 + \frac{1}{16} = 4\ln 2 + \frac{1}{16} = 4\cdot 0{,}6937 + 0{,}0625 = 2{,}8373,$$

$$\ln 2{,}2 \approx \ln 2 + \frac{0{,}2}{2} = 0{,}693 + 0{,}1 = 0{,}793.$$

§ 10. ДИФЕРЕНСИАЛЫН ХӘТАЛАРЫН ГИЈМӘТЛӘНДИРИЛМӘСИНӘ ТӘТБИГИ

Тутаг ки, һәр һансы x кәмијјәти билаваситә өлчүлүр вә ондан асылы олан y кәмијјәти исә $y = f(x)$ дүстуру илә һесабланыр. Әкәр x кәмијјәтинин өлчмә нәтичәсиндә тапылан тәгриби гијмәти x_0, онун мүтләг хәтасы Δx_0 олса, онда $|\Delta x| = |x - x_0| < \Delta_{x_0}$. Бу һалда $y = f(x)$ кәмијјәтинин тәгриби $y_0 = f(x_0)$ гијмәтинин мүтләг хәтасыны тә'јин етмәк үчүн $y = f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндә диференсиалланан олдуғуну гәбул едәк. Мә'лумдур ки, Δx кәмијјәти чох кичик олдугда диференсиалланан функсијанын артымы тәгриби олараг өзүнүн диференсиалына бәрабәрдир (§ 9):

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

Бурадан алынан

$$|f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)|\,|x - x_0| < |f'(x_0)|\,\Delta_{x_0}$$

мүнасибәти көстәрир ки, тәгриби $y_0 = f(x_0)$ гијмәтинин мүтләг хәтасы

$$\Delta_{y_0} = |f'(x_0)|\,\Delta_{x_0} \qquad (1)$$

олачагдыр. Инди $y_0 = f(x_0)$ тәгриби гијмәтинин δ_{y_0} нисби хәтасыны һесаблајаг. (1) дүстуруна көрә:

$$\delta_{y_0} = \frac{\Delta_{y_0}}{|y_0|} = \frac{|f'(x_0)|}{|f(x_0)|}\,\Delta_{x_0}$$

вә јахуд

$$\delta_{y_0} = \left|\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}\right| \Delta_{x_0}. \qquad (2)$$

(1) вә (2) дүстурларындан истифадә едәрәк, бир сыра диференсиалланан функсијаларын тәгриби гијмәтләринин мүтләг вә нисби хәтасыны һесабламаг олар.

1. Гүввәт функсијасынын мүтләг вә нисби хәтасы

$y = x^\alpha$ (α һәгиги әдәддир) функсијасы үчүн $y' = \alpha x^{\alpha-1}$, $y_0 = x_0^\alpha$, $y_0' = \alpha x_0^{\alpha-1}$ олдуғундан (1) вә (2) дүстурларына көрә:

$$\Delta_{y_0} = |\alpha x_0^{\alpha-1}|\,\Delta_{x_0} \qquad (3)$$

вә

$$\delta_{y_0} = \left|\frac{\alpha x_0^{\alpha-1}}{x_0^\alpha}\right| \Delta_{x_0} = \left|\frac{\alpha}{x_0}\right| \Delta_{x_0} = |\alpha|\cdot\frac{\Delta_{x_0}}{|x_0|} = |\alpha|\,\delta_{x_0} \qquad (4)$$

2. Логарифмик функсијанын мүтләг вә нисби хәтасы

$$y = \log_a x \quad (x > 0,\ 0 < a \neq 1)$$

функсијасы үчүн $y' = \frac{1}{x}\log_a e$ олдуғундан (1) дүстуруна көрә:

$$\Delta_{y_0} = \left|\frac{\log_a e}{x_0}\right| \Delta_{x_0} = |\log_a e| \left|\frac{\Delta_{x_0}}{x_0}\right| = |\log_a e|\,\delta_{x_0}.$$

Демәли, логарифмик функсијанын мүтләг хәтасы аргументин нисби хәтасы илә ифадә олунур:

$$\Delta_{y_0} = |\log_a e|\,\delta_{x_0}. \qquad (5)$$

Хүсуси һалда, $a = e$ оларса, $y = \ln x$ функсијасы үчүн:

$$\Delta_{y_0} = \delta_{x_0}. \qquad (6)$$

(2) дүстурундан логарифмик функсијанын нисби хәтасы үчүн

$$\delta_{y_0} = \left|\frac{\log_a e}{x_0 \log_a x_0}\right| \Delta_{x_0} = \left|\frac{\log_a e}{\log_a x_0}\right| \left|\frac{\Delta_{x_0}}{|x_0|}\right| = \left|\frac{\log_a e}{\log_a x_0}\right| \delta_{x_0}$$

вә јахуд

$$\delta_{y_0} = \left| \frac{\log_a e}{\log_a x_0} \right| \delta_{x_0} \qquad (7)$$

дүстуруну аларыг.

3. Үстлү функсијанын мүтләг вә нисби хәтасы

$y = a^x$ $(a>0)$ функсијасынын төрәмәси $y' = a^x \ln a$ олдуғундан (1) вә (2) дүстурларына көрә:

$$\Delta_{y_0} = |a^{x_0} \ln a| \Delta_{x_0},$$

$$\delta_{y_0} = \left| \frac{a^{x_0} \ln a}{a^{x_0}} \right| \Delta_{x_0} = |\ln a| \Delta_{x_0} \cdot$$

Хүсуси һалда, $y = e^x$ функсијасы үчүн:

$$\Delta_{y_0} = |e^{x_0}| \Delta_{x_0} \quad \text{вә} \quad \delta_{y_0} = \Delta_{x_0} \cdot$$

4. Тригонометрик функсијаларын мүтләг вә нисби хәталары:

$$\Delta_{\sin x_0} = |\cos x_0| \Delta_{x_0} \leqslant \Delta_{x_0};$$

$$\Delta_{\cos x_0} = |\sin x_0| \Delta_{x_0} \leqslant \Delta_{x_0};$$

$$\delta_{\sin x_0} = \frac{\Delta_{\sin x_0}}{|\sin x_0|} = |\operatorname{ctg} x_0| \cdot \Delta_{x_0},$$

$$\delta_{\cos x_0} = \frac{\Delta_{\cos x_0}}{|\cos x_0|} = |\operatorname{tg} x_0| \cdot \Delta_{x_0},$$

$$\Delta_{\operatorname{tg} x_0} = (1 + \operatorname{tg}^2 x_0) \Delta_{x_0},$$

$$\delta_{\operatorname{tg} x_0} = (|\operatorname{tg} x_0| + |\operatorname{ctg} x_0|) \Delta_{x_0} \cdot$$

XVI ФӘСИЛ

ДИФЕРЕНСИАЛҺЕСАБЫНЫН ӘСАС ТЕОРЕМЛӘРИ

Төрәмә анлајышынын бир чох мәсәләләрә тәтбигинин әсасыны тәшкил едән вә ашағыда исбат едәчәјимиз Ролл, Лагранж вә Коши теоремләринә диференсиал һесабынын *әсас теоремләри* дејилир. Бу теоремләр диференсиалланан функсијаларын бир сыра хассәләрини мүкәммәл вә әтрафлы өјрәнмәјә имкан верир. Һәмин теоремләрә бә'зән «орта ғијмәтләр һаггында теоремләр» дә дејилир.

§ 1. РОЛЛ[1] ТЕОРЕМИ

Теорем (Ролл теореми). ***$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән, (a, b) интервалында диференсиалланан вә һәмин парчанын уч нөгтәләриндә бәрабәр $f(a) = f(b)$ ғијмәтләри алан $y = f(x)$ функсијасы үчүн һәмин (a, b) интервалында јерләшән һеч олмаса бир елә ξ нөгтәси вар ки, бу нөгтәдә функсијанын $f'(x)$ төрәмәси сыфра бәрабәрдир, јә'ни $f'(\xi) = 0$.***

Исбаты. Функсија $[a, b]$ парчасында сабит олдугда теоремин доғрулуғу ајдындыр. Бу һалда $f(x)$-ин төрәмәси (a, b) интервалынын бүтүн нөгтәләриндә сыфра бәрабәрдир вә ξ нөгтәси олараг истәнилән нөгтәни көтүрмәк олар.

Инди фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасы сабит дејил. О, $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдуғундан Вејерштрассын икинчи теореминә көрә өзүнүн дәгиг ашағы (m_0) вә дәгиг јухары (M_0) сәрһәдләринин һәр бирини һәмин парчанын һеч олмаса бир нөгтәсиндә алыр.

Сабит олмајан $f(x)$ функсијасы үчүн $m_0 < M_0$ олар вә $f(a) = f(b)$ шәртинә көрә функсија m_0 вә M_0 сәрһәдләринин һеч олмаса бирини $[a, b]$ парчасынын дахили нөгтәсиндә алар.

Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы дәгиг ашағы m_0 сәрһәддини дахили ξ нөгтәсиндә алыр: $f(\xi) = m_0$ $(a < \xi < b)$. Онда кифајәт гәдәр кичик олан ихтијари $|\Delta x|$ үчүн

$$f(\xi + \Delta x) \geqslant f(\xi),$$

бурадан

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leqslant 0, \quad \Delta x < 0 \text{ олдугда} \qquad (1)$$

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geqslant 0, \quad \Delta x > 0 \text{ олдугда.} \qquad (2)$$

$\Delta x \to 0$ шәртиндә (1) вә (2) бәрабәрсизликләриндә лимитә кечсәк

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = f'(\xi) \leqslant 0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = f'(\xi) \geqslant 0.$$

$f'(\xi) \leqslant 0$ вә $f'(\xi) \geqslant 0$ мүнасибәтләринә әсасән $f'(\xi) = 0$.

$f(x)$ функсијасы дәгиг јухары сәрһәддини парчанын дахили нөгтәсиндә алдыгда төрәмәнин сыфра бәрабәр олдуғу ξ нөгтәсинин варлығы ејни гајда илә исбат олунур.

---

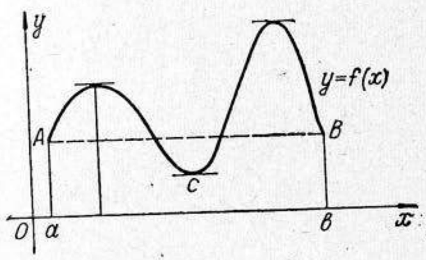
[1] Мишел Ролл (1652—1719) франсыз ријазијјатчысыдыр.

Нәтиҹә. $f(x)$ функсијасы (a, b) интервалында n нөгтәдә сыфра чеврилирсә вә һәмин интервалда $(n-1)$-тәртибли төрәмәси варса, онда бу $(n-1)$-тәртибли төрәмә (a, b) интервалында ән азы бир нөгтәдә сыфра бәрабәрдир.

Доғрудан да, $f(x)$ функсијасынын сыфра чеврилдији ихтијари ики x_1 вә x_2 нөгтәсинин тә'јин етдији (x_1, x_2) интервалына Ролл теоремини тәтбиг етсәк, һәмин интервалда $f'(x)$-ин ән азы бир сыфры олдуғуна инанарыг. Бу гајда илә јохламаг олар ки, $f'(x)$ һәмин интервалда ән азы $(n-1)$ нөгтәдә сыфра чеврилир. Бу мүһакимә көстәрир ки, $f''(x)$-ин һәмин интервалда ән азы $(n-2)$ нөгтәдә сыфры вардыр. Просеси давам етдирмәклә аларыг ки, $(n-1)$-тәртибли $f^{(n-1)}(x)$ төрәмәси (a, b) интервалында ән азы бир нөгтәдә сыфра бәрабәр олур.

Ролл теореминин һәндәси мә'насы беләдир: $y=f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында графики олан әјринин уҹ нөгтәләри $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ олдугда $f(a) = f(b)$ шәрти өдәнилирсә, онда һәмин әјри үзәриндә ән азы бир елә C нөгтәси вар ки, бу нөгтәдә әјријә чәкилән тохунан AB вәтәринә паралелдир (147-чи шәкил).

Шәкилдән ајдындыр ки, сөјләдијимиз тәләби өдәјән C нөгтәси бир нечә ола биләр (көстәрилән шәкилдә белә нөгтәнин сајы үчдүр).



Шәкил 147.

Гејд 1. Ролл теореминин доғрулуғу үчүн теоремдә көстәрилән функсијанын $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олмасы, (a, e) интервалында диференсиалланан олмасы вә парчанын уҹ нөгтәләриндә бәрабәр гијмәт алмасы шәртләринин һәр бири мүһүмдүр. Мәсәлән, $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш

$$f(x) = -\left(\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}\right) \quad (a<x<b),\ f(a)=f(b)=0$$

функсијасы (a, b) интервалында диференсиалланандыр ($[a, b]$ парчасында кәсилмәјән дејилдир), лакин (a, b) интервалынын бүтүн нөгтәләриндә төрәмәси мүсбәтдир:

$$f'(x) = \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} > 0 \quad (a<x<b).$$

$y=|x|$ функсијасы $[-1, 1]$ парчасында кәсилмәјәндир, $(-1, 1)$ интервалында исә диференсиалланан дејил. Бу функсија үчүн Ролл теореми доғру дејилдир.

Гејд 2. Ролл теореминдә функсија төрәмәсинин сыфра бәрабәр олдуғу ξ нөгтәсинин анҹаг варлығы көстәрилир, һәмин нөгтәнин һансы нөгтә вә нечә дәнә олмасы һаггында исә һеч бир шеј дејилмир.

§ 2. ЛАГРАНЖ[1] ТЕОРЕМИ

Теорем (Лагранж теореми). *$[a, b]$ парчасында кәсилмәјән вә (a, b) интервалында диференсиалланан $y = f(x)$ функсијасы үчүн һәмин интервалда јерләшән елә ξ нөгтәси вар ки, бу нөгтәдә*

$$f(b) - f(a) = (b-a)\, f'(\xi) \tag{1}$$

бәрабәрлији өдәнилир.

(1) бәрабәрлијинә *Лагранж дүстуру* вә ја *сонлу артымлар дүстуру* дејилир.

Исбаты. $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш

$$F(x)=f(x)-f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \tag{2}$$

функсијасына бахаг. $F(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјәндир, (a, b) интервалында диференсиаллананадыр вә парчанын уҹ нөгтәләриндә бәрабәр гијмәтләр алыр:

$$F(a) = F(b) = 0.$$

Онда Ролл теореминә көрә онун

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

төрәмәси бир $\xi \in (a, b)$ нөгтәсиндә сыфра бәрабәр олар:

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Бурадан (1) бәрабәрлији алыныр.

Лагранж дүстуруну бә'зән башга шәкилдә јазмаг даһа әлверишли олур. Тутаг ки, теоремин шәртләри өдәнилир вә $[x, x+\Delta x]$ парчасы (a, b) интервалында јерләшир. Бу парча үчүн Лагранж дүстуруну јазаг:

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x f'(\xi). \tag{3}$$

$\xi \in (x, x+\Delta x)$ олдуғундан елә $0<\theta<1$ әдәди тапмаг олар ки, $\xi = x+\theta\Delta x$ олсун. Бу һалда (3) дүстуруну

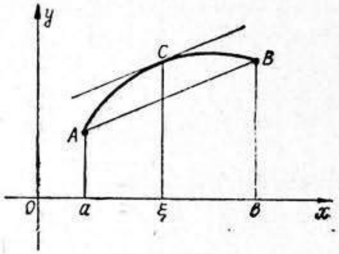
$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(x+\theta\Delta x) \tag{4}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Нәтиҹә. $f(a)=f(b)$ оларса, (1) дүстурундан $f'(\xi) = 0$ алыныр, јә'ни Ролл теореми Лагранж теореминин нәтиҹәсидир. Теоремин исбатындан ајдындыр ки, Лагранж теореми дә Ролл теореминин нәтиҹәсидир.

[1] Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) мәшһур франсыз ријазијјатчысы вә механикидир.

Лагранж теореминин һәндәси мә'насыны изаһ етмәк үчүн $\kappa_b = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ әдәдинин $y=f(x)$ функсијасынын графики олан әјринин $A(a,\ f(a))$ вә $B(b,\ f(b))$ нөгтәләрини бирләшдирән AB вәтәринин бучаг әмсалы, $f'(\xi)$-нин исә әјријә абсиси ξ олан C нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын бучаг әмсалы олдуғуну јадымыза салаг (148-чи шәкил).



Шәкил 148.

Лагранж теореми көстәрир ки, функсијанын графики олан әјри үзәриндә елә C нөгтәси вар ки, бу нөгтәдә әјријә чәкилән тохунан AB вәтәринә паралелдир.

Гејд. Лагранж теореминдә (1) бәрабәрлијинин доғру олдуғу ξ нөгтәсинин анчаг варлығы көстәрилир, һәмин нөгтәнин һансы нөгтә вә ону нечә тапмаг һаггында исә һеч бир шеј дејилмир.

§ 3. КОШИ ТЕОРЕМИ

Теорем. ***Тутаг ки, $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары, $[a,\ b]$ парчасында кәсилмәјән, $(a,\ b)$ интервалында диференсиалланан вә һәмин интервалын бүтүн нөгтәләриндә $\varphi'(x)\neq 0$ шәртини өдәјән функсијалардыр. Онда $(a,\ b)$ интервалында јерләшән елә ξ нөгтәси вар ки, бу нөгтәдә***

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \qquad (1)$$

бәрабәрлији өдәнилир.

Исбаты. Теоремин шәртиндән ајдындыр ки, $\varphi(a)-\varphi(b)\neq 0$, чүнки әкс һалда, јә'ни $\varphi(a)=\varphi(b)$ олдугда Ролл теореминә көрә бир ξ нөгтәсиндә $\varphi'(\xi)=0$ $(a<\xi<b)$ олар ки, бу да шәртә зиддир. Инди ашағыдакы кими көмәкчи функсија дүзәлдәк:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}[\varphi(x)-\varphi(a)]. \qquad (2)$$

$F(x)$ функсијасы $[a,\ b]$ парчасында кәсилмәјәндир, $(a,\ b)$ интервалында диференсиаллананды вә парчанын уч нөгтәләриндә сыфра бәрабәрдир: $F(a)=F(b)=0$. Онда Ролл теореминә көрә онун

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(x)$$

төрәмәси $(a,\ b)$ интервалынын бир ξ нөгтәсиндә сыфра бәрабәр олар:

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(\xi)=0$$

Бурадан (1) бәрабәрлији алыныр.

Нәтичә. $\varphi(x)=x$ оларса, $\varphi'(x)=1$, $\varphi(a)=a$ вә $\varphi(b)=b$ олар вә (1) дүстуру Лагранжын

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

дүстуруна чевриләр. Демәли, Лагранж теореми Коши теореминин хүсуси һалыдыр.

§ 4. ГЕЈРИ-МҮӘЈЈӘНЛИКЛӘРИН АЧЫЛЫШЫ. ЛОПИТАЛ ГАЈДАСЫ

Фәрз едәк ки, $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары $x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында тә'јин олунмуш вә

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

шәртини өдәјән функсијалардыр. Бу һалда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ кәсри $x\to a$ шәртиндә $\frac{0}{0}$ шәклини алыр. Буна көрә дә һәмин кәсрин лимитинин һесабланмасына кәсрин лимити һаггындакы теореми (XII, § 13) билаваситә тәтбиг етмәк олмаз. Мә'лумдур ки, (XII, § 12), белә кәсрин

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} \qquad (1)$$

лимитинин варлығы вә гијмәти һаггында чох мүхтәлиф вәзијјәтләр ола биләр, јә'ни (1) лимити мүхтәлиф әдәдләр ола биләр вә ја һәмин лимит һеч олмаја биләр. Үмумијјәтлә, бу заман гејри-мүәјјән вәзијјәт әмәлә кәлир. Буна көрә дә белә һалда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \qquad (2)$$

кәсринә $\frac{0}{0}$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлик дејилир.

Бундан башга $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^{∞} вә ∞^{0} кими гејри-мүәјјәнликләр дә вардыр.

(2) кәсринин (вә ја башга гејри-мүәјјәнликләрин) лимитинин тапылмасына (лимити олмадыгда исә ону мүәјјән етмәјә) $\frac{0}{0}$ шәклиндә (вә ја башга ујғун шәкилдә) *гејри-мүәјјәнлијин ачылышы* дејилир.

Гејри-мүәјјәнликләри ачмаг үчүн лимитләр нәзәријјәсиндән бир сыра садә үсуллар мә'лумдур. Диференсиал һесабыны тәтбиг етмәклә гејри-мүәјјәнликләри ачмаг үчүн үмуми метод алмаг олар. Бу методу биринчи дәфә Лопитал[1] вердијиндән она гејри-мүәјјәнликләрин ачылышы үчүн *Лопитал гајдасы* дејилир.

[1] Гилом Франсуа де Лопитал (1661—1704) франсыз ријазијјатчысыдыр.

$\frac{0}{0}$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлијин ачылышы

Теорем 1 (Лопитал гајдасы). *Тутаг ки, $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары $x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында (a нөгтәси мүстәсна олмагла) тә'јин олунмуш, диференсиалланан,*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0 \qquad (3)$$

вә $\varphi'(x)\neq 0$ (a нөгтәсинин һәмин әтрафында) шәртләрини өдәјән функсијалардыр. Әкәр функсијаларын төрәмәләри нисбәтинин

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A \qquad (4)$$

лимити варса, онда функсијаларын өзләринин дә нисбәтинин лимити вар вә һәмин әдәдә бәрабәрдир:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A. \qquad (5)$$

Исбаты. Әкәр $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијаларыны $x=a$ нөгтәсиндә $f(a)=0=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ вә $\varphi(a)=0=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$ кими тә'јин етсәк, онда һәмин нөгтәдә онлар кәсилмәјән олар. Бу һалда x нөгтәси ихтијари $x=a$ нөгтәсинин теоремдә көстәрилән әтрафында јерләшән ихтијари нөгтә олдуғда $[a, x]$ парчасында Коши теореминин бүтүн шәртләри өдәниләр. Буна көрә дә (a, x) интервалында јерләшән елә ξ нөгтәси вар ки,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} \qquad (6)$$

бәрабәрлији доғрудур. $\xi\in(a, x)$ олдуғундан ајдындыр ки, $x\to a$ шәртиндә $\xi\to a$ олар. Онда (6) бәрабәрлијиндән тәләб олунан (5) бәрабәрлији алыныр:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=A.$$

Гејд 1. $x=a$ нөгтәси әвәзинә ∞, $-\infty$ вә $+\infty$ символларынын бирини көтүрдүкдә дә Лопитал гајдасы доғрудур. Буну $a=\infty$ үчүн исбат едәк. Фәрз едәк ки, $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары x-ин кифајәт гәдәр бөјүк бүтүн гијмәтләриндә тә'јин олунмуш, диференсиалланан вә $\varphi'(x)\neq 0$ шәртләрини өдәјән функсијалардыр:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0.$$

Онда $x=\frac{1}{t}$ гәбул етсәк $f\left(\frac{1}{t}\right)$ вә $\varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ функсијаларына $t\to 0$ шәртиндә Лопитал гајдасыны тәтбиг етмәк олар:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

јә'ни $x\to\infty$ шәртиндә Лопитал гајдасы доғрудур.

Гејд 2. Әкәр $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијаларынын a нөгтәсинин мүәјјән әтрафында n-тәртибли төрәмәләри варса,

$$f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0,$$
$$\varphi'(a)=\varphi''(a)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(a)=0$$

мүнасибәтләри вә $f^{(n)}(x)$, $\varphi^{(n)}(x)$ төрәмәләри үчүн теоремин шәртләри өдәнилирсә, онда Лопитал гајдасыны n дәфә ардычыл тәтбиг етмәклә

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{\varphi^{(n)}(x)} \qquad (7)$$

бәрабәрлијини алмаг олар (әлбәттә, сағ тәрәфдәки лимит сонлу олдугда).

Гејд 3. Теоремин тәрси доғру дејилдир, јә'ни фуксијаларын өзләринин нисбәтинин лимити олмасындан онларын төрәмәләри нисбәтинин лимити олмасы алынмыр. Доғрудан да,

$$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x} \quad \text{вә} \quad \varphi(x)=\sin x$$

функсијаларынын нисбәтинин лимити вар:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\times$$
$$\times\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot 0=0,$$

лакин онларын төрәмәләри нисбәтинин лимити јохдур:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x^2\sin\frac{1}{x}\right]'}{[\sin x]'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Функсијаларын төрәмәләри нисбәтинин лимити олмадыгда өзләринин нисбәтинин лимити ола да биләр, олмаја да биләр.

Мисал 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{1}=a.$$

1349—24

Мисал 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\operatorname{tg} bx)'}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\sec^2 bx}=\frac{a}{b}.$$

Мисал 3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{ax}-e^{-2ax})'}{[\ln(1+x)]'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{\frac{1}{1+x}}=\frac{3a}{1}=3a.$$

$\frac{\infty}{\infty}$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлијин ачылышы

Т е о р е м 2 (Лопитал гајдасы). *Тутаг ки, $f(x)$ вә $\varphi(x)$ функсијалары $x=a$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында (a нөгтәси мүстәсна олмагла) тә'јин олунмуш, диференсиалланан вә $\varphi'(x)\neq 0$ шәртләрини өдәјән функсијалардыр (a нөгтәсинин һәмин әтрафында):*

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty. \quad (8)$$

Әкәр функсијаларын төрәмәләри нисбәтинин

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A \quad (9)$$

лимити варса, онда функсијаларын өзләринин дә нисбәтинин лимити вар вә һәмин әдәдә бәрабәрдир:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A. \quad (10)$$

И с б а т ы. (9) бәрабәрлијинә көрә верилмиш $\varepsilon>0$ әдәдинә гаршы елә (a, x_0) интервалы тапмаг олар ки, x-ин һәмин интервалдакы бүтүн гијмәтләриндә

$$\left|\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}-A\right|<\varepsilon \quad (11)$$

бәрабәрсизлији доғру олар. Бундан башга, (8) шәртләринә көрә:

$$\psi(x)=\frac{\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{\frac{f(x)-f(x_0)}{f(x)}}=\frac{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}\to 1 \qquad (x\to a).$$

Инди

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}\cdot\psi(x)$$

бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки биринчи вуруға Коши теоремини тәтбиг едәк:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\cdot\psi(x), \quad \xi\in(x_0, x).$$

Бу бәрабәрлији

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}+\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}[\psi(x)-1]$$

шәклиндә јазсаг, x-ин $|\psi(x)-1|<\varepsilon$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}-A\right|\leqslant\left|\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}-A\right|+\left|\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\right|\,|\psi(x)-1|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon+(|A|+\varepsilon)\varepsilon \quad (12)$$

бәрабәрсизлији доғру олар. $\varepsilon>0$ ихтијари кичик әдәд олдуғундан (12) бәрабәрсизлијиндән

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=A$$

мүнасибәти алыныр.

Г е ј д 4. I-чи теорем һаггындакы 1—3 гејдләри ујғун шәкилдә бу теорем һаггында да доғрудур.

Мисал 4. Сабит $\alpha>0$ вә $a>1$ әдәдләри үчүн

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a e}{x\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a e}{\alpha x^\alpha}=0$$

бәрабәрлији доғру олар, јә'ни логарифмик $\log_a x$ функсијасы $x\to+\infty$ шәртиндә x-ин истәнилән мүсбәт (һәтта, ән кичик) гүввәтиндән һәмишә аз сүр'әтлә артыр.

Мисал 5. Истәнилән сабит $\alpha>0$ вә $a>1$ әдәдләри үчүн

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^x\ln a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{a^x(\ln a)^2}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(n-1)]x^{\alpha-n}}{a^x(\ln a)^n}=0 \quad (\alpha-n\leqslant 0)$$

бәрабәрлији доғрудур, јә'ни x-ин истәнилән гүввәти (һәтта, ән бөјүк) үстлү a^x $(a>1)$ функсијасындан һәмишә аз сүр'әтлә артыр.

Мисал 6.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=0.$$

$\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0 шәклиндә гејри-мүәјјәнликләрин ачылышы

1) $\infty-\infty$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлик $\frac{0}{0}$ вә ја $\frac{\infty}{\infty}$ шәклиндә гејри-мүәјјәнликләрә кәтирилир вә Лопитал гајдасы илә һесабланыр. Доғрудан да, $f(x)\to\infty$ $(x\to a)$ вә $\varphi(x)\to\infty$ $(x\to a)$ оларса, онда:

$$f(x)-\varphi(x)=\left[\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]:\frac{1}{f(x)\varphi(x)}=\frac{\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\,\varphi(x)}}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$

вә ја

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{f(x)\varphi(x)}{\left[\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]^{-1}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Мисал 7.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0.$$

2) $0\cdot\infty$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлик $\frac{0}{0}$ вә ја $\frac{\infty}{\infty}$ шәклиндә гејри-мүәјјәнликләрә кәтирилир вә Лопитал гајдасы илә һесабланыр. Доғрудан да, $f(x)\to 0$ $(x\to a)$ вә $\varphi(x)\to\infty$ $(x\to a)$ оларса, онда:

$$f(x)\varphi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}\ \left(\frac{0}{0}\right)$$

вә јахуд

$$f(x)\varphi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}\qquad\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Мисал 8.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}x\ln x=\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

3) 1^∞, ∞^0 вә 0^0 шәклиндә гејри-мүәјјәнликләр $0\cdot\infty$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлијә кәтирилир. Доғрудан да, $f(x)\to 1$ $(x\to a)$ вә $\varphi(x)\to\infty$ $(x\to a)$ оларса, онда $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$ бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфини логарифмләмәклә

$$\ln y=\varphi(x)\cdot\ln f(x)\quad(\infty\cdot 0)$$

шәклинә кәтирмәк олар. Бунун лимитини һесабладыгдан сонра

$$\lim_{x\to a}y=\lim_{x\to a}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to a}\ln y}$$

бәрабәрлијиндән $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$ ифадәсинин лимитини тапмаг олар.

∞^0 вә 0^0 гејри-мүәјјәнликләри дә һәмин гајда илә $0\cdot\infty$ шәклиндә гејри-мүәјјәнлијә кәтирилир.

Мисал 9.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}x^x=?\quad(0^0).$$

$y=x^x$ функсијасыны логарифмләсәк:

$$\ln y=x\ln x.$$

Сонра исә 8-чи мисала көрә:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\ln y=\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}x\ln x=0.$$

Бурадан:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}x^x=\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}y=e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y}=e^0=1.$$

Мисал 10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}=?\quad(\infty^0)$

$$y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x},\quad \ln y=\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x\quad\left(x<\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\sec^2 x}{\sec^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg} x=0.$$

Бурадан

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\ln y}=e^0=1.$$

§ 5. ТЕЈЛОР ДҮСТУРУ

I. Чохһәдли үчүн Тејлор[1] дүстуру

Тутаг ки,

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\quad(a_n\neq 0)\qquad(1)$$

[1] Брук Тејлор (1685—1731) инкилис ријазијјатчысыдыр.

n-дәрәчәли чохһәдли вә a һәр һансы һәгиги әдәддир. $P(x)$ чохһәдлисини һәмишә $x-a$ фәргинин гүввәтләринә көрә јазмаг олар, јә'ни елә $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n$ әдәдләри тапмаг олар ки,

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n \qquad (2)$$

бәрабәрлији доғру олсун. b_κ ($\kappa = 0, 1, \ldots, n$) әмсалларыны тапмаг үчүн (2) бәрабәрлијини ардычыл олараг n дәфә диференсиаллајаг:

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n,$$
$$P'(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + \ldots + nb_n(x-a)^{n-1},$$
$$P''(x) = 2b_2 + 3\cdot 2\cdot b_3(x-a) + \ldots + n(n-1)\,b_n(x-a)^{n-2},$$
$$P'''(x) = 3\cdot 2\cdot b_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1\cdot b_n.$$

Бу бәрабәрликләрдә x әвәзинә $x=a$ јазсаг,

$$P(a) = b_0,\ P'(a) = b_1,\quad P''(a) = 2!\,b_2,\quad P'''(a) = 3!\,b_3,\ \ldots,\ P^{(n)}(a) = n!\,b_n$$

олар. Бурадан:

$$b_0 = P(a),\ b_1 = \frac{P'(a)}{1!},\ b_2 = \frac{P''(a)}{2!},\ \ldots,\ b_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}.$$

Бу гијмәтләри (2) бәрабәрлијиндә јазараг $P(x)$ чохһәдлисинин $x-a$ фәргинин гүввәтләринә көрә ајрылышыны тапарыг:

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (3)$$

(3) бәрабәрлијинә чохһәдли үчүн *Тејлор дүстуру* дејилир. $a=0$ олдугда Тејлор дүстурунун хүсуси һалыны аларыг:

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \qquad (4)$$

Бу дүстура чохһәдли үчүн *Маклорен*[1] *дүстуру* дејилир.

(3) дүстуру көстәрир ки, чохһәдлинин вә төрәмәләринин һәр һансы a нөгтәсиндә гијмәтләри мә'лум олдугда онун истәнилән x нөгтәсиндә гијмәтини тапмаг олар.

Мисал 1. $P(x) = (a+x)^n$ (n натурал әдәддир) чохһәдлисини x-ин гүввәтләри шәклиндә, јә'ни (4) дүстуру шәклиндә көстәрмәли.

$$P^{(\kappa)}(x) = n(n-1)\ldots(n-\kappa+1)(a+x)^{n-\kappa}$$

олдуғундан:

$$P^{(\kappa)}(0) = n(n-1)\ldots(n-\kappa+1)\,a^{n-\kappa}.$$

---

[1] Колин Маклорен (1698—1746) шотландија ријазијјатчысыдыр.

Онда (4) дүстуруна көрә:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 2}{(n-1)!}ax^{n-1} + x^n. \qquad (5)$$

Бурада

$$C_n^\kappa = \frac{n(n-1)\ldots(n-\kappa+1)}{\kappa!},\quad C_n^n = C_n^0 = 1$$

ишарәсини гәбул етсәк (5) дүстуруну

$$(a+x)^n = \sum_{\kappa=0}^{n} C_n^\kappa\, a^{n-\kappa}x^\kappa \qquad (6)$$

шәклиндә јаза биләрик.

Бу бәрабәрлијә (вә һәм дә (5) бәрабәрлијинә) *Нјутонун бином дүстуру*, C_n^κ әдәдләринә исә *биномиал әмсаллар* дејилир.

II. Ихтијари функсија үчүн Тејлор дүстуру

Фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасынын $x=a$ нөгтәсини өз дахилинә алан һәр һансы интервалда $(n+1)$-тәртибә гәдәр ($n+1$ дахил олмагла) бүтүн төрәмәләри вар. Онда һәмин функсија үчүн

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (7)$$

чохһәдлисини дүзәлтмәк олар. Бу чохһәдлијә $f(x)$ функсијасынын *n-дәрәчәли Тејлор чохһәдлиси* дејилир. Ајдындыр ки, $f(x)$ функсијасы n-дәрәчәли чохһәдли олдугда онун n-дәрәчәли Тејлор чохһәдлиси ејниликлә өзүнә бәрабәрдир: $T(x) \equiv f(x)$.

$f(x)$ функсијасы n-дәрәчәли чохһәдли олмадыгда исә $f(x)-T(x)$ фәрги, үмумијјәтлә, сыфырдан фәргли олар. Бу фәрги $R_n(x)$ илә ишарә етсәк:

$$f(x) - T(x) = R_n(x),$$
$$f(x) = T(x) + R_n(x)$$

вә ја

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \qquad (8)$$

(8) дүстуруна $f(x)$-ин $x-a$ фәргинин гүввәтләринә көрә јазылмыш *Тејлор дүстуру*, $R_n(x)$ функсијасына исә Тејлор дүсту-

рунун *галыг һәдди* дејилир. Галыг һәддин кичик олдуғу x нөгтәләриндә $T(x)$ Тејлор чохһәдлисини $f(x)$ функсијасынын тәгриби гијмәти һесаб етмәк олар.

$f(x)$ функсијасы илә онун Тејлор чохһәдлиси вә һәм дә онларын ејни тәртибли төрәмәләри (n тәртибә гәдәр) $x=a$ нөгтәсиндә бир-биринә бәрабәр олур:

$$f(a) = T(a),$$
$$f'(a) = T'(a),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f^{(n)}(a) = T^{(n)}(a),$$

јердә галан нөгтәләрдә исә $f(x)$ функсијасы өзүнүн $T(x)$ Тејлор чохһәдлисинә бәрабәр олмаја биләр. Бу һалда $f(x)$ функсијасыны $T(x)$ чохһәдлиси илә әвәз етдикдә $R_n(x)$ галыг һәдди гәдәр хәта әмәлә кәлир. Инди бу галыг һәдди гијмәтләндирмәклә мәшғул олаг.

Тејлор дүстурунун галыг һәддини

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\varphi(x) \tag{9}$$

шәклиндә ахтараг. Бу гијмәти (8) дүстурунда јеринә јазсаг:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{\varphi(x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{10}$$

x-ин гејд олунмуш гијмәтиндә $\varphi(x)$ функсијасынын (10) бәрабәрлијини өдәјән гијмәтини φ илә ишарә едәк вә ашағыдакы кими көмәкчи функсија дүзәлдәк:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \ldots - \\ - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{\varphi}{n+1}(x-t)^{n+1}.$$

Бу функсијанын төрәмәсини тапаг:

$$F'(t) = -f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \\ + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \ldots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \\ + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{\varphi}{n!}(x-t)^n,$$

ислаһ етсәк:

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{\varphi}{n!}(x-t)^n. \tag{11}$$

$F(t)$-нин ифадәсиндән ајдындыр ки, онун a-нын јахын әтрафындакы бүтүн нөгтәләрдә төрәмәси вар вә $F(x) = F(a) = 0$ ((10) бәрабәрлијинә көрә) шәртләрини өдәјир. Онда һәмин функсијаја $[a, x]$ парчасында Ролл теоремини тәтбиг етмәк олар. Һәмин теоремә көрә t-нин (a, x) интервалында јерләшән елә ξ гијмәти вар ки, $F(t)$ функсијасынын (11) төрәмәси һәмин нөгтәдә сыфра бәрабәрдир:

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + \frac{\varphi}{n!}(x-\xi)^n = 0.$$

Бурадан:

$$\varphi = f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (a, x).$$

Бу гијмәти (10) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг, Тејлор дүстуру

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{12}$$

шәклиндә јазылар. Бу бәрабәрликдәки

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi \in (a, x) \tag{13}$$

ифадәси *галыг һәддин Лагранж шәкли* адланыр.

Лагранж дүстурунда (§ 2) олдуғу кими бурада да ξ әдәдини

$$\xi = a + \theta(x-a) \quad (0<\theta<1)$$

шәклиндә көстәрмәк олар. Онда (12) Тејлор дүстуру

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{14}$$

шәклиндә јазылар. Бурада $a=0$ көтүрсәк $f(x)$ функсијасы үчүн Маклорен дүстуруну аларыг:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1). \tag{15}$$

Гејд едәк ки, (14) Тејлор дүстуру Лагранж дүстурунун (§ 2) үмумиләшмәсидир. $n=0$ олдугда (14) дүстурундан

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'[a+\theta(x-a)]$$

вә јахуд

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'[a+\theta(x-a)]$$

Лагранж дүстуру алыныр.

Тејлор дүстурунун галыг һәдди үчүн (13) бәрабәрлијиндән фәргли башга ифадәләр дә тапмаг олар. Галыг һәддин

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{n!}(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n, \quad 0<\theta<1, \qquad (16)$$

шәклиндә ифадәсинә *Коши шәкли,*

$$R_n(x) = o[(x-a)^n] \qquad (17)$$

шәклиндә ифадәсинә исә *Пеано*[1] *шәкли* дејилир. Лагранж шәклини алмаг үчүн апардығымыз мүһакимәјә охшар үсулла галыг һәддин (16) вә (17) ифадәләрини алмаг олар.

Хүсуси һалда, $f(x)$ функсијасынын $(n+1)$-тәртибли төрәмәси $x=a$ нөгтәсинин јахын әтрафында мәһдуд, јә'ни

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M \qquad (18)$$

оларса, онда (17) мүнасибәти исбат етдијимиз (13) дүстурундан алыныр. Доғрудан да, (18) мүнасибәтинә әсасән (13)-дән $x \to a$ шәртиндә:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} = o[(x-a)^n].$$

Маклорен дүстурунун галыг һәдди үчүн (16) вә (17) мүнасибәтләриндән ујғун олараг

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}x^{n+1}(1-\theta)^n, \qquad (19)$$

(галыг һәддин Коши шәкли) вә

$$R_n(x) = o(x^n) \qquad (20)$$

(галыг һәддин Пеано шәкли) ифадәләрини аларыг. (15) дүстурундан ајдындыр ки, Маклорен дүстурунун галыг һәддинин Лагранж шәкли

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1) \qquad (21)$$

олачагдыр.

Нәһајәт, $x-a=\Delta x$ вә $f(x)-f(a)=\Delta f(a)$ гәбул етсәк, (12) дүстуруну

$$\Delta f(a) = f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\Delta x^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Delta x^{n+1} \qquad (22)$$

шәклиндә,

$$f^{(\kappa)}(a)\Delta x^\kappa = d^\kappa f(a) \qquad (\kappa=1, 2, \ldots, n)$$

[1] Чузеппе Пеано (1858—1932) италијан ријазијјатчысыдыр.

олдуғуну (XV, § 7) нәзәрә алсаг һәмин дүстуру

$$\Delta f(a) = df(a) + \frac{d^2f(a)}{2!} + \ldots + \frac{d^nf(a)}{n!} + \frac{d^{n+1}f(\xi)}{(n+1)!} \qquad (23)$$

шәклиндә јазмаг олар.

§ 6. ТЕЈЛОР ДҮСТУРУНУН МҮХТӘЛИФ ТӘТБИГЛӘРИ

Ријази анализдә вә онун бир чох мәсәләләрә тәтбигиндә Тејлор дүстурундан кениш истифадә олунур. Тејлор дүстуру, чох мүрәккәб функсијалары садә функсијалар олан чохһәдлиләрлә тәгриби әвәз етмәјә имкан верир. Функсијаларын гијмәтини тәгриби һесабларкән, тригонометрик вә логарифмик функсијаларын гијмәтләр чәдвәлини тәртиб едәркән, бир сыра лимитләри вә функсијаларын асимптотик ајрылышыны тапаркән Тејлор дүстурундан истифадә етмәк олар.

Садә олмаг үчүн бурада биз Тејлор дүстурунун хүсуси һалы олан Маклорен дүстуру вә онун тәтбигләриндән данышачағыг.

Тејлор дүстурунун бир чох мәсәләләрә тәтбиги онун галыг һәддинин гијмәтләндирилмәсинә әсасланыр.

I. Галыг һәддин гијмәтләндирилмәси

Фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасынын $x=0$ нөгтәсини өз дахилинә алан һәр һансы интервалда истәнилән тәртибли төрәмәси вар вә бу төрәмәләрин һамысы һәмин интервалда бир сабит M әдәди илә мәһдуддур:

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M \quad (n=1, 2, \ldots). \qquad (1)$$

Онда

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (2)$$

Маклорен сырасынын Лагранж шәклиндә олан

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1) \qquad (3)$$

галыг һәддини

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

вә јахуд

$$|R_n(x)| \leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (4)$$

кими гијмәтләндирмәк олар.

Көстәрәк ки, гејд олунмуш һәр бир x үчүн $a_n = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ ардычыллығынын $n \to \infty$ шәртиндә лимити сыфра бәрабәрдир.

Ајдындыр ки, n-ин кифајәт гәдәр бөјүк гијмәтләриндә $\frac{|x|}{n+1}<1$ олар. Онда n-ин һәр һансы N_0-дан сонра кәлән бүтүн гијмәтләриндә

$$a_{n+1}=\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{|x|^n}{n!}\cdot\frac{|x|}{n+1}<\frac{|x|^n}{n!}=a_n,\ a_{n+1}<a_n,$$

јә'ни $\{a_n\}$ $(n\geqslant N_0)$ ардычыллығы монотон азалан олар. Монотон азалан вә ашағыдан сыфырла мәһдуд $\{a_n\}$ $(a_n\geqslant 0)$ ардычыллығынын сонлу лимити вар (XII, § 3): $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$. Бу лимитин гијмәтини тапмаг үчүн $a_{n+1}=a_n\cdot\frac{|x|}{n+1}$ бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфиндә лимитә кечәк:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1},\ a=a\cdot 0,\ a=0.$$

Демәли, гејд олунмуш һәр бир x үчүн

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0. \tag{5}$$

Онда (4) бәрабәрсизлијиндән

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0, \tag{6}$$

јә'ни (1) шәртини өдәјән $f(x)$ функсијасынын (2) Маклорен дүстурунун (3) галыг һәддинин лимити сыфра бәрабәрдир. Бу көстәрир ки, белә функсијалары n-ин бөјүк гијмәтләриндә

$$T(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

чоxһәдлиси илә әвәз етсәк, алынан хәта чох кичик олар. Бу хәтаны (4) дүстуру илә гијмәтләндирмәк олар.

II. Бир сыра елементар функсијаларын Маклорен дүстуруна көрә ајрылышы

1. $f(x)=e^x$ функсијасынын (2) дүстуруна көрә ајрылышыны тапаг.

$$f(x)=f'(x)=\ldots=f^{(n)}(x)=e^x$$

олдуғундан:

$$f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=e^0=1.$$

Онда (2) дүстуруна көрә:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x). \tag{7}$$

Галыг һәддин Лагранж шәкли

$$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad (0<\theta<1)$$

олдуғундан ону истәнилән $[-R, R]$ $(R>0)$ парчасында гијмәтләндирсәк

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{e^R}{(n+1)!}R^{n+1}.$$

аларыг. Хүсуси һалда, $[-1, 1]$ парчасында:

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}.$$

Демәли, $-1\leqslant x\leqslant 1$ олдугда

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} \tag{8}$$

тәгриби бәрабәрлијинин мүтләг хәтасы $\frac{3}{(n+1)!}$ әдәдиндән кичикдир. $x=1$ көтүрсәк e әдәдинин тәгриби

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

гијмәтини аларыг вә бу заман мүтләг хәта $\frac{3}{(n+1)!}$ әдәдиндән кичик олар. $n=8$ олдугда:

$$e\approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}\approx 2{,}71828.$$

Бурада бурахылан хәта 0,00001 әдәдини ашмыр:

$$R_8<\frac{3}{9!}<0{,}00001.$$

(8) бәрабәрлијиндән истифадә едәрәк e^x функсијасынын гијмәтләрини истәнилән дәгигликлә һесабламаг олар.

2. $f(x)=\sin x$ функсијасы үчүн

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad f^{(n)}(0)=\sin n\frac{\pi}{2}\quad (n=1,\ 2,\ldots)$$

олдуғундан:

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ \ldots.$$

(2) дүстуруна көрә

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}+R_n(x) \tag{9}$$

(n тәк әдәддир) вә

$$R_n(x)=\frac{\sin\left[\theta x+(n+2)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+2)!}x^{n+2}.$$

Бурадан

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \qquad (10)$$

вә (6) бәрабәрлијинә көрә:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

Демәли, $\sin x$ функсијасынын тәгриби гијмәти олараг

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}$$

чохһәдлисини көтүрсәк, бурахылан хәта чох кичик олар вә ону (10) бәрабәрсизлији илә гијмәтләндирмәк мүмкүндүр. Хүсуси һалда, $n=7$ вә $x=\frac{1}{2}$ көтүрсәк, алынан

$$\sin\frac{1}{2}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1}{2^5\cdot 5!}-\frac{1}{2^7\cdot 7!}$$

тәгриби бәрабәрлијинин мүтләг хәтасы

$$\frac{1}{2^9\cdot 9!}<10^{-8}=0{,}00000001$$

әдәдиндән кичик олачагдыр.

3. $f(x)=\cos x$ функсијасы үчүн

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\quad f^{(n)}(0)=\cos n\frac{\pi}{2}$$

вә

$$f(0)=1,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=-1,\quad f'''(0)=0,\ ...$$

олдуғундан

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!}+R_n(x), \qquad (11)$$

(n чүт әдәддир)

$$R_n(x)=\frac{\cos\left[\theta x+(n+2)\frac{\pi}{2}\right]}{(n+2)!}x^{n+2}.$$

Бурадан галыг һәдд үчүн

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}$$

бәрабәрсизлији алыныр.

Ејни гајда илә $\ln(1+x)$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ вә с. кими функсијаларын Маклорен дүстуру илә ајрылышыны алмаг олар.

III. Лимитләрин һесабланмасы

Биз XII фәсилдә (§ 16) сонсуз кичилән функсијаларын баш һиссәсинин ајрылмасындан вә онларын лимитләрин һесабланмасына тәтбигиндән данышдыг.

Мүрәккәб лимитләрин һесабланмасы үчүн функсијаларын баш һиссәсини даһа дәгиг ајырмаг, јә'ни онларын даһа дәгиг асимптотик гијмәтләрини тапмаг лазым кәлир. Бу мәсәләни Тејлор дүстуру илә һәлл етмәк мүмкүндүр.

Әкәр e^x, $\sin x$ вә $\cos x$ функсијаларынын (7), (9) вә (11) Маклорен дүстуру илә ајрылышларынын галыг һәдләринин Пеано шәклиндә (§ 5, (20)) ифадәләрини көтүрсәк, һәмин функсијаларын

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...-(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}+o(x^{n+1}), \qquad (12)$$

(n тәк әдәддир)

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!}+o(x^{n+1})$$

(n чүт әдәддир) кими даһа дәгиг асимптотик гијмәтләрини аларыг. Ејни гајда илә

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+...+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}x^n+o(x^n) \qquad (13)$$

ајрылышларыны да алмаг олар.

(12) вә (13) дүстурларындан лимитләри һесабламаг үчүн истифадә етмәк олар.

Мисал 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=?$$

Бурада (12) бәрабәрлијиндәки икинчи дүстурдан ($n=5$ олдугда) истифадә етсәк:

$$\lim\frac{\sin x-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=\lim\frac{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{120}+o(x^6)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{120}+o(x)\right)=\frac{1}{120}.$$

Мисал 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}-\cos x}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}-o(x^5)}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{12}\cdot x^4+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{12}+o(1)\right)=\frac{1}{12}.$$

XVII ФӘСИЛ

ФУНКСИЈАЛАРЫН ТӨРӘМӘ ВАСИТӘСИЛӘ ТӘДГИГИ ВӘ ГРАФИКЛӘРИНИН ГУРУЛМАСЫ

§ 1. ФУНКСИЈАНЫН САБИТ ОЛМАСЫ ӘЛАМӘТИ

Функсијанын парчада сабит олмасы әламәтини ашағыдакы теорем шәклиндә сөјләмәк олар.

Теорем. ***Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән вә (a, b) интервалында диференсиалланандыр. $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында сабит олмасы үчүн онун $f'(x)$ төрәмәсинин (a, b) интервалынын бүтүн нөгтәләриндә сыфра бәрабәр олмасы зәрури вә кафи шәртдир.***

Шәртин зәрурилији. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасынын бүтүн нөгтәләриндә ејни сабит $f(x)=C$ гијмәтини аларса, онда һәмин нөгтәләрдә онун төрәмәси $f'(x)=0$ олар (XIV, § 1).

Шәртин кафилији. Тутаг ки, $f(x)$ функсијасынын $f'(x)$ төрәмәси (a, b) интервалынын бүтүн нөгтәләриндә сыфра бәрабәрдир. $[a, b]$ парчасынын ихтијари x_0 нөгтәсини гејд етсәк, онда һәмин парчанын истәнилән x нөгтәси үчүн Лагранж теореминә көрә:

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0),\ \xi\in(x_0, x).$$

Шәртә көрә $f'(\xi)=0$ олдуғундан

$$f(x)-f(x_0)=0$$

вә јахуд

$$f(x)=f(x_0)=C,$$

јә'ни $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасынын истәнилән x нөгтәсиндә сабит $f(x_0)$ әдәдинә бәрабәр гијмәт алыр.

Мисал 1. $f_0(x)=\arcsin x+\arccos x$ функсијасынын $(-1, 1)$ интервалынын бүтүн нөгтәләриндә төрәмәси сыфра бәрабәрдир:

$$f_0'(x)=(\arcsin x)'+(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

Буна көрә дә теоремә әсасән $[-1, 1]$ парчасында $f_0(x)=\text{const}$.

$$f_0(0)=\arccos 0+\arcsin 0=\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{2}$$

олдуғундан x-ин $[-1, 1]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә $f_0(x)=\frac{\pi}{2}$, јә'ни $[-1, 1]$ парчасында

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$$

ејнилији доғрудур.

§ 2. ФУНКСИЈАЛАРЫН МОНОТОНЛУГ ӘЛАМӘТИ

Монотон функсијалар (XI, § 10) өзләринин садә дәјишмә ганунуна көрә бүтүн функсијалардан фәргләнир. Буна көрә дә бир чох мәсәләләрин һәллиндә верилмиш функсијанын һәр һансы областда монотон олуб-олмамасыны јохламаг лазым кәлир. Төрәмә анлајышындан истифадә едәрәк функсијанын верилмиш областда монотон олмасы шәртини мүәјјән етмәк олар.

Теорем 1. ***$[a, b]$ парчасында диференсиалланан $y=f(x)$ функсијасынын һәмин парчада азалмајан олмасы үчүн онун $[a, b]$ парчасынын бүтүн нөгтәләриндә төрәмәсинин мәнфи олмамасы ($f'(x)\geqslant 0$) зәрури вә кафи шәртдир.***

Шәртин зәрурилији. $f(x)$ функсијасы азалмајан олдуғундан $[a, b]$ парчасынын истәнилән x $(x\neq b)$ нөгтәси вә $\Delta x>0$ үчүн

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geqslant 0 \qquad (1)$$

бәрабәрсизлији доғру олар $(x+\Delta x\in[a, b])$. Һәмин бәрабәрсизлик истәнилән $\Delta x<0$ вә x $(x\neq a)$ нөгтәси үчүн дә доғрудур. (1) бәрабәрсизлијиндә $\Delta x\to 0$ шәртиндә лимитә кечсәк истәнилән x нөгтәсиндә $f'(x)\geqslant 0$ ($x=a$ нөгтәсиндә сағ төрәмә, $x=b$ нөгтәсиндә исә сол төрәмә көтүрүлүр) олар.

Шәртин кафилији. $[a, b]$ парчасынын истәнилән $x_1<x_2$ нөгтәләрини көтүрүб $[x_1, x_2]$ парчасына Лагранж теоремини тәтбиг едәк:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(\xi),\quad \xi\in(x_1, x_2)$$

Бурадан $x_2-x_1>0$ вә $f'(\xi)\geqslant 0$ олдуғундан

$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant 0,$$

$$f(x_2)\geqslant f(x_1),$$

јә'ни $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында азалмајандыр. Кафилијин исбатындан ашағыдакы теоремин доғрулуғу ајдындыр.

Теорем 2. ***Төрәмәси $[a, b]$ парчасынын бүтүн нөгтәләриндә мүсбәт олан $y=f(x)$ функсијасы һәмин парчада артандыр.***

1349—25

Демэли, парчада функсија төрэмэсинин мүсбэт олмасы онун артан олмасы үчүн кафи шэртдир. Лакин функсија төрэмэсинин мүсбэт олмасы онун артан олмасы үчүн зэрури шэрт дејилдир. Доғрудан да, $f(x)=x^3$ функсијасы $[-1, 1]$ парчасында монотон артандыр, лакин онун $f'(x)=3x^2$ төрэмэси һэмин парчада мүсбэт дејил, $x=0$ нөгтэсиндэ сыфра чеврилир.

Артан функсијанын төрэмэси парчанын ајры-ајры нөгтэлэриндэ сыфра чеврилэ билэр, лакин бу нөгтэлэр һеч бир парча тэшкил едэ билмэз. Бу тэклифин тэрси дэ доғрудур.

$f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында төрэмэси мэнфи дејилсэ $f'(x)\geqslant 0$ вэ төрэмэнин сыфыр олдуғу $f'(x)=0$ нөгтэлэр чохлуғу һеч бир парча тэшкил етмирсэ, онда функсија һэмин парчада монотон артан олар.

Артмајан вэ азалмајан функсијалар үчүн дэ аналожи тэклифлэр доғрудур.

Т е о р е м 3. *$[a, b]$ парчасында диференсиалланан $y=f(x)$ функсијасынын һэмин парчада артмајан олмасы үчүн онун $[a, b]$ парчасынын бүтүн нөгтэлэриндэ төрэмэсинин мүсбэт олмамасы ($f'(x)\leqslant 0$) зэрури вэ кафи шэртдир.*

$[a, b]$ парчасынын бүтүн нөгтэлэриндэ төрэмэси мэнфи олан $y=f(x)$ функсијасы һэмин парчада азаландыр.

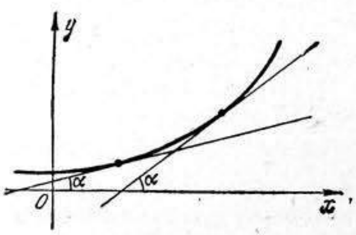
Исбат етдијимиз теоремлэрин һэндэси изаһыны верэк.

Экэр $y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында монотон артандырса, онда һэмин парча үзрэ солдан-сағa һэрэкэт етдикдэ функсијанын графики олан эјри кетдикчэ јухары галхыр (149-чу шэкил). Буна көрэ дэ онун истэнилэн нөгтэсиндэ чэкилэн тохунан абсис охунун мүсбэт истигамэти илэ һэмишэ ити α бучағы эмэлэ кэтирэр. Төрэмэнин һэндэси мэ'насына көрэ $\operatorname{tg}\alpha=f'(x)$ вэ ити бучағын тангенси мэнфи эдэд олмадығындан

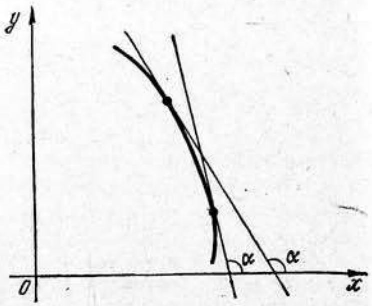
$$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha\geqslant 0$$

олар. Бу тэклифин тэрси дэ доғрудур.

Бучаг эмсалы мүсбэт эдэд олан эјри кетдикчэ јухары галхыр. Демэли, $y=f(x)$ функсијасынын төрэмэси мүсбэт эдэд оларса, онун графики олан эјри мүнтэзэм јухарыја галхан эјри олар. Бу исэ $f(x)$ функсијасынын артан олдуғуну көстэрир.



Шэкил 149.



Шэкил 150.

$y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында азалан олдугда x дэјишэни һэмин парча үзрэ солдан-сағa дэјишдикдэ функсијанын графики олан эјри кетдикчэ ашағы енэчэкдир (150-чи шэкил). Буна көрэ дэ эјринин истэнилэн нөгтэсинэ чэкилмиш тохунан абсис охунун мүсбэт истигамэти илэ ити бучаг эмэлэ кэтирэ билмэз. Јэ'ни, x-ин $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмэтлэриндэ $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha\leqslant 0$. Бунун тэрси дэ доғрудур. x-ин $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмэтлэриндэ

$$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha<0$$

оларса, онда $y=f(x)$ функсијасы һэмин парчада азалан олар.

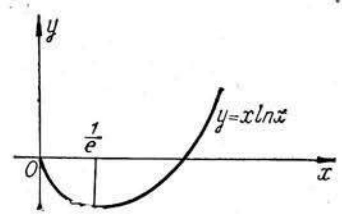
Мисал 1. $f(x)=x^2$ функсијасынын $f'(x)=2x$ төрэмэси $(-\infty, 0)$ интервалында мэнфи (чүнки, $x<0$), $(0, \infty)$ интервалында исэ мүсбэтдир. Буна көрэ дэ $f(x)=x^2$ функсијасы $(-\infty, 0)$ интервалында азалан, $(0, \infty)$ интервалында исэ артандыр. Бу һэмин функсијанын графикиндэн дэ ајдындыр (99-чу шэкил).

Мисал 2. $f(x)=x\ln x$ функсијасынын артан вэ азалан олдуғу интерваллары тапмалы. Бу функсијанын варлыг областы $(0, +\infty)$ интервалыдыр. $f'(x)=\ln x+1$ олдуғундан функсијанын азалан, јэ'ни $\ln x+1<0$ олмасы үчүн $\ln x<-1$, $x<e^{-1}$ олмалыдыр. Демэли, функсија $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ интервалында азаландыр.

$$\ln x+1>0,\ \ln x>-1,\ x>e^{-1}$$

олмасындан ајдындыр ки, верилмиш функсија $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ интервалында артандыр (151-чи шэкил).

Һэмин функсијанын төрэмэси $x=\frac{1}{e}$ нөгтэсиндэ сыфра бэрабэрдир.



Шэкил 151.

§ 3. ФУНКСИЈАЛАРЫН МОНОТОНЛУГ ЭЛАМЭТИНИН ТЭТБИГИ ИЛЭ БЭРАБЭРСИЗЛИКЛЭРИН ИСБАТЫ

Тутаг ки, (a, b) интервалында диференсиалланан, $\varphi(a)=f(a)$ шэртини өдэјэн $f(x)$ вэ $\varphi(x)$ функсијалары үчүн x-ин һэмин интервалдакы бүтүн гијмэтлэриндэ $f(x)>\varphi(x)$ бэрабэрсизлијинин доғрулуғуну исбат етмэк лазымдыр. Бу мэгсэдлэ

$$F(x)=f(x)-\varphi(x)$$

функсијасынын һэмин интервалда артан олдуғуну көстэрмэк кифајэтдир. Онда x-ин (a, b) интервалындакы бүтүн гијмэтлэриндэ:

$$F(x)>F(a),\ f(x)-\varphi(x)>0,\ f(x)>\varphi(x).$$

I. Истәнилән $x>0$ үчүн

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x \qquad (1)$$

бәрабәрсизликләринин доғрулуғуну исбат етмәли.

Әввәлчә (1) бәрабәрсизлијинин сағ тәрәфини исбат едәк. Бу мәгсәдлә

$$\psi(x)=x-\ln(1+x)$$

функсијасыны дүзәлдәк. $\psi(x)$ функсијасынын төрәмәси $(0, +\infty)$ интервалында мүсбәтдир:

$$\psi'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0, \quad x>0.$$

Демәли, һәмин интервалда $\psi(x)$ артандыр (§ 2). Буна көрә дә x-ин $(0, \infty)$ интервалындакы истәнилән гијмәтиндә:

$$\psi(x)>\psi(0)=0, \quad x-\ln(1+x)>0, \quad x>\ln(1+x). \qquad (2)$$

(1) мүнасибәтиндәки сол бәрабәрсизлији исбат етмәк үчүн

$$\Phi(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$$

функсијасына бахаг. $x>0$ олдугда

$$\Phi'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$$

олмасындан ајдындыр ки, $(0, +\infty)$ интервалында $\Phi(x)$ функсијасы артандыр. Демәли, истәнилән $x>0$ үчүн:

$$\Phi(x)>\Phi(0)=0, \quad \ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)>0,$$

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}. \qquad (3)$$

(2) вә (3) бәрабәрсизликләриндән (1) алыныр.

II. Истәнилән $x>0$ үчүн

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x \qquad (4)$$

бәрабәрсизликләринин доғрулуғуну көстәрмәли.

Әввәлчә $f(x)=x-\sin x$ функсијасына бахаг. $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$ олдуғундан вә $f'(x)=1-\cos x=0$ бәрабәрлији һеч бир парча тәшкил етмәјән $x=2\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ нөгтәләриндә өдәнилдијиндән ајдындыр ки, $f(x)$ функсијасы бүтүн $(-\infty, +\infty)$ әдәд охунда вә хүсуси һалда, $(0, +\infty)$ интервалында артандыр (§ 2). Онда истәнилән $x>0$ үчүн

$$f(x)>f(0)=0, \quad x-\sin x>0$$

вә јахуд

$$x>\sin x. \qquad (5)$$

$$\varphi(x)=\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$$

функсијасынын

$$\varphi'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}-(1-\cos x)$$

төрәмәси x-ин $x>0$ гијмәтләриндә (5) бәрабәрсизлијинә көрә доғру олан

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2} \qquad (6)$$

мүнасибәтинә әсасән мүсбәт олдуғундан $\varphi(x)$ функсијасы $(0, +\infty)$ интервалында артандыр. Онда истәнилән $x>0$ үчүн:

$$\varphi(x)>\varphi(0)=0, \quad \sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)>0$$

вә јахуд

$$\sin x>x-\frac{x^3}{6}. \qquad (7)$$

Беләликлә, (5) вә (7) бәрабәрсизликләриндән (4) алыныр.

Гејд едәк ки, (5) бәрабәрсизлији әввәлләр (XII, § 14) ајры үсулла да исбат едилмишдир.

III. x-ин $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә

$$\sin x>\frac{2}{\pi}x \qquad (8)$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Буну исбат етмәк үчүн әввәлчә

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

функсијасынын $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ јарыминтервалында азалан олдуғуну көстәрәк.

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^2}\cdot\cos x$$

вә $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ интервалында $x<\operatorname{tg} x$ (XII, § 14) олдуғундан һәмин интервалда $f'(x)<0$ олар. Демәли, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ областында $f(x)$ функсијасы азаландыр (§ 2). Онда истәнилән $0<x<\frac{\pi}{2}$ үчүн:

$$f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad \frac{\sin x}{x} > \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

вә јахуд

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}.$$

IV. Истәнилән $x > 0$ үчүн

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad (9)$$

бәрабәрсизликләри доғрудур.

(9) мүнасибәтиндәки сол бәрабәрсизлик (6) бәрабәрсизлијиндән алыныр. Икинчи бәрабәрсизлик исә

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$$

функсијасынын $(0, +\infty)$ интервалында артан олмасындан ајдындыр.

V. Истәнилән $x > 0$ үчүн

$$e^x > 1 + x \qquad (10)$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Доғрудан да, $f(x) = e^x - 1 - x$ функсијасынын $f'(x) = e^x - 1$ төрәмәси x-ин $x > 0$ гијмәтләриндә мүсбәт олдуғундан һәмин функсија $(0, +\infty)$ интервалында артандыр. Бурадан да:

$$f(x) > f(0) = 0, \quad e^x - 1 - x > 0, \quad e^x > 1 + x.$$

§ 4. ФУНКСИЈАНЫН ЕКСТРЕМУМУ

Фәрз едәк ки, $y = f(x)$, $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш функсија, x_0 исә һәмин парчанын һәр һансы дахили нөгтәсидир.

Т ә' р и ф. *Әкәр x-ин x_0 нөгтәсинин һәр һансы $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ әтрафында јерләшән бүтүн гијмәтләриндә*

$$f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (1)$$

бәрабәрсизлији өдәниләрсә, онда дејирләр ки, $f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндә локал максимуму вар. $f(x_0)$ әдәдинә функсијанын локал максимум гијмәти дејилир.

Аналожи олараг, x-ин x_0 нөгтәсинин һәр һансы $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ әтрафында јерләшән бүтүн гијмәтләриндә

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

бәрабәрсизлији өдәниләрсә, онда дејирләр ки, $f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндә локал минимуму вар. $f(x_0)$ әдәдинә функсијанын локал минимум гијмәти дејилир.

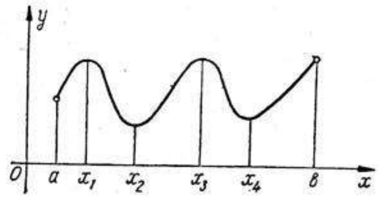
Тә'рифдән ајдындыр ки, функсијанын локал максимуму вә локал минимуму бахылан нөгтәнин јахын әтрафына нәзәрән көтүрүлүр (локал, латынча мә'насы «јерли» олан «locus» сөзүндән көтүрүлмүшдүр).

Фуксијанын локал максимуму вә локал минимумуна бирликдә функсијанын *локал екстремуму* (екстремум латынча мә'насы «сонунчу (гијмәт)» олан extremus сөзүндән көтүрүлмүшдүр) дејилир. Функсија локал екстремумуну областын дахили нөгтәләриндә алдығындан она *дахили екстремум* да дејилир.

$f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасынын a учундакы $f(a)$ гијмәти һәмин нөгтәнин һәр һансы сағ $(a, a+\delta)$ $(\delta > 0)$ әтрафындакы бүтүн гијмәтләрдән кичик (бөјүк) олмазса, јә'ни $f(a) \geqslant f(x)$, $x \in (a, a+\delta)$ оларса, онда дејирләр ки, $f(x)$ функсијасынын $x = a$ нөгтәсиндә *сәрһәд максимуму* (минимуму) вар. Парчанын $x = b$ учунда сәрһәд максимуму вә сәрһәд минимуму да ејни гајда илә тә'јин олунур.

Функсијанын сәрһәд максимуму вә сәрһәд минимуму бирликдә *функсијанын сәрһәд екстремуму* адланыр.

Локал екстремумун тә'рифиндән ајдындыр ки, функсијанын өз тә'јин областында локал екстремуму ола да биләр, олмаја да биләр. Функсијанын тә'јин областында бир вә ја бир нечә (һәтта, сонсуз сајда) локал минимуму вә локал максимуму ола биләр. Мәсәлән, $f(x) = x^3$ функсијасынын (98-чи шәкил) локал екстремуму јохдур. $f(x) = x^2$ функсијасынын исә $x = 0$ нөгтәсиндә локал минимуму вардыр (99-чу шәкил). Графики 152-чи шәкилдә верилмиш функсијанын x_1 вә x_3 нөгтәләриндә локал максимуму, x_2 вә x_4 нөгтәләриндә исә локал минимуму вардыр. Функсијанын $x = a$ нөгтәсиндә *сәрһәд минимуму*, $x = b$ нөгтәсиндә исә *сәрһәд максимуму* вар.



Шәкил 152.

Функсијанын локал екстремуму һансы нөгтәләрдә ола биләр?

Т е о р е м (Локал екстремумун варлығы үчүн зәрури шәрт). ***$y = f(x)$ функсијасынын диференсиалланан олдуғу x_0 нөгтәсиндә локал екстремуму варса, онун төрәмәси һәмин нөгтәдә сыфра бәрабәрдир: $f'(x_0) = 0$.***

И с б а т ы. Тутаг ки, $f(x)$ функсијасынын x_0 нөгтәсиндә екстремуму (мәсәлән, локал максимуму) вар. Онда ихтијари (кичик) Δx артымы үчүн:

$$f(x_0 + \Delta x) \leqslant f(x_0), \quad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leqslant 0.$$

Бурадан

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0, \qquad \Delta x > 0 \ \text{олдугда},$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0, \qquad \Delta x<0 \quad \text{олдугда.}$$

Бу бәрабәрсизликләрдә $\Delta x \to 0$ шәртиндә лимитә кечсәк, ејни заманда

$$f'(x_0) \leqslant 0, \quad f'(x_0) \geqslant 0$$

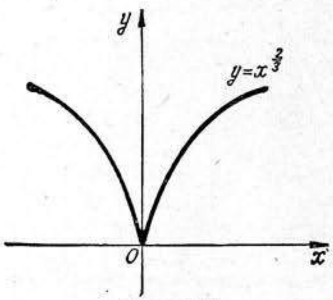
мүнасибәтләри алыныр, бурадан да $f'(x_0)=0$.

Демәли, диференсиалланан $f(x)$ функсијасынын локал екстремуму, онун төрәмәсинин сыфра бәрабәр олдуғу нөгтәләрдә ола биләр.

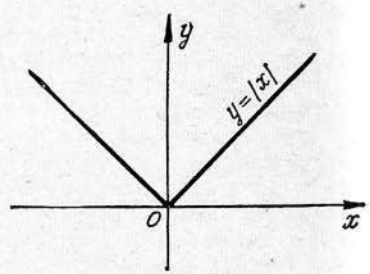
Функсија төрәмәсинин сыфра бәрабәр олдуғу нөгтәләрә бә'зән һәмин функсијанын *стасионар нөгтәләри* дејилир.

Функсијанын локал екстремуму, төрәмәси олмадығы ($f'(x_0)=\infty$ олан вә $f'(x_0)$-ин һеч олмадығы) нөгтәләрдә дә ола биләр.

Мәсәлән, $y=x^{\frac{2}{3}}$ вә $y=|x|$ функсијаларынын һәр икисинин $x=0$ нөгтәсиндә төрәмәси јохдур, лакин һәмин $x=0$ нөгтәсиндә онларын локал минимуму вар (153-чү вә 154-чү шәкилләр).



Шәкил 153.



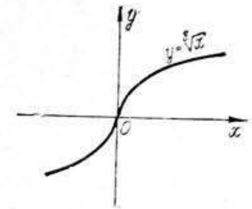
Шәкил 154.

Кәсилмәјән функсија төрәмәсинин сыфра чеврилдији вә төрәмәси олмадығы нөгтәләрә (аргументин гијмәтләринә) һәмин функсијанын *бөһран нөгтәләри* дејилир. Бурадан ајдындыр ки, функсијанын бөһран нөгтәләри онун стасионар нөгтәләри илә төрәмәсинин олмадығы нөгтәләрдән ибарәтдир.

Јухарыда дејиләнләрә әсасән функсијанын локал екстремумунун варлығы үчүн шәртин зәрурилијини ашағыдакы үмуми шәкилдә сөјләмәк олар.

Шәртин зәрурилији. Функсијанын локал екстремум гијмәт алдығы һәр бир нөгтә һәмин функсијанын бөһран нөгтәсидир. Лакин һәр бир бөһран нөгтәсиндә функсијанын локал екстремуму олдуғуну дүшүнмәк сәһвдир. Бөһран нөгтәсиндә функсија локал екстремум гијмәт алмаја да биләр. Мәсәлән, $x=0$ нөгтәси $f(x)=x^3$ функсијасынын бөһран нөгтәсидир, функсијанын

$f'(x)=3x^2$ төрәмәси һәмин нөгтәдә сыфра бәрабәрдир. Лакин функсија һәмин нөгтәдә локал екстремум гијмәт алмыр (98-чи шәкил). Еләчә дә, $x=0$ нөгтәси $f(x)=\sqrt[3]{x}$ функсијасынын бөһран нөгтәсидир. Бу нөгтәдә функсијанын $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ төрәмәси сонсузлуға бәрабәрдир. Верилмиш функсија $x=0$ бөһран нөгтәсиндә локал екстремум гијмәт алмыр (155-чи шәкил).



Шәкил 155.

Верилмиш функсијанын бөһран нөгтәсиндә локал екстремуму олдуғуну нечә билмәк олар?

§ 5. ЕКСТРЕМУМУН ВАРЛЫҒЫ ҮЧҮН КАФИ ШӘРТЛӘР

Верилмиш функсија өзүнүн бөһран нөгтәсиндә нә заман локал екстремум гијмәт алачағыны тә'јин етмәк үчүн нөгтә әтрафында онун төрәмәсини тәдгиг едирләр. Бу гајда илә функсијанын биртәртибли, икитәртибли вә с. төрәмәләриндән истифадә етмәклә локал екстремумун варлығы үчүн мүхтәлиф кафи шәртләр верилир.

Т е о р е м 1. ***Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы x_0 бөһран нөгтәсинин мүәјјән әтрафында кәсилмәјән вә һәмин әтрафда, x_0 нөгтәси мүстәсна олмагла, диференсиалланан функсијадыр. Әкәр солдан сağа x_0 нөгтәсиндән кечдикдә функсијанын $f'(x)$ төрәмәси өз ишарәсини дәјиширсә, онда һәмин нөгтәдә функсијанын локал екстремуму вар, солдан сağа x_0 нөгтәсиндән кечдикдә функсијанын төрәмәси өз ишарәсини дәјишмәдикдә исә һәмин нөгтәдә функсијанын локал екстремуму јохдур.***

Бу һалда, функсијанын $f'(x)$ төрәмәси x_0 нөгтәсиндән солда (јә'ни, $x<x_0$ олдугда) мүсбәт, сағда (јә'ни $x>x_0$ олдугда) мәнфи олдугда һәмин нөгтәдә функсијанын локал максимуму вар, функсијанын төрәмәси x_0 нөгтәсиндән солда мәнфи $f'(x)<0$, сағда мүсбәт $f'(x)>0$ олдугда исә һәмин нөгтәдә функсијанын локал минимуму вар.

И с б а т ы. Әввәлчә, фәрз едәк ки, функсија төрәмәси өз ишарәсини x_0 нөгтәсиндә мүсбәтдән мәнфијә дәјишир, јә'ни $x<x_0$ олдугда $f'(x)>0$, $x>x_0$ олдугда $f'(x)<0$ олур. Онда x-ин x_0 нөгтәсинин теоремдә көстәрилән әтрафында јерләшән ихтијари гијмәти үчүн Лагранж теореминә көрә

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0) \tag{1}$$

олар.

Әкәр $x<x_0$ оларса, $x<\xi<x_0$ олдуғундан $f'(\xi)>0$ вә $x-x_0<0$. Бу һалда (1) дүстурунун сағ тәрәфи мәнфи әдәд олар, буна көрә дә һәмин x нөгтәләриндә

$$f(x)-f(x_0)<0 \tag{2}$$

бәрабәрсизлији өдәниләр.

Әкәр $x_0 < x$ оларса, $x - x_0 > 0$ вә $x_0 < \xi < x$ олдуғундан $f'(\xi) < 0$. Бу һалда да (1) бәрабәрлијинин сағ тәрәфи мәнфи әдәд олар вә јенә дә (2) бәрабәрсизлији өдәниләр.

Демәли, x-ин x_0 нөгтәсинин көстәрилән әтрафында јерләшән бүтүн гијмәтләриндә (2) бәрабәрсизлији, јә'ни

$$f(x) < f(x_0)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу исә x_0 нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын локал максимуму олдуғуну көстәрир.

Ејни гајда илә көстәрмәк олар ки, функсијанын төрәмәси x_0 нөгтәсиндә өз ишарәсини мәнфидән мүсбәтә дәјишдикдә x-ин x_0 нөгтәсинин көстәрилән әтрафында јерләшән бүтүн гијмәтләриндә

$$f(x) > f(x_0)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурадан x_0 нөгтәсиндә $f(x)$ функсијасынын локал минимуму олмасы ајдындыр.

Әкәр $f(x)$ функсијасынын төрәмәси x_0 нөгтәсиндән кечдикдә өз ишарәсини дәјишмирсә, онда $f'(\xi)$ кәмијјәти һәмин әтрафда ејни ишарәли олар, $x - x_0$ фәрги исә солдан сағa x_0 нөгтәсиндән кечдикдә өз ишарәсини мәнфидән мүсбәтә дәјишир. Буна көрә дә x_0 нөгтәсинин истәнилән кичик әтрафында һәм $f(x) > f(x_0)$ вә һәм дә $f(x) < f(x_0)$ бәрабәрсизлијинин өдәнилдији нөгтәләр олар. Бу исә x_0 нөгтәсиндә локал екстремумун олмадығыны көстәрир.

Теоремин һәндәси мә'насы беләдир: солдан сағa һәрәкәт етдикдә функсијанын артма интервалы гуртарыб азалма интервалы башлајырса (вә ја тәрсинә), онда функсијанын артма вә азалма интервалларыны ајыран x_0 нөгтәси һәмин функсијанын локал максимум (минимум) нөгтәсидир. Бу тәклифин тәрси доғру олмаја да биләр. Функсијанын локал екстремум нөгтәси онун монотонлуг (артма вә азалма) интервалларыны ајырмаја да биләр. Мәсәлән,

$$f_0(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin^2\frac{1}{x}+1\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

функсијасынын $x=0$ нөгтәсиндә локал минимуму вар. Бу нөгтәдә функсијанын төрәмәси сыфра бәрабәрдир:

$$f_0'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\left(\sin\frac{1}{\Delta x}+1\right)}{\Delta x} = 0.$$

Лакин $x=0$ нөгтәси $f_0(x)$ функсијасынын монотонлуг интервалларыны ајырмыр. Функсијанын

$$f_0'(x) = 2x\left(\sin^2\frac{1}{x}+1\right) - \sin\frac{2}{x}$$

төрәмәси $x=0$ нөгтәсинин һәр ики тәрәфиндә (әлбәттә, $x=0$ нөгтәсинә чох јахын олан нөгтәләрдә) һәм мүсбәт вә һәм дә мәнфи ишарәли гијмәтләр алыр.

Исбат етдијимиз теоремә әсасән верилмиш (a, b) интервалында кәсилмәз төрәмәси олан $f(x)$ функсијасынын һәмин интервалдакы локал екстремумларыны тапмаг үчүн ашағыдакы практики гајданы алырыг: һәмин функсијанын (a, b) интервалында јерләшән бүтүн бөһран нөгтәләрини тапараг

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b$$

шәклиндә нөмрәләјирик. Бу нөгтәләрин тә'јин етдији

$$(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, b) \qquad (3)$$

интервалларынын һәр биринин дахилиндә функсијанын $f'(x)$ төрәмәси вар вә бу төрәмә (3) интервалларынын һәр биринин дахилиндә өз ишарәсини сахлајыр. Бу интервалларда төрәмәнин ишарәсини тә'јин етмәклә (төрәмәнин интервалда ишарәси интервалын бир дахили нөгтәсиндә төрәмәнин гијмәтинин ишарәси илә тә'јин олунур) $x_к$ ($к=1, 2, \ldots, n$) нөгтәләриндә функсијанын локал екстремумунун варлығыны теоремә әсасән јохламаг олар.

Мисал 1. Бүтүн әдәд охунда тә'јин олунмуш $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$ функсијасынын локал екстремумларыны тапмалы. Бу мәгсәдлә әввәлчә һәмин функсијанын

$$f'(x) = 2x - 2x^3 = 2x(1-x)(1+x) \qquad (4)$$

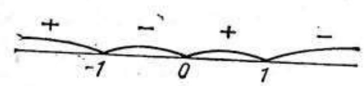
төрәмәсинин сыфра чеврилдији нөгтәләри тапаг:

$$x_1 = -1,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = 1.$$

Ајдындыр ки, верилмиш функсијанын бөһран нөгтәләри анчаг бу үч нөгтә олар, чүнки функсија төрәмәсинин сыфра чеврилдији вә төрәмәнин олмадығы башга нөгтәләр јохдур. Бу нөгтәләр васитәсилә әдәд оху

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \infty) \qquad (5)$$

кими интерваллара ајрылыр. Функсијанын төрәмәсинин бу интервалларда ишарәси 156-чы шәкилдә көстәрилмишдир. Бир даһа гејд етмәк лазымдыр ки, (5) интервалларынын һәр биринин дахилиндә (4) төрәмәси өз ишарәсини сахлајыр.



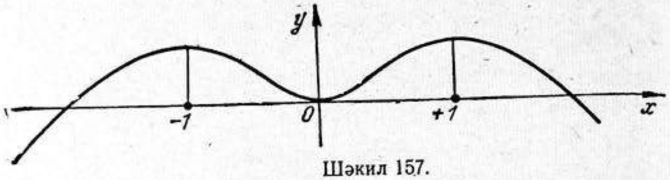
Шәкил 156.

Бурадан ајдындыр ки, функсијанын төрәмәси $x_1 = -1$ нөгтәсиндә өз ишарәсини мүсбәтдән мәнфијә, $x_2=0$ нөгтәсиндә өз ишарәсини мәнфидән мүсбәтә вә $x_3=1$ нөгтәсиндә исә мүсбәтдән мәнфијә дәјишир. Демәли, теоремә көрә верилмиш функсијанын

$x_1 = -1$ нөгтәсиндә локал максимуму, $x_2=0$ нөгтәсиндә локал минимуму вә $x_3=1$ нөгтәсиндә исә локал максимуму вар. Бу екстремал гијмәтләр

$$f(-1)=\frac{1}{2},\ f(0)=0,\ f(1)=\frac{1}{2}$$

әдәдләридир (157-чи шәкил).



Шәкил 157.

Функсијанын локал екстремумунун варлығыны икитәртибли төрәмә васитәсилә тә'јин етмәк бә'зән даһа әлверишли олур.

Теорем 2. ***Әкәр $f(x)$ функсијасынын стасионар x_0 (јә'ни, $f'(x_0)=0$ олан) нөгтәсиндә икитәртибли $f''(x_0)$ төрәмәси варса, онда $f''(x_0)<0$ олдугда функсијанын x_0 нөгтәсиндә локал максимуму, $f''(x_0)>0$ олдугда исә һәмин нөгтәдә локал минимуму вар.***

Исбаты. Икитәртибли төрәмәнин тә'рифинә көрә

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x-x_0}$$

олдуғундан ихтијари $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә $\delta>0$ вар ки, x-ин $0<|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$f''(x_0)-\varepsilon<\frac{f'(x)}{x-x_0}<f''(x_0)+\varepsilon \qquad (6)$$

мүнасибәти өдәнилир.

$f''(x_0)<0$ олдугда мүсбәт ε әдәдини елә сечмәк (мәсәлән, $\varepsilon=\frac{|f''(x_0)|}{2}$) олар ки, $f''(x_0)+\varepsilon<0$ бәрабәрсизлији өдәнилсин. Онда (6) бәрабәрсизлијинин сағ тәрәфиндән аларыг ки, x-ин $0<|x-x_0|<\delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән бүтүн гијмәтләриндә

$$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0. \qquad (7)$$

$x<x_0$ олдугда $x-x_0<0$ вә $x>x_0$ олдугда $x-x_0>0$ олдуғундан (7) бәрабәрсизлијинин өдәнилмәси үчүн $x<x_0$ олдугда $f'(x)>0$, $x>x_0$ олдугда исә $f'(x)<0$ олмалыдыр. Демәли, функсијанын $f'(x)$ төрәмәси x_0 нөгтәсиндә өз ишарәсини мүсбәтдән мәнфијә дәјишир, јә'ни һәмин нөгтәдә функсијанын локал максимуму (1-чи теоремә көрә) вар.

$f''(x_0)>0$ олдугда исә (6) мүнасибәтинин сол бәрабәрсизлијинә әсасән көстәрмәк олар ки, $x<x_0$ олдугда $f'(x)<0$, $x>x_0$ олдугда исә $f'(x)>0$ олмалыдыр, јә'ни $f'(x)$ төрәмәси өз ишарәсини x_0 нөгтәсиндә мәнфидән мүсбәтә дәјишир. Бу да функсијанын x_0 нөгтәсиндә локал минимумунун олдуғуну көстәрир.

Гејд. Функсијанын x_0 бөһран нөгтәсиндә $f''(x_0)=0$ оларса вә јахуд $f''(x_0)$ төрәмәси олмазса, онда һәмин нөгтәдә функсијанын локал екстремумунун варлығы мәсәләсини 2-чи теорем васитәсилә мүәјјән етмәк олмаз. Бу һалда ја 1-чи теоремдән истифадә олунур, ја да јүксәк тәртибли төрәмәләрдән истифадә етмәк лазым кәлир.

Мисал 2. $f(x)=2x^3-15x^2+36x+5$ функсијасынын локал екстремумуну тапмалы.

$$f'(x)=6x^2-30x+36=6(x-2)(x-3)$$

олдуғундан функсијанын бөһран нөгтәләри $x_1=2$ вә $x_2=3$ олар. Бу нөгтәләрдә икинчи төрәмәнин гијмәтини тапаг:

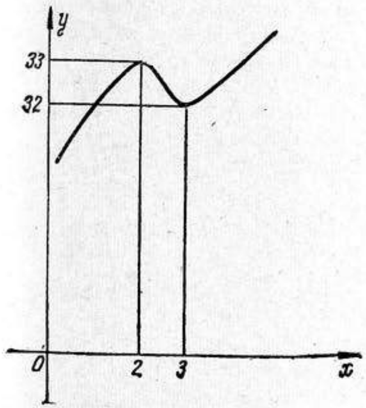
$$f''(x)=12x-30,$$

$$f''(2)=12\cdot 2-30=-6<0$$

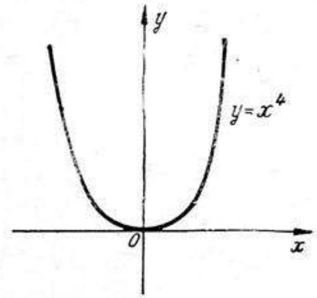
вә

$$f''(3)=12\cdot 3-30=6>0$$

олдуғундан 2-чи теоремә көрә функсијанын $x_1=2$ нөгтәсиндә локал максимуму, $x_2=3$ нөгтәсиндә исә локал минимуму вар (158-чи шәкил).



Шәкил 158.



Шәкил 159.

Мисал 3. $f(x)=x^4$ функсијасынын локал екстремумуну тапмалы.

$$f'(x)=4x^3=0$$

бәрабәрлијини јеканә $x=0$ нөгтәси өдәјир. Бу нөгтәдә функсијанын икинчи төрәмәси сыфра бәрабәрдир:

$$f''(x)=12x^2,\ f''(0)=12\cdot 0=0.$$

Она көрә дә $x=0$ нөгтәсиндә функсијанын локал екстремуму-нун олмасыны 2-чи теореми тәтбиг етмәклә јохламаг олмаз. Лакин $x<0$ олдугда $f'(x)=4x^3<0$, $x>0$ олдугда $f'(x)>0$ олмасы көстәрир ки, $f'(x)$ төрәмәси $x=0$ нөгтәсиндә ишарәсини мәнфидән мүсбәтә дәјишир. Онда 1-чи теоремә көрә $x=0$ нөгтәсиндә функсијанын локал минимуму вар (159-чу шәкил).

Мисал 4. $f(x)=x\ln x$ $(x>0)$ функсијасынын (§ 2, 2-чи мисал) $f'(x)=\ln x+1$ төрәмәси $x=e^{-1}$ нөгтәсиндә сыфра чеврилир. Бу нөгтәдә $f''(x)=\frac{1}{x}$ төрәмәси $f''(e^{-1})=e>0$ олдугундан 2-чи теоремә көрә $x=e^{-1}$ бөһран нөгтәсиндә функсијанын локал минимуму вар (151-чи шәкил).

§ 6. ЛОКАЛ ЕКСТРЕМУМУН ЈҮКСӘК ТӘРТИБЛИ ТӨРӘМӘЛӘРИН КӨМӘЈИ ИЛӘ АРАШДЫРЫЛМАСЫ

Верилмиш $y=f(x)$ функсијасынын $x=x_0$ бөһран нөгтәсиндә биринчи вә икинчи төрәмәси сыфра бәрабәр $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ олдугда, һәмин нөгтәдә локал екстремумун варлығыны јүксәк тәртибли төрәмәләр васитәсилә мүәјјән етмәк олар.

Теорем. ***Тутаг ки, $f(x)$ функсијасынын $x=x_0$ нөгтәсиндә n-чи тәртибә гәдәр кәсилмәјән вә***

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad f^{(n)}(x_0)\neq 0 \tag{1}$$

шәртләрини өдәјән төрәмәләри вар. n чүт әдәд олдугда функсијанын x_0 нөгтәсиндә локал екстремуму вар, n тәк әдәд олдугда исә функсијанын x_0 нөгтәсиндә локал екстремуму јохдур.

Бу һалда, n чүт әдәд вә $f^{(n)}(x_0)<0$ олдугда функсијанын x_0 нөгтәсиндә локал максимуму, n чүт әдәд вә $f^{(n)}(x_0)>0$ олдугда исә функсијанын x_0 нөгтәсиндә локал минимуму олар.

Исбаты. Функсија үчүн $x-x_0$ фәргинин гүввәтләринә көрә Тејлор дүстуруну јазаг:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\ \xi\in(x_0,x).$$

(1) шәртләрини нәзәрә алсаг:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

вә јахуд

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{2}$$

Инди фәрз едәк ки, n чүт әдәддир вә $f^{(n)}(x_0)<0$. Онда $f^{(n)}(x)$ төрәмәсинин $x=x_0$ нөгтәсиндә кәсилмәјән олмасына көрә һәмин нөгтәнин елә $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ әтрафы вар ки, бу әтрафда $f^{(n)}(x)$

төрәмәси өз ишарәсини сахлајыр. Бу һалда x-ин $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ әтрафында јерләшән һәр бир гијмәтиндә $\xi\in(x_0,x)$ олдугундан $f^{(n)}(\xi)<0$ вә (2) бәрабәрлијинә көрә һәм $x<x_0$, һәм дә $x>x_0$ олдугда $(x-x_0)^n>0$ вә

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n<0.$$

$$f(x)<f(x_0) \tag{3}$$

олар, јә'ни $f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсиндә локал максимум гијмәт алыр.

n чүт әдәд вә $f^{(n)}(x_0)>0$ олдугда x-ин $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ әтрафында јерләшән истәнилән гијмәтиндә

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n>0$$

вә јахуд

$$f(x)>f(x_0) \tag{4}$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Бу һалда $f(x)$ функсијасы x_0 нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр.

n тәк әдәд олдугда $(x-x_0)^n$ кәмијјәти x-ин $x<x_0$ вә $x>x_0$ олмасындан асылы олараг өз ишарәсини дәјишир, $f^{(n)}(\xi)$ исә $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ әтрафында өз ишарәсини сахлајыр. Буна көрә дә

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$$

кәмијјәти x_0 нөгтәсинин јахын әтрафында өз ишарәсини дәјишәр, јә'ни $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ әтрафында x-ин һәм (3) вә һәм дә (4) бәрабәрсизлијини өдәјән гијмәтләри вардыр. Бу көстәрир ки, бу һалда $f(x)$ функсијасынын $x=x_0$ нөгтәсиндә локал екстремуму јохдур.

Мисал 1. $f(x)=x^4$ функсијасы $f'(x)=4x^3=0$ бәрабәрлијини өдәнилдији $x=0$ бөһран нөгтәсиндә локал минимум гијмәт алыр. Доғрудан да,

$$f'(x)=4x^3,\ f''(x)=12x^2,\ f'''(x)=24x,\ f^{(IV)}(x)=24$$

олдуғундан $n=4$ чүт әдәди үчүн $f^{(IV)}(0)>0$ шәрти өдәнилир. Бу һалда, теоремә көрә, верилмиш функсија $x=0$ нөгтәсиндә минимум гијмәт алар (159-чу шәкил).

Мисал 2. $f(x)=x^5$ функсијасынын бөһран нөгтәси $x=0$ олур.

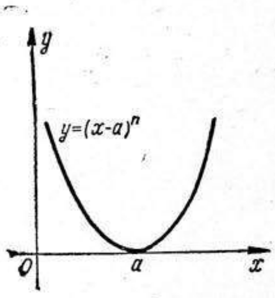
$$f'(0)=5x^4,\ f''(x)=20x^3,\ f'''(x)=60x^2,\ f^{(IV)}(x)=120x,$$
$$f^{(V)}(x)=120$$

мүнасибәтләриндән ајдындыр ки, $n=5$ тәк әдәди үчүн $f^{(V)}(0)\neq 0$. Бу һалда $x=0$ нөгтәсиндә функсијанын локал екстремуму ола билмәз.

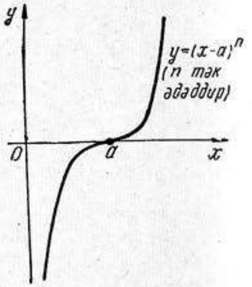
Мисал 3. $f(x)=(x-a)^n$ функсијасынын локал екстремумунун варлығыны тәдгиг едәк.

$$f'(x)=n(x-a)^{n-1}=0$$

бәрабәрлијинин өдәнилдији јеканә нөгтә $x=a$ нөгтәсидир. Бу нөгтәдә $f'(a)=f''(a)=...=f^{(n-1)}(a)=0$ вә $f^{(n)}(a)=n!$ шәртләри өдәнилир. Бу һалда n чүт әдәд олдугда $x=a$ нөгтәсиндә $f(x)$-ин локал минимуму олар (160-чы шәкил), n тәк әдәд олдугда исә функсијанын һәмин нөгтәдә локал екстремуму олмаз (161-чи шәкил).



Шәкил 160.



Шәкил 161.

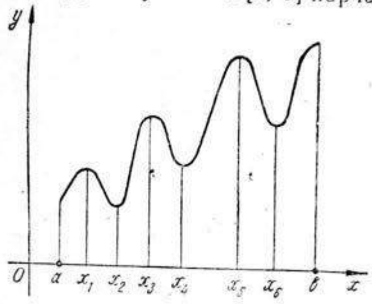
§ 7. ФУНКСИЈАНЫН ПАРЧАДА ЕКСТРЕМАЛ ГИЈМӘТЛӘРИ

Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмуш кәсилмәјән функсијадыр. Бу функсијанын парчанын дахили нөгтәләриндә бир нечә локал минимуму вә локал максимуму (дахили екстремуму) ола биләр. Локал екстремум нөгтәләрин јахын әтрафына аид олдуғу үчүн локал минимумларын бә'зиси локал максимумларын бир вә ја бир нечәсиндән бөјүк вә ја кичик ола биләр. Максимумлар да өз нөвбәсиндә минимумларын бә'зисиндән кичик вә ја бөјүк ола биләр (162-чи шәкил). Буна көрә дә бир чох мәсәләләрин һәлли үчүн локал екстремумдан башга функсијаларын бүтүн $[a, b]$ парчасына нәзәрән максимуму вә минимумуна, јә'ни бүтүн парчаја нәзәрән екстремума бахмаг лазым кәлир. Белә екстремума *глобал екстремум* вә ја *мүтләг екстремум* дејилир.

$y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдугда парчада кәсилмәјән функсијанын хассәләринә (XIII, § 8) көрә онун һәмин парчада сонлу m_0 дәгиг ашағы сәрһәдди вә сонлу M_0 дәгиг јухары сәрһәдди вар вә бу сәрһәдләрин һәр бирини парчанын һеч олмаса бир нөгтәсиндә алыр:

$$m_0=f(\alpha),\ M_0=f(\beta),\ (\alpha, \beta\in[a, b]).$$

Бу һалда $f(\alpha)=m_0$ әдәди $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында ән кичик гијмәти, $f(\beta)=M_0$ исә $f(x)$ функсијасынын һәмин парчада ән бөјүк гијмәти олар. $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасындакы ән бөјүк гијмәти онун һәмин парчада *максимуму* вә ја *максимал гијмәти*, ән кичик гијмәти исә һәмин парчада *минимуму* вә ја *минимал гијмәти* адланыр. Функсијанын парчада максимал вә минимал гијмәтләринә бирликдә функсијанын *глобал екстремуму* вә ја *парчада екстремал гијмәтләри* дејилир.



Шәкил 162.

Функсија $[a, b]$ парчасындакы максимал гијмәтини ја парчанын дахили нөгтәсиндә, ја да парчанын уч нөгтәләринин бириндә алыр. Әкәр $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасынын дахили нөгтәләриндән бириндә өз максимал гијмәтини алырса, онда һәмин нөгтә онун локал максимум нөгтәси олар.

Функсијанын $[a, b]$ парчасында ән кичик гијмәтини алмасы һаггында да ејни тәклиф доғрудур: парчада минимал гијмәтини функсија ја парчанын уч нөгтәләринин бириндә, ја да локал минимум нөгтәси олан дахили нөгтәдә алыр.

Беләликлә, функсијанын парчада екстремал гијмәтләрини тапмаг үчүн ашағыдакы гајда алыныр: $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында ән бөјүк гијмәтини тапмаг үчүн онун бүтүн локал максимум гијмәтләрини вә парчанын уч нөгтәләриндә алдығы $f(a)$ вә $f(b)$ гијмәтләри мүгајисә етмәк лазымдыр. Бу әдәдләрин ән бөјүјү $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасындакы ән бөјүк вә ја максимал гијмәти олар. $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасындакы максимал гијмәти $\max f(x)$ вә ја $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ илә ишарә олунур.

$f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында ән кичик гијмәтини тапмаг үчүн онун бүтүн локал минимум гијмәтләрини вә парчанын уч нөгтәләриндә алдығы $f(a)$ вә $f(b)$ гијмәтләри мүгајисә етмәк лазымдыр. Бу гијмәтләрин ән кичији $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасындакы ән кичик вә ја минимал гијмәти (буну $\min f(x)$ вә ја $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$ илә ишарә едирләр) олар.

Гејд едәк ки, $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында јеканә локал екстремум нөгтәси варса вә бу нөгтә локал максимум (минимум) нөгтәсидирсә, онда һәмин нөгтәдәки гијмәти $f(a)$ вә $f(b)$ илә мүгајисә етмәдән һөкм етмәк олар ки, һәмин гијмәт $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасындакы максимал (минимал) гијмәтидир.

Мисал 1. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ функсијасынын $[0, 2]$ парчасында екстремал гијмәтләрини тапмалы.

1349—26

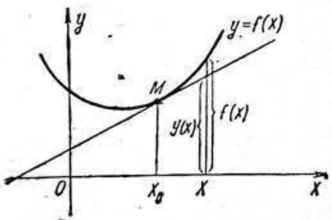
Функсијанын
$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
төрәмәси һәмин парчанын $x=1$ нөгтәсиндә сыфра чеврилир. Бу нөгтәдә функсијанын төрәмәси өз ишарәсини мүсбәтдән мәнфијә дәјишдији үчүн һәмин нөгтә онун локал максимум нөгтәсидир. Беләликлә, функсијанын
$$f(0)=0,\ f(1)=\frac{1}{2},\ f(2)=\frac{2}{5}$$
гијмәтләрини мүгајисә едәрәк
$$\max_{0\leqslant x\leqslant 2} f(x)=\frac{1}{2} \quad \text{вә} \quad \min_{0\leqslant x\leqslant 2} f(x)=0$$
олдуғуну тапарыг.

§ 8. ГАБАРЫГ ВӘ ЧӨКҮК ӘЈРИЛӘР

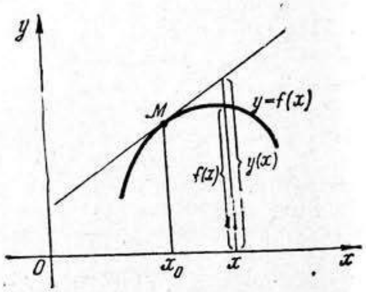
Фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасы (a, b) интервалында тә'јин олунмуш, кәсилмәјән вә диференсиалланан функсијадыр. Онда $y=f(x)$ функсијасынын графики олан әјринин ихтијари нөгтәсиндә тохунаны вар. Бу әјринин, абсиси x_0 олан нөгтәсинә чәкилән тохунанын тәнлији
$$Y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (1)$$
олачагдыр.

Тә'риф. *Әкәр x-ин x_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында јерләшән бүтүн ($x\neq x_0$) гијмәтләриндә $f(x)>Y(x)$, ($f(x)<Y(x)$) бәрабәрсизлији өдәнилирсә, јә'ни $y=f(x)$ әјрисинин һәмин әтрафа ујғун олан һиссәси $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәсинә чәкилән тохунандан јухарыда (ашағыда) јерләширсә, онда $y=f(x)$ функсијасынын графикинә $x=x_0$ нөгтәсиндә габарыг[1] вә ја габарыглығы ашағыја јөнәлмиш (чөкүк вә ја габарыглығы јухарыја јөнәлмиш) әјри дејилир.*

Мәсәлән, 163-чү шәкилдә әјри x_0 нөгтәсиндә габарыгдыр, 164-чү шәкилдә исә әјри x_0 нөгтәсиндә чөкүкдүр.



Шәкил 163.



Шәкил 164.

[1] Бә'зи дәрсликләрдә габарыглығы ашағыја јөнәлмиш әјријә *чөкүк*, габарыглығы јухарыја јөнәлмиш әјријә исә *габарыг әјри* дејилир.

(a, b) интервалынын һәр бир нөгтәсиндә габарыг (чөкүк) олан әјријә һәмин интервалда *габарыг (чөкүк) әјри* дејилир. Ајдындыр ки, x-ин (a, b) интервалындакы бүтүн гијмәтләриндә $f(x)>Y(x)$ $(f(x)<Y(x))$ бәрабәрсизлији өдәнилирсә, онда $y=f(x)$ әјриси һәмин интервалда габарыгдыр (чөкүкдүр).

Әјринин верилмиш нөгтәдә габарыг вә ја чөкүк олмасы һаггында ашағыдакы кафи шәрти сөјләмәк олар.

Теорем. ***Әкәр $y=f(x)$ функсијасынын $x=x_0$ нөгтәсиндә сыфырдан фәргли икитәртибли кәсилмәз төрәмәси варса, онда $f''(x_0)>0$ олдуғда $y=f(x)$ әјриси x_0 нөгтәсиндә габарыг, $f''(x_0)<0$ олдуғда исә һәмин нөгтәдә чөкүк олар.***

Исбаты. $y=f(x)$ функсијасыны $x-x_0$ фәргинин гүввәтләринә көрә
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''[x_0+\theta(x-x_0)]}{2!}(x-x_0)^2 \qquad (2)$$
Тејлор дүстуру шәклиндә көстәрәк. (2) вә (1) бәрабәрликләрини тәрәф-тәрәфә чыхсаг:
$$f(x)-Y(x)=\frac{f''[x_0+\theta(x-x_0)]}{2!}(x-x_0)^2. \qquad (3)$$

Шәртә көрә $f''(x)$ төрәмәси $x=x_0$ нөгтәсиндә кәсилмәјән вә $f''(x_0)\neq 0$ олдуғундан x_0 нөгтәсинин елә әтрафы вар ки, x-ин бу әтрафдакы бүтүн гијмәтләриндә $f''[x_0+\theta(x-x_0)]$ илә $f''(x_0)$ ејни ишарәли олар. Онда $f''(x_0)>0$ олдугда x-ин һәмин әтрафдакы бүтүн гијмәтләриндә $f''[x_0+\theta(x-x_0)]>0$ вә буна көрә дә (3) бәрабәрлијинә әсасән $f(x)-Y(x)>0$ олар, јә'ни $y=f(x)$ әјриси $x=x_0$ нөгтәсиндә габарыгдыр.

$f''(x_0)<0$ олдугда исә x-ин көстәрилән әтрафдакы бүтүн гијмәтләриндә $f''[x_0+\theta(x-x_0)]<0$ олар. Јенә дә (3) бәрабәрлијинә көрә: $f(x)-Y(x)<0$. Бурадан $y=f(x)$ әјрисинин $x=x_0$ нөгтәсиндә чөкүк олмасы ајдындыр.

Нәтичә. $f(x)$ функсијасынын икитәртибли $f''(x)$ төрәмәси (a, b) интервалында мүсбәт олдуғда $y=f(x)$ әјриси һәмин интервалда габарыг, мәнфи олдуғда исә һәмин интервалда чөкүк олар.

Тә'риф. *Графики (a, b) интервалында габарыг (чөкүк) әјри олан $y=f(x)$ функсијасына һәмин интервалда габарыг (чөкүк) функсија дејилир.*

Бу тә'риф ашағыдакы тә'рифлә еквивалентдир (буну исбат етмәји охучулара мәсләһәт көрүрүк).

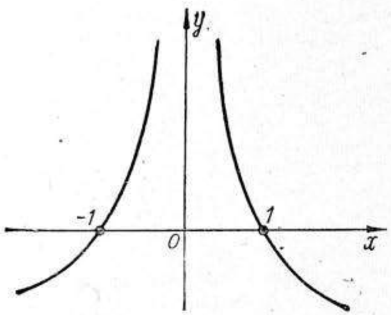
Әкәр $y=f(x)$ функсијасы x-ин (a, b) интервалында јерләшән ихтијари $a<x_1\leqslant x_2<b$ гијмәтләриндә
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$
$$\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)$$
бәрабәрсизлијини өдәјирсә, онда она (a, b) интервалында габарыг (чөкүк) функсија дејилир.

Мисал 1. $f(x)=x^\alpha$ $(\alpha>1)$ функсијасы (вә ја онун графики олан әјри) $(0, \infty)$ интервалында габарыгдыр. Доғрудан да, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ төрәмәси ихтијари $x>0$ үчүн мүсбәт олдуғундан нәтиҹәјә көрә $f(x)$ функсијасы габарыг олар.

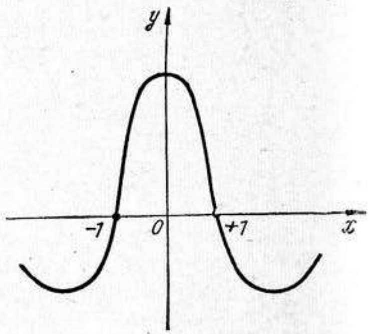
Мисал 2. $f(x)=-\ln|x|$ функсијасы $(-\infty, 0)$ вә $(0, \infty)$ интервалларынын һәр икисиндә габарыгдыр. Доғрудан да, ихтијари $x\neq 0$ үчүн (165-чи шәкил)

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x^2}>0$$

олар.



Шәкил 165.



Шәкил 166.

Мисал 3. $f(x)=x^4-6x^2+5$ функсијасынын габарыг вә чөкүк олдуғу интерваллары тапмалы.

Функсијанын икинчи төрәмәсини һесаблајаг:

$$f'(x)=4x^3-12x,\quad f''(x)=12x^2-12=12(x-1)(x+1).$$

Бурадан ајдындыр ки, $f''(x)$ төрәмәси $x_1=-1$ вә $x_2=1$ нөгтәләриндә сыфра чеврилир вә бу нөгтәләр әдәд охуну $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ вә $(1, +\infty)$ кими үч интервала ајырыр.

$(-\infty, -1)$ вә $(1, +\infty)$ интервалларында $f''(x)>0$ олдуғундан һәмин интервалларда функсија габарыг, $(-1, 1)$ интервалында исә $f''(x)<0$ олдуғундан һәмин интервалда чөкүк олар (166-чы шәкил).

§ 9. ДӨНМӘ НӨГТӘСИ

Верилмиш (a, b) интервалында кәсилмәјән $y=f(x)$ функсијасы графикинин характерик нөгтәләринин бири дә дөнмә нөгтәсидир.

Т ә' р и ф. *Кәсилмәјән әјринин габарыг һиссәсини чөкүк һиссәсиндән ајыран нөгтәјә дөнмә (әјилмә) нөгтәси дејилир.*

Әјринин габарыг вә чөкүк олмасынын тә'рифиндән (§ 8) ајдындыр ки, дөнмә нөгтәсиндә әјринин тохунаны варса, һәмин

тохунан әјрини дөнмә нөгтәсиндә кәсир, чүнки дөнмә нөгтәсиндән бир тәрәфдә әјри тохунандан ашағыда, дикәр тәрәфдә исә јухарыда јерләшмәлидир.

Мәсәлән, координат башланғычы $y=x^3$ әјрисинин дөнмә нөгтәсидир. Абсис оху әјрјә координат башланғычында чәкилмиш тохунандыр. Әјри $(-\infty, 0)$ интервалында чөкүк, $(0, +\infty)$ интервалында исә габарыгдыр (98-чи шәкил).

Т е о р е м 1. (Дөнмә нөгтәсинин варлығы үчүн шәртин зәрурилији). ***$y=f(x)$ функсијасынын $x=x_0$ нөгтәсиндә икитәртибли кәсилмәз төрәмәси варса вә $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәси онун графикинин дөнмә нөгтәсидирсә, онда $f''(x_0)=0$.***

Доғрудан да, $f''(x_0)\neq 0$ олдуғуну фәрз етсәк, онда $f''(x)$ төрәмәсинин $x=x_0$ нөгтәсиндә кәсилмәзлијинә көрә елә $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ интервалы вар ки, һәмин әтрафда онун ишарәси $f''(x_0)$ төрәмәсинин ишарәси илә ејни олар. Бурадан алынар ки, $f''(x_0)>0$ оларса, $y=f(x)$ функсијасынын графики $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ интервалында габарыг, $f''(x_0)<0$ олдугда исә чөкүк олар. Бу исә $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәсинин $y=f(x)$ функсијасы графикинин дөнмә нөгтәси олмасы фәрзијјәсинә зиддир, јә'ни $f''(x_0)=0$ олар.

Демәли, $f(x)$ функсијасынын икитәртибли кәсилмәз төрәмәси олдугда $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәси, абсиси $f''(x)=0$ шәртини өдәјән нөгтәләр ола биләр. $f(x)$ функсијасынын икинчи төрәмәсинин олмадығы нөгтәләрдә дә $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәси ола биләр.

Кәсилмәјән функсијанын икинчи төрәмәсинин сыфра чеврилдији вә олмадығы нөгтәләрә һәмин функсијанын икинчи төрәмәсинә нәзәрән бөһран нөгтәләри дејилир.

Јухарыда дејиләнләрдән ајдындыр ки, $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәсинин абсиси $f(x)$ функсијасынын икинчи төрәмәсинә көрә бөһран нөгтәсидир. Бу шәрт, дөнмә нөгтәсинин варлығы үчүн зәруридир, лакин кафи дејилдир. Мәсәлән, $y=x^4$ функсијасынын икинчи $y''=12x^2$ төрәмәси $x=0$ нөгтәсиндә сыфра бәрабәрдир, лакин $O(0, 0)$ нөгтәси $y=x^4$ әјрисинин дөнмә нөгтәси дејилдир. $y=x^4$ әјри (159-чу шәкил) һәр јердә габарыгдыр.

$f(x)$ функсијасынын ики вә јүксәк тәртибли төрәмәләриндән истифадә едәрәк, $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәсинин варлығы һаггында кафи шәртләр сөјләмәк олар.

Т е о р е м 2. ***Тутаг ки, x_0 нөгтәсинин мүәјјән әтрафында (x_0 нөгтәси мүстәсна олмагла) $f(x)$ функсијасынын сыфра чеврилмәјән икитәртибли төрәмәси вардыр. Әкәр солдан сağа x_0 нөгтәсиндән кечдикдә функсијанын $f''(x)$ төрәмәси өз ишарәсини дәјиширсә, онда $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәси $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәсидир, солдан сağа x_0 нөгтәсиндән кечдикдә $f''(x)$ төрәмәси өз ишарәсини дәјишмирсә, онда һәмин нөгтә $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәси дејилдир.***

Исбаты. Әкәр $f''(x)$ төрәмәси x_0 нөгтәсиндә өз ишарәсини мүсбәтдән мәнфијә дәјиширсә, онда елә $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ интервалы вар ки, x-ин $(x_0-\delta, x_0)$ интервалындакы гијмәтләриндә $f''(x)$ мүсбәт, $(x_0, x_0+\delta)$ интервалындакы гијмәтләриндә исә мәнфи-дир. Демәли, $y=f(x)$ әјриси $(x_0-\delta, x_0)$ интервалында габарыг, $(x_0, x_0+\delta)$ интервалында исә чөкүкдүр. Бурадан $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәсинин дөнмә нөгтәси олмасы ајдындыр.

Әкәр $f''(x)$ төрәмәси x_0 нөгтәсиндә өз ишарәсини мәнфидән мүсбәтә дәјиширсә, онда $(x_0-\delta, x_0)$ интервалында $f''(x)$ мәнфи, $(x_0, x_0+\delta)$ интервалында исә мүсбәтдир, јә'ни $y=f(x)$ әјриси $(x_0-\delta, x_0)$ интервалында чөкүк, $(x_0, x_0+\delta)$ интервалында исә габарыгдыр. Бу һалда да $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәси дөнмә нөгтәсидир.

Функсијанын икинчи $f''(x)$ төрәмәси x_0 нөгтәсинин $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ әтрафында өз ишарәсини дәјишмирсә, онда $(x_0-\delta, x_0)$ вә $(x_0, x_0+\delta)$ интервалларынын һәр икисиндә $y=f(x)$ әјриси ја габарыг, ја да чөкүк олар. Буна көрә дә $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәси $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәси ола билмәз.

Мисал 1. $f(x)=x^4-6x^2+5$ (§ 8, 3-чү мисал) функсијасынын дөнмә нөгтәсини тапмалы. Функсијанын икитәртибли

$$f''(x)=12x^2-12=12(x-1)(x+1)$$

төрәмәсинә нәзәрән бөһран нөгтәләри $x_1=-1$ вә $x_2=1$ олар. Бу нөгтәләрин һәр икисиндә $f''(x)$ төрәмәси өз ишарәсини дәјиш-дијиндән абсисләри $x_1=-1$ вә $x_2=1$ олан $M_1(-1, 0)$ вә $M_2(1, 0)$ нөгтәләри верилмиш әјринин дөнмә нөгтәләридир. Бу 166-чы шәкилдән дә көрүнүр.

Мисал 2. $f(x)=x^4$ функсијасынын икитәртибли $f''(x)=12x^4$ төрәмәси $x=0$ нөгтәсиндә сыфра чеврилир. Бу нөгтәдә исә икинчи төрәмә өз ишарәсини дәјишмир, $x>0$ вә $x<0$ олдугда һәмишә $f''(x)>0$ олур. Буна көрә дә абсиси $x=0$ олан $O(0, 0)$ нөгтәси верилмиш әјринин дөнмә нөгтәси дејилдир (159-чу шәкил).

Теорем 3. ***Тутаг ки, $f(x)$ функсијасынын $x=x_0$ нөгтәсиндә n-чи тәртибә гәдәр кәсилмәјән вә***

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0 \qquad (1)$$

шәртләрини өдәјән төрәмәләри вар. n тәк әдәд олдугда $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәси $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәсидир, n чүт әдәд олдугда исә һәмин нөгтә $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәси дејил.

Исбаты. $y=f(x)$ әјрисинә $M(x_0, f(x_0))$ нөгтәсиндә чәкилмиш тохунанын тәнлији

$$У(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \qquad (2)$$

олсун. (1) шәртләринә көрә исә $f(x)$ функсијасынын Тејлор дүстуру

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \ \xi\in(x_0, x) \qquad (3)$$

шәклиндә олар. (2) вә (3) бәрабәрликләриндән:

$$f(x)-У(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n, \ \xi\in(x_0, x). \qquad (4)$$

Әкәр n тәк әдәддирсә, онда $(x-x_0)^n$ кәмијјәти x_0 нөгтәсиндә өз ишарәсини дәјишир, $f^{(n)}(\xi)$ исә $x=x_0$ нөгтәсинин јахын әтрафында өз ишарәсини сахлајыр ($f^{(n)}(x)$ төрәмәси $x=x_0$ нөгтәсиндә кәсилмәјән вә $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ шәртини өдәдијинә көрә). Буна көрә дә (4) бәрабәрлијинә әсасән $f(x)-У(x)$ фәрги $x=x_0$ нөгтәсинин сол вә сағ тәрәфләриндә мүхтәлиф ишарәли олар, јә'ни $y=f(x)$ әјриси x_0 нөгтәсинин бир тәрәфиндә габарыгдырса, дикәр тәрәфиндә чөкүк олар. Бу исә $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәсинин дөнмә нөгтәси олдуғуну көстәрир.

n чүт әдәд олдугда исә $(x-x_0)^n$ ифадәси $x=x_0$ нөгтәсиндә өз ишарәсини дәјишмир вә буна көрә дә $f(x)-У(x)$ фәрги $x=x_0$ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында, јә'ни x_0 нөгтәсинин һәр ики тәрәфиндә ејни ишарәли олар. Бу һалда $M[x_0, f(x_0)]$ нөгтәси $y=f(x)$ әјрисинин дөнмә нөгтәси дејилдир.

Мисал 3. $f(x)=(x-a)^n$ функсијасынын (§ 6, 3-чү мисал) төрәмәләри $x=a$ нөгтәсиндә (1) шәртләрини өдәјир. Буна көрә дә n чүт әдәд олдугда $M(a, 0)$ нөгтәси дөнмә нөгтәси дејил (160-чы шәкил), n тәк әдәд олдугда исә $M(a, 0)$ нөгтәси әјринин дөнмә нөгтәсидир (161-чи шәкил).

§ 10. ӘЈРИНИН АСИМПТОТЛАРЫ

Тәнлији верилмиш әјрини гураркән әјри үзәриндәки дәјишән нөгтә әјри бојунча сонсузлуға кетдикдә (јә'ни, әјри үзәриндәки дәјишән нөгтәнин координат башланғычындан олан мәсафәси гејри-мәһдуд олараг артдыгда) әјринин дәјишмә характерини билмәјин бөјүк әһәмијјәти вардыр. Әјринин сонсуз голу мүстәви үзәриндә мүхтәлиф вәзијјәтләрдә јерләшә биләр. Бурада ән садә һал, әјри үзәриндәки дәјишән нөгтә сонсузлуға кетдикдә һәмин әјринин мүәјјән бир дүз хәттә сонсуз јахынлашмасыдыр.

Тә'риф. *$y=f(x)$ әјриси үзәриндәки дәјишән M нөгтәси сонсузлуға кедәркән M нөгтәсиндән верилмиш L дүз хәттинә гәдәр олан d мәсафәси сыфра јахынлашырса, онда L дүз хәттинә һәмин әјринин асимптоту дејилир.*

Верилмиш әјринин асимптоту ола да биләр, олмаја да биләр. Бир нечә вә һәтта сонсуз сајда асимптоту олан әјриләр дә вардыр. Әјринин асимптоту ону кәсә дә биләр, кәсмәјә дә биләр (167-чи шәкил).

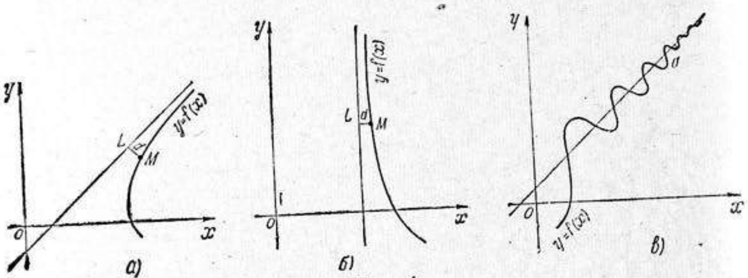
Әјринин асимптоту ординат охуна паралел олдугда она *шагули асимптот*, ординат охуна паралел олмадыгда исә она *маили асимптот* дејилир.

Шагули асимптотлар. Фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасы үчүн

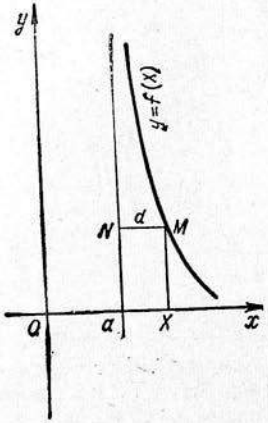
$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty \qquad (1)$$

шәртләриндән һеч олмаса бири өдәнилир. Бу һалда әјри үзәриндәки дәјишән M нөгтәсинин $x=a$ дүз хәттиндән олан мәсафәси

$$d=MN=|x-a|$$



Шәкил 167.



Шәкил 168.

олар (168-чи шәкил). Ајдындыр ки,

$$\lim_{x\to a} d=\lim_{x\to a}|x-a|=0,$$

јә'ни $x=a$ дүз хәтти $y=f(x)$ әјрисинин шагули асимптотудур.

Демәли, $y=f(x)$ функсијасы үчүн

$$\lim_{x\to a_k-0} f(x)=\infty, \quad \lim_{x\to a_k+0} f(x)=\infty$$

шәртләринин һеч олмаса биринин $a_1, a_2, \dots, a_m$ нөгтәләри өдәнилдији олдугда $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_m$ дүз хәтләри $y=f(x)$ әјрисинин шагули асимптотлары олар.

Мисал 1. $y=\frac{x}{x^2-1}$ әјрисинин шагули асимптотларыны тап-

малы. Ајдындыр ки, $y=\frac{x}{(x-1)(x+1)}$ олдуғундан $\lim\limits_{x\to -1} y=\infty$ вә $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty$.

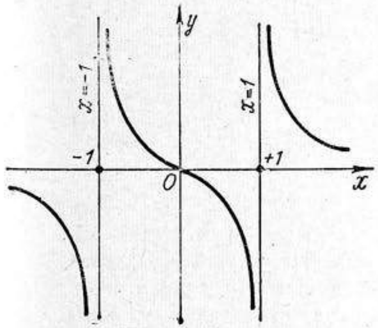
Демәли, $x=-1$ вә $x=1$ дүз хәтләри верилмиш әјринин шагули асимптотларыдыр (169-чу шәкил). Шәкилдән ајдындыр ки, верилмиш әјри ($y=\frac{x}{x^2-1}$ функсијасынын графики) үч һиссәдән ибарәтдир.

Мисал 2. $y=\operatorname{tg} x$ әјрисинин сонсуз сајда шагули

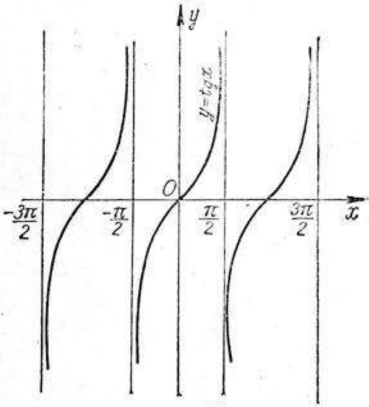
$$x=\frac{\pi}{2}, \quad x=\frac{3\pi}{2}, \quad x=\frac{5\pi}{2}, \dots$$

$$x=-\frac{\pi}{2}, \quad x=-\frac{3\pi}{2}, \quad x=-\frac{5\pi}{2}, \dots$$

асимптотлары вар (170-чи шәкил).



Шәкил 169.

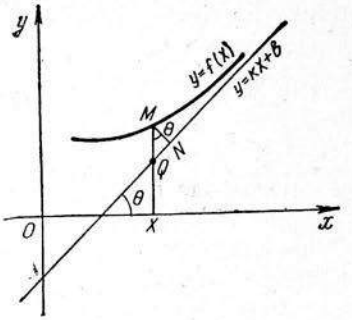


Шәкил 170.

Маили асимптотлар. Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы аргументин истәнилән бөјүк мүсбәт гијмәтләриндә тә'јин олунмушдур (буну садәлик вә конкретлик үчүн фәрз едирик) вә $y=kx+b$ дүз хәтти $y=f(x)$ әјрисинин маили асимптотудур. Бу һалда $y=f(x)$ әјриси үзәриндәки дәјишән M нөгтәсинин сонсузлуға кетмәси $x\to+\infty$ шәртинә еквивалент олдуғундан асимптотун тә'рифинә көрә

$$\lim_{x\to+\infty} d=\lim_{x\to+\infty} MN=0 \qquad (1)$$

олар (171-чи шәкил). θ илә асимптотун мејл бучағыны $\left(\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$ ишарә етсәк, онда NMQ үчбучағындан $MN=MQ\cos\theta$ вә ја



Шәкил 171.

$$MQ=\frac{MN}{\cos\theta} \qquad (2)$$

мүнасибәтини аларыг. Бу мүнасибәтә әсасән (1)-дән

$$\lim_{x\to+\infty} MQ=0. \qquad (3)$$

бәрабәрлији алыныр. Бунун тәрси дә доғрудур.

Беләликлә, $MQ=f(x)-\kappa x-b$ олдуғундан ашағыдакы тәклифи исбат етмиш олуруг: $y=\kappa x+b$ дүз хәтти $x\to+\infty$ шәртиндә $y=f(x)$ әјрисинин маили асимптоту олмасы үчүн

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\kappa x-b]=0 \qquad (4)$$

вә ја

$$f(x)=\kappa x+b+\alpha(x),\ \alpha(x)\to 0\ (x\to+\infty) \qquad (5)$$

шәртинин өдәнилмәси зәрури вә кафидир.

Бу тәклифин көмәји илә ашағыдакы теореми исбат едәк.

Т е о р е м. ***$y=\kappa x+b$ дүз хәттинин $x\to+\infty$ шәртиндә $y=f(x)$ әјрисинин маили асимптоту олмасы үчүн***

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\kappa \quad \text{вә} \quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-\kappa x]=b \qquad (6)$$

лимитләринин икисинин дә варлығы зәрури вә кафи шәртдир.

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, $y=\kappa x+b$ дүз хәтти $y=f(x)$ әјрисинин $x\to+\infty$ шәртиндә маили асимптотудур. Онда (5) мүнасибәти доғру олар. Һәмин бәрабәрликдән

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\kappa x+b+\alpha(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\kappa+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right]=\kappa,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\kappa x]=\lim_{x\to+\infty}[b+\alpha(x)]=b$$

мүнасибәтләри, јә'ни (6) лимитләринин варлығы алыныр.

Шәртин кафилији. (6) шәртләри өдәнилдикдә, һәмин бәрабәрликләрин икинчисинә көрә

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\kappa x-b]=0 \qquad (4)$$

мүнасибәтини јазмаг олар. Бурадан $y=\kappa x+b$ дүз хәтти $x\to+\infty$ шәртиндә $y=f(x)$ әјрисинин асимптоту олдуғу (әввәлки тәклифә көрә) ајдындыр.

$y=f(x)$ әјрисинин $x\to-\infty$ шәртиндә дә маили асимптотунун варлығыны ејни гајда илә тәдгиг етмәк вә ујғун теорем исбат етмәк олар. Бу һалда (6) шәртләри

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\kappa \quad \text{вә} \quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-\kappa x] \qquad (7)$$

шәклиндә јазылар.

Әкәр $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (вә ја $x\to-\infty$ шәртиндә һәмин лимит) олдугда $y=b$ дүз хәтти $y=f(x)$ әјрисинин үфүги асимптоту олар.

Гејд едәк ки, верилмиш $y=f(x)$ әјрисинин һәм $x\to+\infty$ вә һәм дә $x\to-\infty$ шәртиндә маили асимптотлары ола биләр, әјринин маили асимптоту $x\to+\infty$ вә ја $x\to-\infty$ һалларынын анчаг бириндә дә ола биләр. Верилмиш әјринин маили асимптоту һеч олмаја да биләр.

Мисал 3. $y=\dfrac{3x^2-2x-2}{x-1}$ әјрисинин асимптотларыны тапмалы. Әввәлчә маили асимптоту ахтараг:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2x-2}{x^2-x}=3$$

вә

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-3x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[1-\frac{1}{x-1}\right]=1$$

олдуғундан $y=3x+1$ дүз хәтти әјринин маили асимптоту олар. $x=1$ дүз хәттинин исә һәмин әјринин шагули асимптоту олмасы

$$\lim_{x\to1\pm0}\frac{3x^2-2x-2}{x-1}=\infty$$

бәрабәрлијиндән ајдындыр.

Мисал 4. $y=x^2$ параболасынын һеч бир асимптоту јохдур. Доғрудан да,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}x=\infty,$$

јә'ни (6) лимитләринин (вә һәм дә (7) лимитләринин) бири јохдур. Буна көрә дә верилмиш әјринин һеч бир маили асимптоту ола билмәз.

§ 11. ФУНКСИЈА ГРАФИКИНИН ГУРУЛМА СХЕМИ

Функсијанын графикини гурмаг үчүн:

1) функсијанын тә'јин областы тапылыр;

2) функсијанын кәсилмәз олдуғу област вә кәсилмә нөгтәләри тапылыр;

3) функсијанын тәк, чүт вә периодик олмасы јохланылыр. Функсија графикинин координат охлары илә кәсишмә нөгтәләри тапылыр;

4) функсијанын артма вә азалма интерваллары тапылыр;

5) функсијанын екстремуму вә екстремум гијмәтләри тапылыр;

6) функсија графикинин габарыг вә чөкүк олдуғу һиссәләр вә дөнмә нөгтәләри тә'јин едилир;

7) функсија графикинин асимптотлары тапылыр.

Бунун нәтичәсиндә алынан мә'луматлара әсасән функсијанын графикини гурмаг мүмкүндүр. Әлбәттә, конкрет функсијанын графикини гураркән бә'зән функсијанын бир вә ја бир нечә хассәси онун дикәр хассәләри һаггында мүәјјән нәтичә чыхармаға имкан верир. Бу һалда јухарыда көстәрилән тәдгигат просеси садәләшир вә алынан нәтичәләрә әсасән функсијанын графикини гурмаг мүмкүн олур.

Мисал 1. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ функсијасынын графикини гурмалы.

Бу мәгсәдлә верилмиш функсијаны јухарыда көстәрилән схем үзрә тәдгиг едәк:

1) функсијанын тә'јин областы бүтүн әдәд охудур. Аргументин бүтүн гијмәтләриндә функсија мәнфи олмајан гијмәтләр алыр;

2) функсија бүтүн тә'јин областында, јә'ни $(-\infty, \infty)$ интервалында кәсилмәјәндир;

3) верилмиш функсија чүтдүр. Онун графики Oy охуна нәзәрән симметрик јерләшир. Функсија координат охларыны анчаг координат башланғычында кәсир.

4) Функсијанын артма вә азалма интервалларыны тапмаг үчүн биринчи төрәмәсини һесаблајырыг:

$$y'=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,.$$

Бурадан ајдындыр ки, $x>0$ олдугда $y'>0$, $x<0$ олдугда исә $y'<0$, јә'ни функсија $(-\infty, 0)$ интервалында азалан, $(0, \infty)$ интервалында исә артандыр;

5) функсијанын бөһран нөгтәси $y'=0$ бәрабәрлијинин өдәнилдији $x=0$ нөгтәсидир. Бу нөгтәдә функсијанын төрәмәси өз ишарәсини мәнфидән мүсбәтә дәјишир. Демәли, $x=0$ нөгтәси функсијанын локал минимум нөгтәсидир вә һәмин нөгтәдә минимум гијмәт:

$$y(0)=\frac{0^2}{1+0^2}=0;$$

6) функсијанын икинчи төрәмәсини тапырыг:

$$y''=\left[\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right]'=\frac{2-6x^2}{(1+x^2)^3}\,.$$

Бурадан ајдындыр ки, $y''=0$ олдуғу нөгтәләр

$$2-6x^2=0,\quad x^2=\frac{1}{3},\ x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

вә ја

$$x_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\quad x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$

Бундан башга, $2-6x^2>0$, јә'ни $|x|<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ олдугда $y''>0$, $|x|>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ олдугда исә $y''<0$ олур.

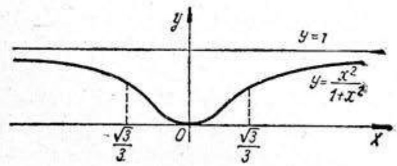
Демәли, $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ вә $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ интервалларында функсијанын графики чөкүк, $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ интервалында исә габарыгдыр. $x_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ вә $x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ нөгтәләри функсијанын графикинин дөнмә нөгтәләридир, чүнки һәмин нөгтәләрдә икинчи төрәмә өз ишарәсини дәјишир;

7) функсија графикинин шагули асимптоту јохдур. Онун маили асимптотуну тапмаг үчүн κ вә b әмсалларыны (§ 10, (6) дүстурлары) тә'јин едәк:

$$\kappa=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x(1+x^2)}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-0\cdot\kappa]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1.$$

Демәли, $y=0\cdot x+1$ вә ја $y=1$ дүз хәтти функсија графикинин асимптотудур. Алынан мә'луматлар функсијанын графикини гурмаға имкан верир (172-чи шәкил).



Шәкил 172

XVIII ФӘСИЛ

КОМПЛЕКС ӘДӘДЛӘР ВӘ ТӘНЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛИ

§ 1. КОМПЛЕКС ӘДӘДЛӘР

Фәрз едәк ки, x вә y ихтијари һәгиги әдәдләрдир. Бу әдәдләр васитәсилә тә'јин олунан

$$z = x + iy \tag{1}$$

шәклиндә ифадәјә *комплекс әдәд* дејилир; бурада i «хәјали ваһид» адланан ријази ишарәдир (символдур). i хәјали ваһиди

$$i^2 = -1$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур.

x вә y һәгиги әдәдләринә z комплекс әдәдинин ујғун олараг *һәгиги* вә *хәјали һиссәси* дејилир вә символик олараг

$$x = \operatorname{Re} z \qquad (\text{вә јахуд } x = \operatorname{Re}(z))$$

вә

$$y = \operatorname{Im} z \qquad (\text{вә јахуд } y = \operatorname{Im}(z))$$

илә ишарә олунур. Re вә Im ишарәләри realis (һәгиги) вә imaginaris (хәјали) латын сөзләринин илк ики һәрфиндән әмәлә кәлмишдир. $x+i0$ комплекс әдәдини һәгиги x әдәдинә бәрабәр һесаб едирләр: $x+i0=x$. Бурадан көрүнүр ки, һәр бир һәгиги әдәд хәјали һиссәси сыфыр олан комплекс әдәд кими бахмаг олар.

$0+iy$ шәклиндә олан комплекс әдәдә *сырф хәјали әдәд* дејилир.

$x-iy$ комплекс әдәди $z=x+iy$ комплекс әдәдинә *гошма олан комплекс әдәд* адланыр вә $\bar{z} = x - iy$ илә көстәрилир. Ајдындыр ки, $(\bar{\bar{z}}) = z$, јә'ни $\bar{z}$ әдәди z-ә ујғун гошма комплекс әдәддирсә, z дә $\bar{z}$ әдәдинә ујғун гошма комплекс әдәддир. Буна көрә дә z вә $\bar{z}$ әдәдләри *гаршылыглы гошма* комплекс әдәдләр адланыр.

Комплекс әдәдләрин бәрабәрлији. Һәгиги вә хәјали һиссәләри ујғун олараг бәрабәр олан $z_1 = x_1+iy_1$ вә $z_2=x_2+iy_2$ комплекс әдәдләрини бәрабәр һесаб едирләр:

$$x_1+iy_1 = x_2+iy_2. \tag{2}$$

Бурадан ајдындыр ки, (2) бәрабәрлији һәгиги әдәдләрин ики

$$x_1=x_2 \quad \text{вә} \quad y_1=y_2$$

бәрабәрлији илә ејникүчлүдүр.

Бөјүк ($>$) вә кичик ($<$) анлајышларынын комплекс әдәдләр үчүн мә'насы јохдур. Комплекс әдәдләр үчүн ишләнән $\neq$ ишарәси бәрабәрлијин олмадығыны, јә'ни $z_1 \neq z_2$ мүнасибәти z_1-ин z_2-јә бәрабәр олмадығыны ифадә едир.

Комплекс әдәдләрин һәндәси көстәрилиши. Һәгиги әдәдләр һәндәси олараг дүз хәттин нөгтәләри илә көстәрилир (IX, § 5). Һәр бир комплекс әдәд ики һәгиги әдәдлә тә'јин олунур. Бурадан ајдындыр ки, комплекс әдәдләри һәндәси олараг мүстәвинин нөгтәләри илә көстәрмәк олар. Бу мәгсәдлә мүстәви үзәриндә дүзбучаглы координат системи (Oxy) көтүрмәк лазымдыр. $z=x+iy$ комплекс әдәдини һәндәси олараг мүстәви үзәриндәки (x, y) нөгтәси илә көстәрирләр. $z=x+iy$ әдәдинә бу (x, y) нөгтәсинин *аффикси* дејилир.

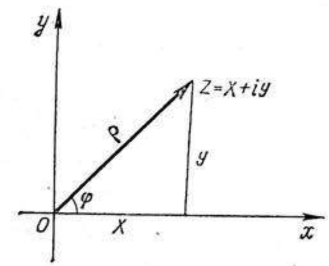
Беләликлә, мүстәвинин һәр бир (x, y) нөгтәси бир $z=x+iy$ комплекс әдәдинин һәндәси көстәрилиши олур. Һәр бир $z=x+iy$ комплекс әдәди исә һәндәси олараг мүстәвинин бир (x, y) нөгтәси илә көстәрилир. Һәгиги әдәдләр абсис охунун, сырф хәјали әдәдләр исә ординат охунун нөгтәләри илә көстәрилир. Бу гајда илә мүстәвинин нөгтәләри чохлуғу илә комплекс әдәдләр чохлуғу арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг јарадылыр.

Комплекс әдәдләри һәндәси олараг көстәрмәк үчүн ишләдилән мүстәвијә *комплекс мүстәви* дејилир. Комплекс мүстәви үзәриндә абсис охуна *һәгиги ох*, ординат охуна исә *хәјали ох* дејилир.

Комплекс әдәдләри, комплекс мүстәви үзәриндә координат башланғычындан чыхан векторларла да һәндәси олараг көстәрмәк олар.

Комплекс әдәдин аргументи вә модулу. Комплекс мүстәви үзәриндә $z=x+iy$ комплекс әдәдини һәндәси көстәрән (x, y) нөгтәсинин полјар координатлары (III, § 7) (ρ, φ) олсун (173-чү шәкил). Онда:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \tag{3}$$



Шәкил 173.

Бурадан ρ вә φ кәмијјәтләрини тә'јин етмәк үчүн

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4}$$

вә

$$\left.\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

мүнасибәтләрини аларыг. $\rho \geqslant 0$ олдуғундан (4) мүнасибәтиндә көкүн һесаби гијмәти көтүрүлүр. (5) мүнасибәтләриндән φ кәмијјәти $2k\pi$ (k там әдәддир) һәддинә гәдәр дәгигликлә тә'јин олунур. φ-ни тә'јин етмәк үчүн (5) мүнасибәтләриндән

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

дүстуруну алмаг олар.

(4) мүнасибəти илə тə'јин олунан $\rho \geqslant 0$ əдəди z комплекс əдəдинин *модулу* адланыр вə

$$\rho = |z| = |x + iy|$$

илə көстəрилир. (5) мүнасибəтлəриндəн тə'јин олунан һəр бир φ кəмијјəти исə z əдəдинин *аргументи* адланыр вə

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} (x+iy)$$

илə көстəрилир.

Бурадан ајдын көрүнүр ки, $\operatorname{Arg} z$ кəмијјəти чохгијмəтлидир вə $2\kappa\pi$ (κ там əдəддир) һəддинə гəдəр дəгигликлə тə'јин олунур. Буна көрə дə чох вахт $\operatorname{Arg} z$-ин баш гијмəтини ајырмаг лазым кəлир. $\operatorname{Arg} z$-ин

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi \qquad (6)$$

бəрабəрсизлијини өдəјəн гијмəтинə онун *баш гијмəти* дејилир вə $\arg z$ илə ишарə олунур: z əдəди мүсбəт һəгиги əдəд олдугда $\arg z=0$, мəнфи һəгиги əдəд олдугда $\arg z=\pi$ вə с. олар.

Һəр бир комплекс əдəдин мүəјјəн модулу вардыр. Комплекс əдəдлəрин модулу һəгиги əдəдлəрин мүтлəг гијмəти анлајышынын үмумилəшмəсидир. $z=x+iy$ комплекс əдəдинин хəјали һиссəси $y=0$ олдугда:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

Сыфыр $0=0+i0$ комплекс əдəдинин модулу $\rho=0$ көтүрүлүр. Һəр бир $z\neq 0$ комплекс əдəдинин сонсуз сајда аргументи вардыр. $\operatorname{Arg} z$ кəмијјəтинин $z=0$ олдугда мə'насы јохдур.

(3) мүнасибəтлəринə əсасəн $z=x+iy$ комплекс əдəдини

$$z=\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (7)$$

шəклиндə јазмаг олар. (7) ифадəсинə *z комплекс əдəдинин тригонометрик шəкли* дејилир.

Ејлер дүстуру. Комплекс əдəдлəр үчүн Ејлер дүстуру

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (8)$$

мүнасибəтинə дејилир. Бу дүстурун доғрулуғуну кəлəчəкдə китабын «Сыралар нəзəријјəси» бөлмəсиндə исбат едəчəјик.

(8) дүстурундан истифадə етсəк (7) мүнасибəтини

$$z = \rho e^{i\varphi} \qquad (9)$$

вə јахуд

$$z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z} \qquad (10)$$

шəклиндə јаза билəрик. (9) ифадəси z комплекс əдəдинин *үстлү шəкли* адланыр.

Ајдындыр ки,

$$1=e^{i0},\ -1=e^{i\pi},\ i=e^{i\frac{\pi}{2}},\quad -i=e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

$$1+i=\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}},\ 1-i=\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{вə с.}$$

Үстлү (вə ја тригонометрик) шəкилдə верилмиш ики $z_1=\rho_1 e^{i\varphi_1}$ вə $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$ комплекс əдəдлəринин бəрабəрлији ($z_1=z_2$) шəртини

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \varphi_1=\varphi_2+2\kappa\pi$$

(κ ихтијари там əдəддир) шəклиндə јазмаг олар.

Верилмиш ики комплекс əдəдин гаршылыглы гошма олмасы шəртини дə мүəјјəн етмəк олар. $z=\rho e^{i\varphi}$ олдугда $\bar{z}=\rho e^{-i\varphi}$. Демəли, гаршылыглы гошма комплекс əдəдлəр үчүн:

$$|z| = |\bar{z}|$$

вə

$$\arg z= -\arg\bar{z} \quad (\arg z\neq\pi).$$

Ејлерин (8) дүстурундан

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi \qquad (11)$$

мүнасибəтини дə алмаг олар.

(8) вə (11) бəрабəрликлəрини тəрəф-тəрəфə топлајыб, сонра да чыхсаг

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \qquad (12)$$

дүстурларыны аларыг.

(12) дүстурларыны һиперболик $\operatorname{sh}\varphi$ вə $\operatorname{ch}\varphi$ функсијаларынын

$$\operatorname{sh}\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2} \quad \text{вə} \quad \operatorname{ch}\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}$$

ифадəлəри (XI, § 21) илə мүгајисə етсəк:

$$\operatorname{ch} i\varphi = \cos\varphi, \quad \operatorname{sh} i\varphi = i\sin\varphi$$

вə ја

$$\cos i\varphi = \operatorname{ch}\varphi, \quad \sin i\varphi = i\operatorname{sh}\varphi.$$

Бурадан ајдындыр ки, тригонометрик вə һиперболик функсијалар арасында сых əлагə вардыр.

§ 2. КОМПЛЕКС ƏДƏДЛƏР ҮЗƏРИНДƏ ҺЕСАБ ƏМƏЛЛƏРИ

Верилмиш $z_1=x_1+iy_1$ вə $z_2=x_2+iy_2$ *комплекс əдəдлəринин чəми*

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2) + i(y_1+y_2) \qquad (1)$$

комплекс əдəдинə дејилир. Бу тə'риф, z_1 вə z_2 комплекс əдəдлəри һəгиги олдугда ($y_1=0$, $y_2=0$) һəгиги əдəдлəрин чəминин мə'лум тə'рифинин ејни олур.

(1) тә'рифиндән алыныр ки, комплекс әдәдләрин топланма әмәли үчүн јердәјишмә вә груплашдырма хассәләри доғрудур:

1. $z_1+z_2=z_2+z_1$;

2. $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$.

Комплекс әдәдләр үчүн чыхма әмәли топлама әмәлинин тәрси кими тә'јин олунур. Верилмиш z_1 вә z_2 комплекс әдәдләринин z_1-z_2 фәрги елә z комплекс әдәдинә дејилир ки,

$$z_1=z_2+z$$

мүнасибәтини өдәсин. Бурадан ајдындыр ки,

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Верилмиш $z_1=x_1+iy_1$ вә $z_2=x_2+iy_2$ *комплекс әдәдләринин һасили*

$$z=z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2) \qquad (2)$$

комплекс әдәдинә дејилир. z_1 вә z_2 комплекс әдәдләри һәгиги әдәдләр олдугда ($y_1=y_2=0$), бу тә'риф һәгиги әдәдләрин һасилинин мә'лум тә'рифинин ејни олур. $z_1=z_2=i$ олдугда (2) тә'рифинә әсасән

$$i\cdot i=i^2=-1$$

олмалыдыр. Бу шәрти гәбул едәрәк (2) вә ја

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)$$

бәрабәрлијини, сол тәрәфдәки икиһәдлиләри ади чәбри гајда илә вурмагла да алмаг олар. Белә етдикдә һасилдә алынан һәгиги һәдләри бир јерә, хәјали олан бүтүн һәдләри исә бир јерә јығараг онлардан ортаг вуруг кими i-ни мөтәризә кәнарына чыхармаг лазымдыр.

Вердијимиз тә'рифдән чыхыр ки, вурма әмәли үчүн јердәјишмә, груплашдырма вә топламаја нәзәрән пајланма ганунлары доғрудур:

1. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$,

2. $z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$,

3. $(z_1+z_2)\cdot z_3=z_1\cdot z_3+z_2\cdot z_3$.

Фәрз едәк ки, z_1 вә $z_2\neq0$ комплекс әдәдләри верилмишдир. Онда елә $z=x+iy$ комплекс әдәди тапмаг олар ки, $z_2\cdot z=z_1$ мүнасибәти өдәнилир. Бу мәгсәдлә (2) тә'рифинә әсасән

$$\left.\begin{aligned} x_2x-y_2y&=x_1,\\ y_2x+x_2y&=y_1\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

системини һәлл етмәк лазымдыр. $z_2\neq0$ олдугда $x_2^2+y_2^2=|z_2|^2>0$ олур вә онда (3) системи биргијмәтли һәлл олунур.

$$z_2z=z_1$$

мүнасибәтини өдәјән z әдәдинә z_1 *комплекс әдәдинин* z_2 *комплекс әдәдинә нисбәти* дејилир вә

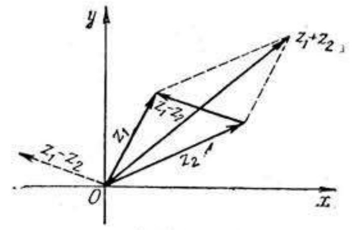
$$z=\frac{z_1}{z_2}$$

шәклиндә јазылыр. (3) системини һәлл етсәк:

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Бу ифадәни, $\dfrac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$ кәсринин сурәт вә мәхрәчини $x_2-iy_2=\bar z_2$ әдәдинә вурмагла да алмаг олар.

Верилмиш z_1 вә z_2 комплекс әдәдләринин чәмини вә фәргини һәндәси олараг мә'лум параллелограм гајдасы илә тапырлар (174-чү шәкил).



Шәкил 174.

Инди ики комплекс әдәд фәргинин модулунун һәндәси мә'насыны изаһ едәк.

$z_1=x_1+iy_1$ вә $z_2=x_2+iy_2$

әдәдләри үчүн

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

вә

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\rho(z_1,z_2).$$

Демәли, $|z_1-z_2|$ ифадәси z_1 вә z_2 нөгтәләри арасындакы мәсафәјә бәрабәрдир.

Инди дә z_1 вә z_2 комплекс әдәдләринин чәминин вә фәргинин модулу һаггында

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|, \qquad (4)$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big| \qquad (5)$$

бәрабәрсизликләрини исбат едәк.

Комплекс мүстәви үзәриндә тәпә нөгтәләри 0, z_1 вә z_2 нөгтәләриндә олан үчбучаг көтүрәк. Бу үчбучағын тәрәфләринин узунлуғу $|z_1|$, $|z_2|$ вә $|z_1+z_2|$ олар (нијә?). Мә'лумдур ки, үчбучағын бир тәрәфинин узунлуғу галан ики тәрәфинин узунлуглары чәминдән бөјүк ола билмәз:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

(5) бәрабәрсизлији (4)-дән алыныр. (4) бәрабәрсизлијини

ардычыл тәтбиг едәрәк, сонлу сајда $z_1, z_2, ..., z_n$ комплекс әдәдләри үчүн

$$|z_1+z_2+...+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+...+|z_n|$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Бу бәрабәрсизликдә бәрабәрлик ишарәси јалныз

$$\arg z_1 = \arg z_2 = ... = \arg z_n$$

олдугда алыныр.

§ 3. МОДУЛУН ВӘ АРГУМЕНТИН ХАССӘЛӘРИ

Комплекс z_1 вә z_2 әдәдләри һасилинин модулу вә аргументи үчүн

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \tag{1}$$

$$\mathrm{Arg}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \tag{2}$$

мүнасибәтләри доғрудур.

Бунун доғру олдуғуну јәгин етмәк үчүн z_1 вә z_2 комплекс әдәдләрини үстлү шәкилдә көтүрәк:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}.$$

Ајдындыр ки,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Демәли, тәләб олунан

$$|z_1 z_2| = \rho_1 \rho_2 = |z_1|\,|z_2|$$

вә

$$\mathrm{Arg}\,(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$$

мүнасибәтләри доғрудур.

(1) вә (2) бәрабәрликләрини сонлу сајда $z_1, z_2, ..., z_n$ комплекс әдәдләри үчүн дә јазмаг олар:

$$|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ... \cdot |z_n|,$$

$$\mathrm{Arg}\,(z_1 \cdot z_2 \cdot ... \cdot z_n) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 + ... + \mathrm{Arg}\, z_n.$$

Бурада $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$ олдугда

$$|z^n| = |z|^n, \tag{3}$$

$$\mathrm{Arg}\, z^n = n\, \mathrm{Arg}\, z. \tag{4}$$

Хүсуси һалда, $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ олдугда (3) вә (4) дүстурларына әсасән:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{5}$$

(5) дүстуруна *Муавр*[1] *дүстуру* дејилир.

[1] Инкилис ријазијјатчысы А б р а г а м М у а в р ы н (1667—1754) шәрәфинә олараг.

Комплекс әдәдләрин нисбәтинин модулу вә аргументи һаггында да охшар тәклифләр алмаг олар. Бу мәгсәдлә (1) вә (2) бәрабәрликләриндә z_1 әвәзинә $\frac{z_1}{z_2}$ нисбәтини ($z_2 \neq 0$) көтүрәк:

$$|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2|$$

вә

$$\mathrm{Arg}\, z_1 = \mathrm{Arg}\, \frac{z_1}{z_2} + \mathrm{Arg}\, z_2.$$

Ахырынчы бәрабәрликләри

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{6}$$

вә

$$\mathrm{Arg}\, \frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}\, z_1 - \mathrm{Arg}\, z_2 \tag{7}$$

шәклиндә јазмаг олар.

Мисал 1. $\sin 3\varphi$ вә $\cos 3\varphi$ кәмијјәтләрини $\sin\varphi$ вә $\cos\varphi$ илә ифадә етмәли.

Муавр дүстуруну $n=3$ үчүн јазсаг:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Бурадан һәгиги вә хәјали һиссәләри ајырсаг:

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

§ 4. КОМПЛЕКС ӘДӘДДӘН КӨКАЛМА

$w^n = z$ мүнасибәти өдәнилдикдә $w = re^{i\psi}$ әдәдинә $z = \rho e^{i\varphi}$ әдәдинин *n-чи дәрәчәдән көкү* дејилир вә $w = \sqrt[n]{z}$ илә ишарә олунур.

$w^n = z$ мүнасибәтиндән $r^n e^{in\psi} = \rho e^{i\varphi}$ аларыг. Бурадан:

$$\rho = r^n$$

вә

$$n\psi = \varphi + 2k\pi$$

(k ихтијари там әдәддир). Ахырынчы мүнасибәтләрдән r вә ψ кәмијјәтләрини тә'јин едәк:

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad \text{вә} \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Беләликлә, комплекс әдәддән n-чи дәрәчәдән көкалма дүстуруну

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right) \qquad (1)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бурада k-ја бүтүн там гијмәтләри вердикдә сағ тәрәфдә анчаг n сајда мүхтәлиф комплекс әдәд алыныр. Бу әдәдләри k-нын $k=0, 1, ..., n-1$ гијмәтләриндә алмаг олар, k-нын јердә галан гијмәтләринә ујғун олан комплекс әдәдләр көстәрдијимиз n комплекс әдәдин бири илә ејни олур.

Доғрудан да,

$$k_1 - k = n$$

олдугда

$$\frac{\varphi+2k_1\pi}{n} = \frac{\varphi+2\pi(k+n)}{n} = \frac{\varphi+2k\pi}{n} + 2\pi$$

вә буна көрә дә

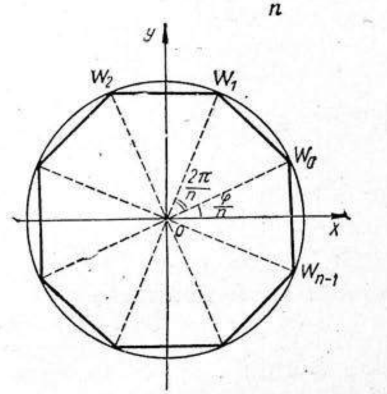
$$\cos\frac{\varphi+2k_1\pi}{n} = \cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}, \quad \sin\frac{\varphi+2k_1\pi}{n} = \sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

k вә $k_1 = k+n$ гијмәтләринә (1) бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндә ујғун олан комплекс әдәдләр ејни олдуғундан, z комплекс әдәдинин n-чи дәрәчәдән көкүнүн n сајда мүхтәлиф гијмәти вардыр. Бу гијмәтләри

$$w_0, w_1 ..., w_{n-1} \qquad (2)$$

илә ишарә едәк. w_k $(k=\overline{0, n-1})$ комплекс әдәдләринин һамысынын модулу ејни $\sqrt[n]{\rho} = \sqrt[n]{|z|}$ әдәдинә бәрабәрдир. k-нын ики гоншу гијмәтинә ујғун олан w_k вә w_{k+1} комплекс әдәдләри аргументләринин фәрги $2\pi/n$-ә бәрабәрдир:

$$\frac{\varphi+2(k+1)\pi}{n} - \frac{\varphi+2k\pi}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$



Шәкил 175.

Алдығымыз нәтичәләр (2) комплекс әдәдләрини һәндәси олараг гурмаға имкан верир. Мәркәзи координат башланғычында олан $R = \sqrt[n]{\rho}$ радиуслу чеврә чәкәк (175-чи шәкил). Бу чеврәнин $\frac{\arg z}{n} = \frac{\varphi}{n}$ шүасы илә кәсишдији нөгтә, w_0 әдәдини һәндәси олараг көстәрән нөгтәдир. Чеврәнин дахилинә тәпәләриндән бир w_0 илә үст-үстә дүшән дүзкүн n-бучаглы чәксәк, бу чохбучаглынын о-

бири тәпәләри $w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ комплекс әдәдләрини һәндәси олараг көстәрән нөгтәләр олар.

Мисал 1. $\sqrt[3]{-1}$ **көкүнүн гијмәтләрини һесабламалы.**

$$|-1| = 1 \quad \text{вә} \quad \arg(-1) = \pi$$

олдуғундан

$$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi).$$

(1) дүстуруна көрә:

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}.$$

Бурада $k=0, 1, 2$ көтүрмәклә $\sqrt[3]{-1}$ көкүнүн ахтарылан үч гијмәтини тапырыг:

$$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -1 \quad \text{вә} \quad \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Мисал 2. Икиһәдли

$$x^n = a \qquad (3)$$

тәнлијинин бүтүн һәлләрини тапмалы. Бу һәлләр, $x=\sqrt[n]{a}$ бәрабәрлијинин сағ тәрәфиндәки $\sqrt[n]{a}$ көкүнүн n гијмәтини һесабламагла тапылыр.

Әкәр a әдәди комплекс әдәддирсә, онда (3) тәнлијинин n һәлли (1) дүстуру илә тапылыр.

$a>0$ һәгиги әдәд олдугда $\arg a = 0 = \varphi$ олдуғуну биләрәк

$$a = a(\cos 0 + i\sin 0)$$

вә (1) дүстуруна әсасән

$$x = \sqrt[n]{a}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k=0, 1, ..., n-1).$$

$a<0$ оларса, онда $\arg a = \pi$ вә $a = |a|(\cos\pi + i\sin\pi)$ вә бу һалда

$$x = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}\right) \quad (k=0, 1, ..., n-1).$$

§ 5. ҺӘГИГИДӘЈИШӘНЛИ КОМПЛЕКС ФУНКСИЈАЛАР

Тутаг ки, x-ин $[a, b]$ парчасындакы һәр бир (һәгиги) гијмәтинә һәр һансы гајда вә ја ганун васитәсилә w дәјишәнинин бир $w = u(x) + iv(x)$ комплекс гијмәти ујғун гојулур. Бу һалда, дејирләр ки, $[a, b]$ парчасында һәгиги дәјишәнли $f(x) = u(x) + iv(x)$ комплекс функсијасы верилмишдир. Бурада $u(x)$ вә $v(x)$ функсијалары һәгигидәјишәнли һәгиги функсијалардыр.

Әкәр $u(x)$ вә $v(x)$ функсијалары кәсилмәјәндирсә, онда $f(x)$ функсијасына *кәсилмәјән функсија* дејилир. $u(x)$ вә $v(x)$ функсијаларынын $u'(x)$ вә $v'(x)$ төрәмәләри варса, онда $f(x)$ функсијасына *диференсиалланан функсија* дејилир вә

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x)$$

ифадәси $f(x)$ функсијасынын x аргументинә нәзәрән *төрәмәси* адланыр.

Бу тә'рифә әсасланараг диференсиалланан $f(x)$ вә $\varphi(x)$ комплекс функсијалары үчүн

$$[Cf(x)]' = Cf'(x) \qquad (C \text{ комплекс әдәддир}),$$

$$[f(x) \pm \varphi(x)]' = f'(x) \pm \varphi'(x),$$

$$[f(x) \cdot \varphi(x)]' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x),$$

$$([f(x)]^n)' = n\,[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot \varphi(x) - f(x) \cdot \varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$$

вә с. кими бәрабәрликләрин доғрулуғуну исбат етмәк олар.

Хүсуси һалда, $f(x) = e^{\kappa x}$ ($\kappa = \alpha + i\beta$ истәнилән комплекс әдәддир) оларса, онда $f'(x) = \kappa e^{\kappa x}$.

Доғрудан да, Ејлер дүстурунун көмәји илә:

$$f'(x) = (e^{\kappa x})' = [e^{(\alpha+i\beta)x}]' = (e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x})' =$$
$$= (e^{\alpha x} \cos \beta x)' + i(e^{\alpha x} \sin \beta x)' = (\alpha e^{\alpha x} \cos \beta x -$$
$$- \beta e^{\alpha x} \sin \beta x) + i(\alpha e^{\alpha x} \sin\beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x) =$$
$$= e^{\alpha x} (\alpha + i\beta)(\cos \beta x + i \sin \beta x) =$$
$$= e^{\alpha x} (\alpha + i\beta) e^{i\beta x} = (\alpha + i\beta) e^{\alpha x + i\beta x} = \kappa e^{\kappa x}.$$

Комплексдәјишәнли функсијаларын үмуми нәзәријјәси кәләчәкдә даһа әтрафлы шәрһ едиләчәкдир.

§ 6. ЧОХҺӘДЛИЛӘРИН ВУРУГЛАРА АЈРЫЛМАСЫ

Тутаг ки, n-дәрәчәли чәбри чохһәдли верилмишдир (XI, § 20):

$$P_n(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{n-1}x^{n-1} + C_nx^n. \qquad (1)$$

Бу чохһәдлинин $C_0, C_1, \ldots, C_n$ әмсаллары һәгиги вә ја комплекс әдәдләрдир. Ихтијари x дәјишәни исә һәгиги вә ја комплекс гијмәтләр ала билир. (*1*) *чохһәдлисинин сыфыра чевирдији* a *әдәдинә* (вә ја a нөгтәсинә) *һәмин чохһәдлинин көкү* дејилир.

$P_n(x)$ чохһәдлиси n-дәрәчәли олдугда

$$P_n(x) = 0 \qquad (2)$$

тәнлијинә *n-дәрәчәли чәбри тәнлик* дејилир. Ајдындыр ки, (1) чохһәдлисинин вә (2) тәнлијинин көкләри ејни әдәдләрдир. Башга сөзлә, (1) чохһәдлисинин сыфырлары (көкләри) (2) тәнлијинин көкләридир.

Тәбии олараг белә бир суал гаршыја чыхыр: һәр бир тәнлијин көкү вармы?

Теорем 1 (чәбрин әсас теореми). ***Һәр бир чәбри тәнлијин ($n \geqslant 1$) һеч олмаса бир һәгиги вә ја комплекс көкү вар.***

Гејри-чәбри тәнликләр үчүн бу теорем доғру дејилдир. Гејри-чәбри тәнлијин һеч бир көкү (һәгиги вә комплекс) олмаја да биләр. Мәсәлән, $e^x = 0$ гејри-чәбри тәнлијинин һеч бир көкү јохдур.

Теорем 2. ***Әкәр а әдәди $P_n(x)$ чохһәдлисинин көкүдүрсә, онда һәмин чохһәдли $x-a$ фәргинә галыгсыз бөлүнүр, јә'ни ($n-1$)-дәрәчәли елә $Q_{n-1}(x)$ чохһәдлиси вар ки,***

$$P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) \qquad (3)$$

мүнасибәти өдәнилир.

Исбаты. $y = P_n(x)$ чохһәдлиси үчүн $x-a$ фәргинә көрә Тејлор дүстуруну јазсаг (XVI, § 5) вә $P_n(a) = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда:

$$P_n(x) = P_n'(a)(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

вә ја

$$P_n(x) = (x-a)\left[P_n'(a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a) + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n-1}\right].$$

Бурадан да (3) дүстурунун доғрулуғу ајдындыр.

Теорем 3. ***Һәр бир n-дәрәчәли $P_n(x)$ чохһәдлиси n сајда хәтти вуруғун вә x^n-ин C_n әмсалынын һасили шәклиндә, јә'ни***

$$P_n(x) = C_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \qquad (4)$$

шәклиндә көстәрилә биләр.

Исбаты. 1-чи теоремә көрә $P_n(x)$ чохһәдлисинин һеч олмасза бир a_1 көкү вар. Онда 2-чи теоремә көрә ($n-1$)-дәрәчәли елә $Q_{n-1}(x)$ чохһәдлиси вар ки,

$$P_n(x) = (x-a_1)Q_{n-1}(x). \qquad (5)$$

Чәбрин әсас теореминә көрә $Q_{n-1}(x)$ чохһәдлисинин дә бир көкү вар. Онда

$$Q_{n-1}(x) = (x-a_2)\,Q_{n-2}(x) \qquad (6)$$

мүнасибәти дә ($n-2$)-дәрәчәли һәр һансы $Q_{n-2}(x)$ чохһәдлиси үчүн өдәниләр.

Ејни гајда илә

$$Q_{n-2}(x)=(x-a_3)Q_{n-3}(x) \text{ вә с.} \qquad (7)$$

Бу просеси давам етдирмәклә

$$Q_1(x)=(x-a_n)Q_0 \qquad (8)$$

мүнасибәтини аларыг. Бурада Q_0 сыфыр дәрәчәли чохһәдли, јә'ни сабит әдәддир. Бу әдәдин x^n-ин әмсалына бәрабәр олмасы ајдындыр.

Алынан (5), (6), (7), ... бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг:

$$P_n(x)=(x-a_1)Q_{n-1}(x)=(x-a_1)(x-a_2)Q_{n-2}(x)=$$
$$=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)Q_{n-3}(x)=\ldots=$$
$$=(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)C_n$$

вә јахуд

$$P_n(x)=C_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n). \qquad (4)$$

Нәтичә. *$P_n(x)$ чохһәдлиси үчүн (4) көстәрилиши доғрудурса, онда $a_1, a_2, \ldots, a_n$ әдәдләри һәмин чохһәдлинин көкләридир, һәмин әдәдләрдән фәргли һеч бир а әдәди ($a\neq a_к$, $к=1, 2, \ldots, n$) исә һәмин чохһәдлинин көкү ола билмәз.*

Доғрудан да,

$$P_n(a_к)=0 \quad (к=1, 2, \ldots, n)$$

вә

$$P_n(a)=C_n(a-a_1)(a-a_2)\ldots(a-a_n)\neq 0.$$

Бурадан ајдындыр ки, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ әдәдләринин һамысы мүхтәлиф олдуғда n-дәрәчәли $P_n(x)$ чохһәдлисинин дүз n сајда көкү олар. Әкәр $a_1, a_2, \ldots, a_n$ әдәдләриндән бәрабәр оланлары варса, онда $P_n(x)$-ин мүхтәлиф көкләринин сајы n-дән кичик олар.

(1) вә (4) бәрабәрликләринин сол тәрәфләринин бәрабәр олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1}+C_nx^n=$$
$$=C_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

вә бурадан

$$C_nx^n+C_{n-1}x^{n-1}+\ldots+C_1x+C_0=C_nx^n-C_n(a_1+a_2+$$
$$+\ldots+a_n)x^{n-1}+C_n(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)x^{n-2}-$$
$$-C_n(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)x^{n-3}+\ldots+$$
$$+(-1)^n a_1a_2\ldots a_n\cdot C_n.$$

Бу бәрабәрлијин сол вә сағ тәрәфиндә олан x-ин ејни гүввәтләринин әмсалларыны бәрабәр һесаб етсәк:

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=-\frac{C_{n-1}}{C_n},$$

$$a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n=\frac{C_{n-2}}{C_n},$$

$$a_1a_2a_3+\ldots+a_{n-2}a_{n-1}a_n=-\frac{C_{n-3}}{C_n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_1a_2a_3\ldots a_n=(-1)^n\frac{C_0}{C_n}.$$

n-дәрәчәли чохһәдлинин көкләри илә әмсаллары арасында әлагә јарадан бу дүстурлара *Вијет*[1] *дүстурлары* дејилир.

§ 7. ЧОХҺӘДЛИЛӘРИН БӘРАБӘРЛИЈИ

Теорем 1. ***n-дәрәчәли $P_n(x)=\sum\limits_{к=0}^{n}C_кx^к$ чохһәдлисинин n-дән чох мүхтәлиф көкү (сыфры) варса, чохһәдли ејниликлә сыфра бәрабәрдир, јә'ни бүтүн $C_к$ ($к=0, 1, 2, \ldots n$) әмсаллары сыфырдыр.***

Исбаты. Шәртә көрә $P_n(x)$ чохһәдлиси ән азы $(n+1)$ сајда мүхтәлиф нөгтәдә сыфра бәрабәрдир. Бу нөгтәләр $a_0, a_1, \ldots, a_n$ олсун. Онда һәмин чохһәдлини

$$P_n(x)=C_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \qquad (1)$$

шәклиндә көстәрмәк олар (§ 6). Бу чохһәдли a_0 нөгтәсиндә дә сыфра чеврилмәлидир: $P_n(a_0)=0$.

$$P_n(a_0)=C_n(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_n)$$

һасилиндәки $(a_0-a_к)$ $(к=1, 2, \ldots, n)$ фәргләринин һамысы сыфырдан фәргли олдуғундан $C_n=0$. Онда (1) бәрабәрлијиндән: $P_n(x)\equiv 0$.

Нәтичә. Әкәр n-дәрәчәли

$$P_n(x)=C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n \qquad (2)$$

вә

$$Q_n(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n \qquad (3)$$

чохһәдлиләринин гијмәтләри аргументин $n+1$ сајда мүхтәлиф гијмәтләриндә үст-үстә дүшүрсә, онда һәмин чохһәдлиләр ејниликлә бәрабәрдир, јә'ни онларын ујғун әмсаллары бир-биринә бәрабәрдир:

$$C_к=b_к \quad (к=0, 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

Бурадан ајдындыр ки, x-ин $(n+1)$ сајда мүхтәлиф $x_0, x_1, \ldots, x_n$ гијмәтләриндә ејни гијмәтләр алан ики мүхтәлиф n-дәрәчәли чохһәдли ола билмәз. Демәли, һәр бир n-дәрәчәли (вә ја дәрәчәси n-дән бөјүк олмајан) чохһәдли өзүнүн $(n+1)$ сајда мүхтәлиф нөгтәдәки гијмәтләри илә биргијмәтли олараг тә'јин олунур.

---

[1] Франсыз ријазијјатчысы Франсуа Вијетин (1540—1603) шәрәфинә олараг.

Верилмиш $x_0, x_1, ..., x_n$ нөгтәләриндә

$$y_0, y_1, ..., y_n \qquad (5)$$

гијмәтләрини алан $T_n(x)$ чохһәдлисини нечә тапмаг олар?

Бу мәсәләни һәлл етмәк үчүн n-дәрәчәли

$$l_к(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{к-1})(x-x_{к+1})...(x-x_n)}{(x_к-x_0)(x_к-x_1)...(x_к-x_{к-1})(x_к-x_{к+1})...(x_к-x_n)}\, y_к$$
$$(к=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n) \qquad (6)$$

чохһәдлиләрини гураг. Бу чохһәдлиләр үчүн

$$l_к(x_m)=\begin{cases} y_к, & к=m \text{ олдугда,} \\ 0, & к\neq m \text{ олдугда} \end{cases}$$

шәрти өдәнилир. Онда

$$P_n(x)=\sum_{к=0}^{n} l_к(x) \qquad (7)$$

чохһәдлиси $P_n(x_к)=y_к$ $(к=0, 1, ..., n)$ шәртләрини өдәјәчәкдир. (7) чохһәдлисинә *Лагранжын интерполјасија чохһәдлиси* дејилир.

Т е о р е м 2. ***Әкәр n-дәрәчәли (2) чохһәдлиси x-ин бүтүн гијмәтләриндә сыфра бәрабәрдирсә, онда онун бүтүн $C_к$ $(к=0, 1, ..., n)$ әмсаллары сыфыр олар: $C_к=0$.***

И с б а т ы. Әкәр $P_n(x)$ чохһәдлиси x-ин бүтүн гијмәтләриндә сыфра бәрабәрдирсә, онда $(n+1)$ сајда мүхтәлиф елә $a_0, a_1, ..., a_n$ нөгтәләри тапмаг олар ки, һәмин нөгтәләрдә $P_n(x)$ чохһәдлиси сыфра бәрабәр олсун. Бу һалда 1-чи теоремә көрә $P_n(x)$-ин бүтүн әмсаллары сыфра бәрабәр олар.

Н ә т и ч ә. x-ин бүтүн гијмәтләриндә (2) вә (3) чохһәдлиләринин гијмәтләри бәрабәрдирсә: $P_n(x)\equiv Q_n(x)$, онда онларын ујғун әмсаллары бир-биринә бәрабәр олар:

$$C_к=b_к \quad (к=0, 1, ..., n).$$

Чохһәдлиләрин бу хассәси, кәләчәкдә чох ишләдәчәјимиз гејри-мүәјјән әмсаллар үсулунун әсасыны тәшкил едир.

§ 8. ЧОХҺӘДЛИНИН ТӘКРАРЛАНАН КӨКЛӘРИ ҺАГГЫНДА

n-дәрәчәли $P_n(x)$ чохһәдлисинин

$$P_n(x)=C_n(x-a_1)(x-a_2)\ ...\ (x-a_n) \qquad (1)$$

ајрылышында бә'зи хәтти вуруглар бир-биринин ејни оларса, онда онун һәмин ајрылышыны

$$P_n(x)=C_n(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_m)^{\alpha_m} \qquad (2)$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу һалда a_1 әдәди чохһәдлинин α_1 дәфә,

a_2 әдәди α_2 дәфә тәкрарланан көкү вә с. адланыр. Чохһәдлинин α дәфә тәкрарланан көкү, онун бир-биринә бәрабәр олан α сајда көкү һесаб олунур. Буну нәзәрә алсаг n-дәрәчәли чохһәдлинин (2) ајрылышы үчүн

$$n=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$$

мүнасибәтини аларыг, јә'ни n-дәрәчәли һәр бир чохһәдлинин дүз n сајда һәгиги вә ја комплекс көкү вардыр.

Тәбии олараг belә бир суал гаршыја чыхыр: a әдәдинин верилмиш $P_n(x)$ чохһәдлисинин α дәфә тәкрарланан көкү олдуғуну нечә билмәк олар?

Т е о р е м. ***a_1 әдәди $P_n(x)$ чохһәдлисинин α_1 дәфә тәкрарланан көкү олмасы үчүн***

$$P_n(a_1)=P_n'(a_1)=...=P_n^{(\alpha_1-1)}(a_1)=0;\quad P_n^{(\alpha_1)}(a_1)\neq 0 \qquad (3)$$

шәртләринин өдәнилмәси зәрури вә кафидир.

Шәртин зәрурилији. Тутаг ки, a_1 әдәди $P_n(x)$ чохһәдлисинин α_1 дәфә тәкрарланан көкүдүр. Онда (2) ајрылышына көрә:

$$P_n(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}\varphi(x). \qquad (4)$$

Бурада

$$\varphi(x)=C_n(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_m)^{\alpha_m}$$

чохһәдлиси $x=a_1$ нөгтәсиндә сыфра чеврилмир:

$$\varphi(a_1)=C_n(a_1-a_2)^{\alpha_2}...(a_1-a_m)^{\alpha_m}\neq 0.$$

(4) бәрабәрлијиндән төрәмә алсаг

$$P_n'(x)=\alpha_1(x-a_1)^{\alpha_1-1}\varphi(x)+(x-a_1)^{\alpha_1}\varphi'(x)=$$
$$=(x-a_1)^{\alpha_1-1}[\alpha_1\varphi(x)+(x-a_1)\varphi'(x)]$$

вә

$$\varphi_1(x)=\alpha_1\varphi(x)+(x-a_1)\varphi'(x)$$

ишарәсини гәбул етсәк, онда

$$P_n'(x)=(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdot\varphi_1(x). \qquad (5)$$

Демәли, a_1 әдәди $P_n(x)$ чохһәдлисинин α_1 дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онда һәмин әдәд онун төрәмәсинин α_1-1 дәфә тәкрарланан көкүдүр. Бундан башга, (4) вә (5) бәрабәрликләринә әсасән:

$$P_n(a_1)=P_n'(a_1)=0.$$

(5) бәрабәрлијиндән јенидән төрәмә алсаг вә бу просеси давам етдирсәк

$$P_n(a_1)=P_n'(a_1)=...=\overset{(\alpha_1-1)}{P_n'}(a_1)=0$$

вә

$$\overset{(\alpha_1)}{P_n'}(a_1)=\alpha_1!\,\varphi(a_1)\neq 0$$

мүнасибәтләрини, јә'ни (3) шәртләрини аларыг.

Шәртин кафилији. Тутаг ки, (3) шәртләри өдәнилир. Онда $P_n(a_1)=0$ олдуғундан a_1 әдәди $P_n(x)$ чохһәдлисинин көкү олар.

a_1 көкүнүн тәкрарланма тәртибини β_1 илә ишарә едәк. Бу һалда шәртин зәрурилијиндә исбат етдијимизә көрә

$$P_n(a_1) = P_n'(a_1) = \ldots = P_n^{(\beta_1 - 1)}(a_1) = 0, \quad P_n^{(\beta_1)}(a_1) \neq 0$$

шәртләри өдәниләр. Бу шәртләри (3) илә мүгајисә етсәк, $\alpha_1 = \beta_1$ олдуғуну, јә'ни a_1 әдәди $P_n(x)$ чохһәдлисинин α_1 дәфә тәкрарланан көкү олдуғуну исбат етмиш оларыг.

§ 9. ҺӘГИГИ ӘМСАЛЛЫ ЧОХҺӘДЛИЛӘРИН ҺӘГИГИ ВУРУГЛАРА АЈРЫЛМАСЫ

Тутаг ки, n-дәрәчәли

$$P_n(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n \tag{1}$$

чохһәдлисинин бүтүн $C_0, C_1, \ldots, C_n$ әмсаллары һәгиги әдәдләрдир.

Теорем 1. ***Әкәр $a + ib$ комплекс әдәди һәгиги әмсаллы $P_n(x)$ чохһәдлисинин көкүдүрсә, онда һәмин әдәдин $a - ib$ гошмасы да онун көкү олар.***

Исбаты. Верилмиш $P_n(x)$ чохһәдлисиндә x әвәзинә $a+ib$ јазараг, һәмин әдәд үзәриндә көстәрилән әмәлләри (гүввәтә јүксәлдиб сонра да әмсаллара вурмаг) апарсаг, сонра да һәгиги вә хәјали һиссәләри ајырсаг, онда

$$P_n(a+ib) = u + iv \tag{2}$$

олар. $P_n(x)$ чохһәдлисинин әмсаллары һәгиги әдәд олдуғундан:

$$\overline{P_n(a+ib)} = P_n(\overline{a+ib}) = P_n(a-ib).$$

Буна көрә дә:

$$P_n(a-ib) = u - iv. \tag{3}$$

Шәртә көрә $P_n(a+ib) = u + iv = 0$ олдуғундан $u = 0$ вә $v = 0$ олар. Онда (3) бәрабәрлијиндән: $P_n(a-ib) = 0$.

Демәли, һәгиги әмсаллы $P_n(x)$ чохһәдлисинин комплекс көкләри чүт-чүт гошма олмалыдыр, јә'ни $P_n(x)$ чохһәдлисинин

$$P_n(x) = C_n(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) \tag{4}$$

ајрылышында $[x-(a+ib)]$ шәклиндә вуруг варса, онда һәмин ајрылышда $[x-(a-ib)]$ шәклиндә вуруг да һөкмән олмалыдыр. Белә ики вуруғун һасили

$$[x-(a+ib)][x-(a-ib)] = [(x-a)-ib][(x-a)+ib] =$$
$$= (x-a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q$$

кими һәгиги $p = -2a$ вә $q = a^2 + b^2$ әмсаллы $x^2 + px + q$ квадрат үчһәдлисини верир.

Бундан башга, әкәр $a+ib$ әдәди һәгиги әмсаллы $P_n(x)$ чохһәдлисинин α дәфә тәкрарланан көкүдүрсә, онда $a-ib$ әдәди дә онун α дәфә тәкрарланан көкү олар. Бу һалда (4) ајрылышында α сајда $[x-(a+ib)]$ вуруғу вә α сајда $[x-(a-ib)]$ вуруғу олмалыдыр. Бу вуругларын һамысынын һасили

$$[x-(a+ib)]^\alpha [x-(a-ib)]^\alpha = ([(x-a)-ib][(x-a)+ib])^\alpha =$$
$$= (x^2 + px + q)^\alpha$$

вуруғуну верәр.

Беләликлә, ашағыдакы теореми исбат етмиш олуруг:

Теорем 2. ***Һәгиги әмсаллы һәр бир $P_n(x)$ чохһәдлиси бир вә икидәрәчәли һәгиги әмсаллы вуругларын һасили шәклиндә, јә'ни***

$$P_n(x) = C_n(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k} \times$$
$$\times (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{\beta_s} \tag{5}$$

шәклиндә көстәрилә биләр. Бурада

$$n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k + 2\beta_1 + 2\beta_2 + \ldots + 2\beta_s.$$

Гејд. Чохһәдлинин комплекс көкләри олмадыгда (5) ајрылышында квадратик (икидәрәчәли) вуруглар олмаз, чохһәдлинин һәгиги көкләри олмадыгда исә (5) ајрылышында анчаг икидәрәчәли вуруглар олар.

§ 10. ТӘНЛИКЛӘРИН ҺӘЛЛИ ҺАГГЫНДА

Верилмиш n-дәрәчәли $P_n(x)$ чохһәдлисини вуруглара ајырмаг үчүн n-дәрәчәли

$$P_n(x) = 0 \tag{1}$$

чәбри тәнлијини һәлл етмәк лазымдыр. $n = 2$ олдугда чәбри тәнлијин (квадрат тәнлијин) һәлли, јә'ни тәнлијин көкләрини әмсаллары васитәсилә ифадә едән дүстурлар орта мәктәбин ријазијјат курсундан мә'лумдур.

Үч вә дөрд дәрәчәли чәбри тәнликләрин һәлли үчүн дә дүстурлар тапылмышдыр. Һәмин дүстурлар али чәбр курсунда верилир. Тәнлијин көкләрини әмсаллары илә ифадә едән бу дүстурлар чох мүрәккәб олдуғундан онлардан практикада чох аз истифадә олунур.

Галуа[1] вә Абел[2] исбат етмишләр ки, $n > 4$ олдугда үмуми чәбри тәнлијин көкләрини әмсаллары васитәсилә (чәбри әмәлләрлә) ифадә едән дүстур вермәк мүмкүн дејилдир.

Буна көрә дә јүксәк дәрәчәли бир чох чәбри тәнликләри тәгриби һәлл етмәјә чалышырлар. Чәбри тәнликләрин көкләрини истәнилән дәгигликлә тапмаға имкан верән мүхтәлиф үсуллар вардыр. Буну да нәзәрә алмаг лазымдыр ки, бир чох чәбри тәнликләрин һәллини дәгиг тапмаг мүмкүн олса да алынан нәтичәләрдән практики ишләрдә истифадә етмәк чәтин олур. Мәсәлән, чәбри тәнлијин һәлли заманы тапылан көкүн $x = \sqrt{3}$ кими дәгиг гијмәтиндән практики ишләрдә истифадә етмәк олмур. Бу һалда да $\sqrt{3}$-нүн мүәјјән дәгигликлә тапылмыш тәгриби гијмәтиндән

[1] Еварист Галуа (1811—1832) франсыз ријазијјатчысыдыр.
[2] Нилс Һенрих Абел (1802—1829) норвеч ријазијјатчысыдыр.

истифадә олунур. Бу бахымдан чәбри тәнликләрин мүрәккәб радикаллар васитәсилә тапылмыш дәгиг көкләриндән мүәјјән дәгигликлә тапылмыш тәгриби көкләри практики ишләрдә даһа әлверишлидир.

Елементар ријазијјат курсунда транссендент (чәбри олмајан) тәнликләрин дә садә нөвләри өјрәнилир. Тригонометрик, үстлү вә логарифмик тәнликләрин бир чох нөвләринин дәгиг һәлли тапылыр. Үмуми һалда исә транссендент тәнликләрин дәгиг һәллини һәмишә тапмаг мүмкүн дејилдир. Буна көрә дә чәбри тәнликләр кими транссендент тәнликләрин дә һәллинин тәгриби тапылмасы мүһүм мәсәләләрдән бири һесаб олунур. Сонракы параграфларда истәнилән (чәбри вә гејри-чәбри) тәнлијин көкләринин тәгриби һесабланмасы үсулларындан әтрафлы данышылачагдыр.

Бирдәјишәндән асылы һәр бир тәнлик

$$f(x)=0 \tag{1}$$

шәклиндә јазылыр. Бурада $f(x)$ бир x дәјишәниндән асылы функсијадыр. Ајдындыр ки, (1) тәнлијинин көкләри $f(x)$ функсијасынын сыфырлары олар. Әкәр тәнлијин әмсаллары һәрфләрдән дејил, конкрет әдәдләрдән ибарәт олса, онда онун һәгиги көкләри истәнилән дәгигликлә тәгриби һесаблана биләр.

(1) шәклиндә һәр бир тәнлијин һәгиги көкләринин тәгриби һесабланма просеси ики мәрһәләјә бөлүнүр:

биринчиси, $f(x)$ функсијасынын тә'јин областына дахил олан елә парча тапырлар ки, бу парчада (1) тәнлијинин анчаг бир көкү јерләшсин. Буна биз *көкүн «тәкләнмәси»* (ајрылмасы), көкүн јерләшдији парчаја исә *«көку тәкләјән парча»* дејәчәјик. Әкәр (1) тәнлијинин x_0 көкү тәкләнмишдирсә, онда һәмин көкүн јерләшдији парчанын (x_0 бу парчада јерләшән јеканә көкдүр) учларыны һәмин көкүн тәгриби гијмәтләри (ахтарылан көкүн биринчи јахынлашмасы) һесаб етмәк олар;

икинчиси, һәр бир тәкләнмиш көкүн јерләшдији парчанын, јә'ни көкү тәкләјән парчанын узунлуғуну истәнилән гәдәр кичилтмәјә имкан верән просес гururлар. Беләликлә дә тәкләнмиш көкүн истәнилән дәгигликлә тәгриби гијмәтини тапмаг мүмкүн олур.

§ 11. ТӘНЛИЈИН КӨКЛӘРИНИН ТӘКЛӘНМӘСИ

Верилмиш

$$f(x)=0 \tag{1}$$

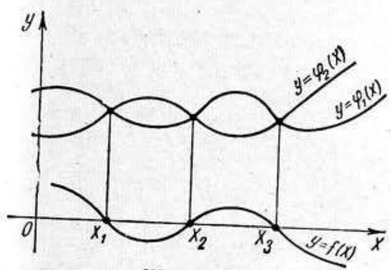
тәнлијинин һәгиги көкләрини мүхтәлиф васитәләрлә тәкләмәк олар. $y=f(x)$ функсијасынын графикини гурмаг мүмкүн олдугда бу графикин абсис охуну кәсдији нөгтәләри тәгриби тә'јин етмәк олур. Бу һалда һәмин нөгтәләрин һәр бирини өз дахилинә алан, јә'ни онлары тәкләјән парчалары тә'јин етмәк чәтин олмаз.

Бә'зән (1) тәнлијини садә чевирмәләрлә

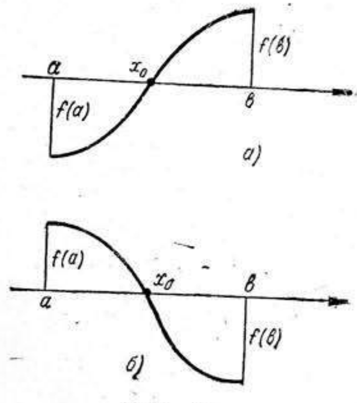
$$\varphi_1(x)=\varphi_2(x) \tag{2}$$

тәнлији шәклинә кәтирирләр. Бу һалда (1) тәнлијинин көкләри $y=\varphi_1(x)$ вә $y=\varphi_2(x)$ функсијалары графикләринин кәсишмә нөгтәсинин абсисләри олар.

Әлбәттә, (1) тәнлијинин (2) шәклинә кәтирилмәси о заман әлверишлидир ки, $y=\varphi_1(x)$ вә $y=\varphi_2(x)$ функсијаларынын графикинин гурулмасы $y=f(x)$ функсијасынын графикинин гурулмасындан асан олсун. $\varphi_1(x)$ вә $\varphi_2(x)$ функсијаларыны бә'зән елә сечирләр ки, онларын графикләри әввәлдән мә'лум олан әјриләр олур. Бу һалда, $y=f(x)$ функсијасынын абсис охуну кәсдији нөгтәләр $y=\varphi_1(x)$ вә $y=\varphi_2(x)$ функсијалары графикләринин кәсишмә нөгтәләринин абсисләри илә үст-үстә дүшүр (176-чы шәкил).



Шәкил 176.



Шәкил 177.

Әкәр $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасы бу парчанын уч нөгтәләриндә мүхтәлиф ишарәли гијмәтләр ($f(a)f(b)<0$) алырса, онда (XIII, § 8, III хассә) һәмин парчанын һеч олмаса бир дахили x_0 нөгтәсиндә сыфра чевриләр. $f(x_0)=0$, јә'ни (1) тәнлијинин $[a, b]$ парчасында һеч олмаса бир x_0 көкү вардыр. Бу һалда x_0 көкүнү $[a, b]$ парчасынын тәклэдијини һөкм етмәк олмаз. Чүнки $[a, b]$ парчасында (1) тәнлијинин x_0-дан башга да көкү ола биләр. x_0-ын $[a, b]$ парчасында јеканә олмасы үчүн $y=f(x)$ функсијасы әлавә шәртләри өдәмәлидир.

Әкәр $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $y=f(x)$ функсијасы һәмин парчада монотондурса вә $f(x_0)=0$ ($a<x_0<b$) өдәнилирсә, онда $[a, b]$ парчасы x_0 көкүнү тәкләјән парчадыр. Демәли, (1) тәнлијинин x_0 көкүнү тәкләјән $[a, b]$ парчасы $f(x)$ функсијасынын монотонлуг парчасы олмалыдыр. $y=f(x)$ функсијасынын һәр бир монотонлуг парчасында $f'(x)$ төрәмәси өз ишарәсини сахлајыр: $f'(x)>0$ олдуғу парчада $f(x)$ артан (177-чи шәкил, a)), $f'(x)<0$ олан парчада исә азалан олар (177-чи шәкил, $б$)).

Беләликлә, (1) тәнлијинин һәгиги көкләрини тәкләмәк үчүн $f(x)$ функсијасынын бүтүн монотонлуг парчаларыны тапмаг лазымдыр. Бу парчаларын һәр бириндә $f(x)$-ин ән чоху бир сыфры ола биләр.

Мисал.

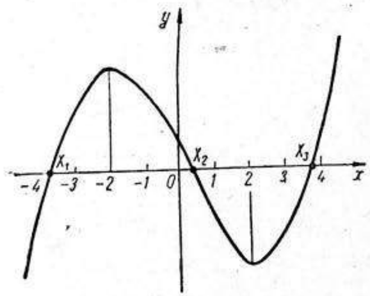
$$x^3-12x+3=0 \tag{3}$$

тәнлијинин көкләрини тәкләмәли.

Ајдындыр ки, $f(x)=x^3-12x+3$ функсијасы вә онун $f'(x)=3x^2-12$ төрәмәси бүтүн әдәд охунда кәсилмәјәндир. $3x^2-12=0$ тәнлијинин $x_1=-2$ вә $x_2=+2$ көкләри $f(x)$ функсијасынын монотонлуг интервалларыны тә'јин едир: $(-\infty, -2)$, $(-2, +2)$ вә $(+2, +\infty)$.

Бу интервалларын биринчисиндә, јә'ни $-\infty<x<-2$ олдугда $f'(x)>0$. Демәли, $(-\infty, -2)$ интервалында $f(x)$ функсијасы артандыр. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ вә $f(-2)=+19$ олдуғундан һәмин интервалда (3) тәнлијинин бир һәгиги x_1 көкү вардыр. $f(-4)=-13<0$ вә $f(-3)=+12>0$ олдуғундан x_1 көкүнү тәкләјән парча олараг $[-4, -3]$ парчасыны көтүрмәк олар.

Икинчи интервалда, јә'ни $-2<x<2$ олдугда $f'(x)<0$ олур. Буна көрә дә $[-2, 2]$ парчасында $f(x)$ азаландыр. $f(-2)=+19>0$ вә $f(+2)=-13<0$ олдуғундан (3) тәнлијинин $[-2, 2]$ парчасында јерләшән бир x_2 көкү вардыр. Бу көкү тәкләјән парча олараг $[0, 1]$ парчасыны ($f(0)=+3>0$, $f(1)=-8<0$) көтүрмәк олар.



Шәкил 178.

Үчүнчү $(+2, +\infty)$ интервалында исә $f'(x)>0$ олдуғундан һәмин интервалда $y=f(x)$ артан функсијадыр. Һәмин интервалда (3) тәнлијинин x_3 һәгиги көкү вардыр. Бу көкү тәкләјән парча олараг $[3, 4]$ парчасыны ($f(3)=-6<0$, $f(4)=19>0$) көтүрмәк олар (178-чи шәкил).

§ 12. СЫНАГ ҮСУЛУ

Тутаг ки, $[a, b]$ парчасы

$$f(x)=0 \tag{1}$$

тәнлијинин һәгиги x_0 көкүнү тәкләмишдир. Мүәјјәнлик үчүн $f(a)<0$ вә $f(b)>0$ олдуғуну гәбул едәк. Бу һалда x_0 көкүнү тәкләјән $[a, b]$ парчасыны, узунлуғу даһа кичик олан вә һәмин көкү тәкләјән јени $[a_1, b_1]$ парчасы илә ашағыдакы сынаг үсулу илә әвәз етмәк олар: $[a, b]$ парчасында јерләшән ихтијари c гијмәти көтүрүлүр. Әкәр $[a, c]$ парчасынын уч нөгтәләриндә $f(a)f(c)<0$ шәрти өдәниләрсә, онда $[a_1, b_1]$ парчасы олараг $[a, c]$ парчасы көтүрүлүр. Әкс һалда исә $[a_1, b_1]$ олараг $[c, b]$ парчасы көтүрүлүр.

Бу просеси $[a_1, b_1]$ парчасында јени ихтијари d гијмәти көтүрмәклә давам етдирмәк олар. Беләликлә, x_0 көкүнү ајыран вә даһа кичик узунлуғу олан $[a_2, b_2]$ парчасыны аларыг. Истәнилән дәгиглик алынана гәдәр бу просеси давам етдирмәк мүмкүндүр.

Бә'зән c нөгтәси олараг $[a, b]$ парчасынын $c_1=\dfrac{a+b}{2}$ орта нөгтәсини, d олараг $[a_1, b_1]$ парчасынын $c_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$ орта нөгтәсини вә с. көтүрүрләр.

Беләликлә, ардычыл јарыјабөлмә просесиндә ја парчаларын биринин орта нөгтәси x_0 көкү илә үст-үстә дүшүр (бу һалда просес дајаныр), ја да x_0 көкүнү тәкләјән вә һәр бири өзүндән әввәлкинин дахилиндә јерләшән

$$[a_1\ b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ... \tag{2}$$

парчалар ардычыллығы алыныр. Бурада

$$f(a_n)<0,\quad f(b_n)>0 \quad \text{вә} \quad \text{уз. } [a_n, b_n]=\frac{b-a}{2^n}.$$

Јығылан парчалар принсипинә (XII, § 3) көрә (2) ардычыллығы јеканә бир ξ нөгтәсинә јығылар:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=\xi. \tag{3}$$

Көстәрәк ки, ξ нөгтәси (1) тәнлијинин x_0 көкү илә үст-үстә дүшүр. Бу мәгсәдлә фәрз едәк ки, $y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјәндир. Онда $f(a_n)<0$ вә $f(b_n)>0$ бәрабәрсизликләриндә лимитә кечсәк

$$f(\xi)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\leqslant 0,\quad f(\xi)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)\geqslant 0$$

олар. Бу ики бәрабәрсизликдән $f(\xi)=0$, јә'ни $\xi=x_0$ алыныр.

Апардығымыз мүһакимә (1) тәнлијинин ахтарылан һәгиги x_0 көкүнү тапмаг үчүн алгоритм мүәјјән едир. Бу x_0 көкүнүн тәгриби гијмәти олараг $[a_n, b_n]$ парчасынын $c_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ орта нөгтәсини көтүрмәк олар.

(1) тәнлијинин $[a, b]$ парчасында јерләшән дәгиг x_0 көкүнүн тәгриби гијмәти олараг ихтијари $a\leqslant c\leqslant b$ әдәди көтүрүлдүкдә бурахылан хәта үчүн

$$|c-x_0|\leqslant b-a \tag{4}$$

бәрабәрсизлији алынар (x_0-ын гијмәти мә'лум олмадығы үчүн $c-x_0$ фәргини һесабламаг мүмкүн дејилдир). Бурадан, $x_0\approx c$ тәгриби бәрабәрлијинин мүтләг хәтасынын

$$\Delta(c)=b-a \tag{5}$$

олмасы ајдындыр. Әкәр x_0 көкүнүн тәгриби гијмәти олараг $[a, b]$ парчасынын $c = \frac{a+b}{2}$ орта нөгтәси көтүрүләрсә, онда мүтләг хәта:

$$\Delta(c) = \frac{b-c}{2},$$

x_0 көкүнүн тәгриби гијмәти олараг $[a_n, b_n]$ парчасынын $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$ орта нөгтәси көтүрүлдүкдә исә мүтләг хәта:

$$\Delta(c_n) = \frac{b-a}{2^{n+1}} \tag{6}$$

олар. Сынаг үсулу илә көкүн тәгриби гијмәтини истәнилән дәгигликлә һесабламаг мүмкүн олса да, бу үсул практики чәһәтдән бир о гәдәр дә әлверишли дејилдир. Чүнки көкүн дәгиг гијмәтинә бу үсулла јахынлашманын сүр'әти чох кичикдир.

Мисал. $x^3-12x+3=0$ тәнлијинин $[0, 1]$ парчасы илә тәкләнән x_2 көкүнү парчаны јарыја бөлмәклә тәгриби һесабламалы (§ 11).

$[0, 1]$ парчасынын орта нөгтәси $c_1 = \frac{1}{2}$ олар. $f(0) = +3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{23}{8}$ вә $f(1) = -8$ олдуғундан x_2 көкүнү тәкләјән јени парча олараг $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ парчасыны көтүрмәк олар. $x_2 \approx \frac{1}{2}$ гәбул етсәк, онда бу тәгриби бәрабәрлијин мүтләг хәтасы $\Delta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ олар.

Бу просеси бир дә тәтбиг етсәк вә $f(0) = +3$, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{64}$ вә $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{23}{8}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда x_2 көкүнү тәкләјән јени парча олараг $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ парчасыны көтүрмәк олар. Бу һалда $x_2 \approx \frac{1}{4}$ тәгриби бәрабәрлијини аларыг. Бурада просеси јенә дә давам етдирмәк мүмкүндүр.

Парчаны ардычыл јарыја бөлмәклә апарылан сынаг үсулунун нәтичәләрини ашағыдакы чәдвәл шәклиндә көстәрмәк олар.

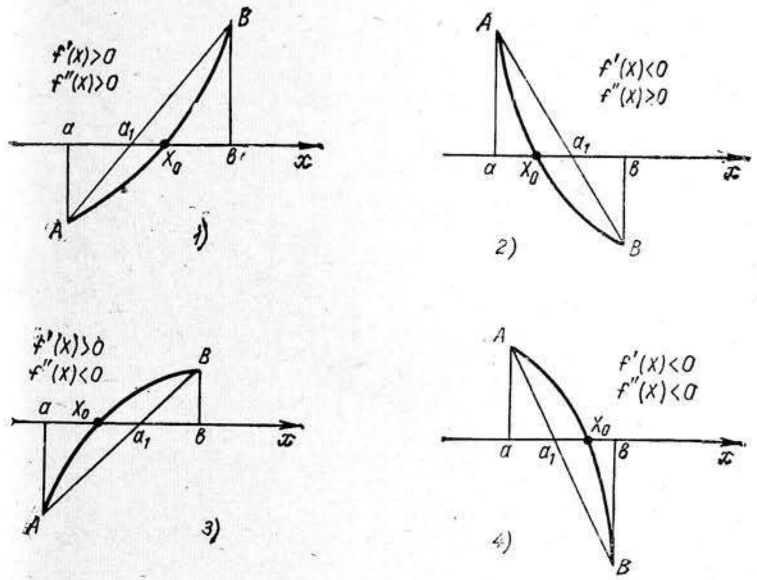
к	$[a_к, b_к]$	$c_к$	$f(c_к)$				Ишарәләр		
						$f(c_к)$	$f(a_к)$	$f(c_к)$	$f(b_к)$

§ 13. ВӘТӘРЛӘР ҮСУЛУ

Тутаг ки, $[a, b]$ парчасы

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

тәнлијинин һәгиги x_0 көкүнү тәкләмишдир вә $f(x)$ функсијасы һәмин парчада кәсилмәјәндир. Бундан әлавә фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән вә өз ишарәләрини сахлајан биринчи вә икинчи төрәмәләри вар. Онда $y = f(x)$ функсијасынын $[a, b]$ парчасында графики 179-чу шәкилдә көстәрилән дөрд һалдан бири олар.



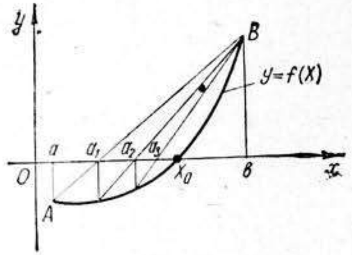
Шәкил 179.

Үмумилији азалтмадан мүһакимәни биринчи һал (179-чу шәкил, 1)), јә'ни $f'(x)>0$ вә $f''(x)>0$ олан һал үчүн апараг. Бу һалда, $y=f(x)$ функсијасы графикинин $A[a, f(a)]$ вә $B[b, f(b)]$ нөгтәләрини бирләшдирән AB вәтәринин (180-чи шәкил) абсис охуну кәсдији нөгтәнин a_1 абсиси тәнлијин x_0 көкүнүн тәгриби гијмәти олараг гәбул олунур (вәтәрләр үсулу ады да бурадан әмәлә кәлмишдир).

a_1 әдәдини тә'јин етмәк үчүн AB вәтәринин тәнлијини јазаг:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Шәртә көрә $x=a_1$ олдугда $y=0$ олмасындан



Шәкил 180.

$$-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{a_1-a}{b-a}$$

мүнасибәтини вә бурадан

$$a_1=a-\frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} \qquad (2)$$

бәрабәрлијини аларыг. Ајдындыр ки, a_1 әдәди a илә x_0 арасында јерләшир: $a<a_1<x_0$. Буна көрә дә јухарыдакы мүһакимәни $[a_1, b]$ парчасы үчүн дә апармаг олар. Онда x_0 көкүнүн тәгриби a_2 гијмәти үчүн

$$a_2=a_1-\frac{(b-a_1)f(a_1)}{f(b)-f(a_1)}$$

ифадәсини тапарыг. Јенә дә $a<a_1<a_2<x_0$. Мүһакимәни ардычыл олараг давам етдирсәк x_0 көкүнүн n-чи јахынлашмасы үчүн

$$a_n=a_{n-1}-\frac{(b-a_{n-1})f(a_{n-1})}{f(b)-f(a_{n-1})} \qquad (3)$$

дүстуру алынар. $a=a_0$ гәбул етсәк, $n=1$ олдугда (3) дүстурундан (2) бәрабәрлијини дә алмаг олар.

(3) рекуррент дүстуру вәтәрләр үсулунун алгоритмини тә'јин едир. x_0 көкү үчүн тапдығымыз $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ тәгриби гијмәтләри артараг кетдикчә һәмин x_0 әдәдинә даһа чох јахынлашыр:

$$a<a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}<a_n<\ldots<x_0<b. \qquad (4)$$

Исбат етмәк олар ки, (3) дүстуру илә тә'јин олунан a_n әдәдләри ардычыллығы һәмишә (1) тәнлијинин x_0 көкүнә јығылыр. Доғрудан да, (4) мүнасибәтинә көрә $\{a_n\}$ ардычыллығы артан вә јухарыдан мәһдуддур. Буна көрә дә онун сонлу $\lim_{n\to\infty} a_n=\xi$ лимити вар. (3) бәрабәрлијиндә $n\to\infty$ шәртиндә лимитә кечсәк вә $f(x)$-ин кәсилмәз олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$\xi=\xi-\frac{(b-\xi)f(\xi)}{f(b)-f(\xi)}.$$

Бурадан $f(\xi)=0$ алыныр. $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында монотон артан олдуғундан онун һәмин парчада сыфры јеканә олмалыдыр. Демәли, $\xi=x_0$ вә $\lim_{n\to\infty} a_n=x_0$.

Бу һалда $|a_n-x_0|$ фәргини ашағыдакы кими гијмәтләндирмәк дә олар.

Лагранж теореминә көрә

$$f(a_n)-f(x_0)=f'(\xi_n)(a_n-x_0),\quad \xi_n\in(a_n, x_0)$$

вә $f(x_0)=0$ олдуғундан:

$$a_n-x_0=\frac{f(a_n)}{f'(\xi_n)}. \qquad (5)$$

Бурадан, $|f'(x)|\geqslant m>0$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ олдугда

$$|a_n-x_0|\leqslant\frac{|f(a_n)|}{m} \qquad (6)$$

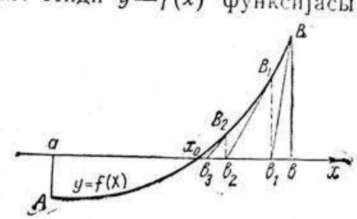
бәрабәрсизлији алыныр.

§ 14. ТОХУНАНЛАР (ВӘ ЈА НЈУТОН) ҮСУЛУ.

Әввәлки параграфда сөјләдијимиз шәртләр дахилиндә (вә орада бахдығымыз һалда)

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

тәнлијинин $[a, b]$ парчасы илә тәкләнмиш x_0 көкүнүн тәгриби гијмәтини һесабламагла мәшғул олаг. Инди $y=f(x)$ функсијасы графикинин $B[b, f(b)]$ учунда ($f(x)f''(x)>0$ шәртинин өдәнилдији учунда) һәмин әјријә чәкилмиш тохунанын (181-чи шәкил) абсис оxуну кәсдији нөгтәнин b_1 абсисини (1) тәнлијинин x_0 көкүнүн тәгриби гијмәти һесаб едәк (тохунанлар үсулунун ады бурадан әмәлә кәлмишдир). Бу тохунанын тәнлијини јазаг:



Шәкил 181.

$$y-f(b)=f'(b)(x-b). \qquad (2)$$

Ајдындыр ки, $x=b_1$ олдугда $y=0$ олмалыдыр. Онда (2) тәнлијиндән:

$$-f(b)=f'(b)(b_1-b)$$

вә ја

$$b_1=b-\frac{f(b)}{f'(b)}. \qquad (3)$$

Шәкилдән көрүнүр ки, $x_0<b_1<b$ мүнасибәти өдәнилир. Буна көрә дә $[a, b_1]$ парчасы үчүн дә јухарыдакы әмәлијјаты апармаг олар. Бу һалда x_0 көкүнүн јени

$$b_2=b_1-\frac{f(b_1)}{f'(b_1)}$$

тәгриби гијмәтини аларыг. Бу мүһакимәни ардычыл давам етдирмәклә x_0 көкүнү

$$b=b_0>b_1>b_2>\dots>b_n>\dots>x_0>a \qquad (4)$$

бәрабәрсизлијини өдәјән вә

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})} \qquad (5)$$

рекуррент дүстуру илә тә'јин олунан b_n $(n=1, 2, \dots)$ тәгриби гијмәтләрини аларыг.

(5) дүстуру илә тә'јин олунан b_n әдәдләри ардычыллығы (1) тәнлијинин x_0 көкүнә јығылыр. Доғрудан да, (4) мүнасибәтинә көрә $\{b_n\}$ ардычыллығы азалан вә ашағыдан мәһдуд олдуғундан онун сонлу $\lim_{n\to\infty} b_n = \xi$ лимити вар. Бу һалда (5) бәрабәрлијиндә лимитә кечиб, $f'(x)$ вә $f(x)$ функсијаларынын кәсилмәз олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$\xi = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}, \quad f'(\xi)\neq 0$$

вә ја

$$f(\xi)=0.$$

$[a, b]$ парчасында монотон артан $f(x)$ функсијасынын һәмин парчада сыфры јеканә олмалыдыр. Демәли,

$$\xi = x_0 \quad \text{вә} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

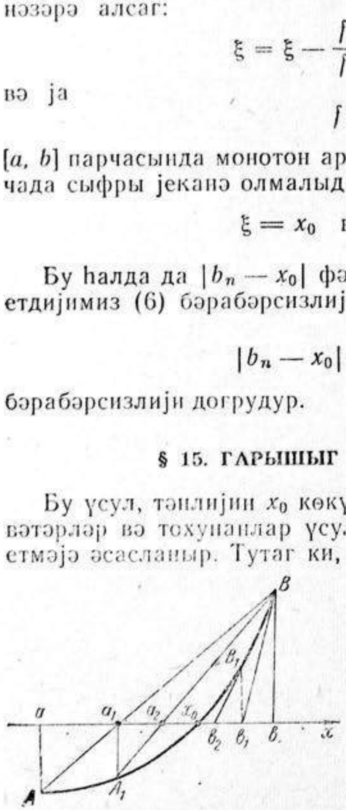
Бу һалда да $|b_n - x_0|$ фәрги үчүн әввәлки параграфда исбат етдијимиз (6) бәрабәрсизлији, јә'ни

$$|b_n - x_0| \leqslant \frac{|f(b_n)|}{m} \qquad (6)$$

бәрабәрсизлији доғрудур.

§ 15. ГАРЫШЫГ ҮСУЛ.

Бу үсул, тәнлијин x_0 көкүнүн тәгриби гијмәтини тапмаг үчүн вәтәрләр вә тохунанлар үсулларындан ејни заманда истифадә етмәјә әсасланыр. Тутаг ки, $f(x)=0$ тәнлијинин x_0 көкү $[a, b]$ парчасы илә тәкләнмишдир вә $f(x)$ функсијасы 13-чү параграфда көстәрилән шәртләри өдәјир. Онда вәтәрләр үсулу илә тәнлијин көкүнә солдан јахынлашан (јенә дә әввәлки ики параграфда тәдгиг олунан һала бахырыг) a_1 әдәдини вә тохунанлар үсулу илә она сағдан јахынлашан b_1 әдәдини



Шәкил 182.

тапмаг олар (182-чи шәкил). Сонра $[a_1, b_1]$ $(a_1<x_0<b_1)$ парчасына вәтәрләр вә тохунанлар үсулларыны тәтбиг едәрәк, x_0 көкүнә даһа јахын олан a_2 вә b_2 әдәдләрини тапырыг: $a<a_1<a_2<x_0<b_2<b_1<b$.

Беләликлә, просеси давам етдирәрәк x_0 көкүнә һәр ики тәрәфдән ејни заманда јахынлашан

$$a_n = a_{n-1} - \frac{(b-a_{n-1})f(a_{n-1})}{f(b)-f(a_{n-1})} \qquad (1)$$

вә

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})} \qquad (2)$$

әдәдләрини аларыг:

$$a=a_0<a_1<a_2<\dots<a_n\dots<x_0<\dots<b_n<\dots<b_2<b_1<b_0=b.$$

Гејд едәк ки, тәнлијин x_0 көкүнү α дәгиглији $(\alpha>0)$ илә һесабламаг тәләб олундугда, просеси $b_n - a_n < \alpha$ шәртини өдәјән a_n вә b_n әдәдләри алынана гәдәр давам етдирмәк лазымдыр.

Мисал. $x^3-12x+3=0$ тәнлијинин [3, 4] парчасы илә тәкләнмиш x_3 көкүнүн (§ 11) гарышыг үсулла тәгриби гијмәтини һесабламалы.

$f(x)=x^3-12x+3$ функсијасынын $f'(x)=3x^2-12$ вә $f''(x)=6x$ төрәмәләринин һәр икиси [3, 4] парчасында мүсбәтдир. Буна көрә дә (1) вә (2) дүстурларыны тәтбиг етмәк олар.

$a=a_0=3$ вә $b=b_0=4$ олдуғундан:

$$a_1 = 3 - \frac{(4-3)f(3)}{f(4)-f(3)} \quad \text{вә} \quad b_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)}.$$

Бурадан: $a_1=3{,}240$ вә $b_1=3{,}472$.

(1) вә (2) дүстурларыны бир дә тәтбиг етсәк

$$3{,}308<x_3<3{,}340$$

бәрабәрсизлијини өдәјән $a_2=3{,}308$ вә $b_2=3{,}340$ әдәдләрини аларыг.

(1) вә (2) дүстурларыны бир дә тәтбиг етсәк, x_3 көкү үчүн 0,0001 дәгигликлә $x_3=3{,}332$ гијмәтини аларыг.

§ 16. ИТЕРАСИЈА ВӘ ЈА АРДЫЧЫЛ ЈАХЫНЛАШМА ҮСУЛУ

Верилмиш $f(x)=0$ тәнлијинин һәгиги ξ_0 көкүнүн тәгриби гијмәтини һесабламаг үчүн тәтбиг олунан (сынаг, вәтәрләр вә тохунанлар) үсулларын үмуми чәһәти ондан ибарәтдир ки, ејни нөв просес ардычыл олараг тәкрар олунур вә һәр дәфә тәкрар олундугча ξ_0 көкүнә даһа јахын тәгриби гијмәтләр алыныр. Белә үсуллара *итерасија* (латынча мә'насы тәкрарланан олан «itera-tio» сөзүндән көтүрүлмүшдүр) вә ја *ардычыл јахынлашма үсуллары* дејилир.

Тәнлијин тәгриби һәлли үчүн итерасија үсулу үмуми шәкилдә ашағыдакы кими тәтбиг олунур: $f(x)=0$ тәнлијини

$$x=\varphi(x) \qquad (1)$$

еквивалент шәклиндә јазырлар. (1) тәнлијинин ξ_0 көкүнү тәкләјән $[a, b]$ парчасынын һәр һансы x_0 нөгтәсини көтүрәрәк, ону сыфырынчы јахынлашма һесаб едирләр. Сонра биринчи јахынлашма олан x_1 гијмәтини (1) тәнлијиндән

$$x_1=\varphi(x_0)$$

шәклиндә тапырлар. Бундан сонракы јахынлашмалар ашағыдакы шәкилдә гурулур:

$$\begin{aligned} x_2 &= \varphi(x_1), \\ x_3 &= \varphi(x_2), \\ &\dots\dots \\ x_n &= \varphi(x_{n-1}), \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

Әкәр гурулан $\{x_n\}$ ардычыллығы јығыландырса, онда онун лимити (1) тәнлијинин һәлли олар. Доғрудан да, $\varphi(x)$ функсијасынын кәсилмәз олдуғуну гәбул етсәк, онда:

$$\xi_0=\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\varphi(x_{n-1})=\varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1})=\varphi(\xi_0)$$

вә ја

$$\xi_0=\varphi(\xi_0).$$

Бу көстәрир ки, ξ_0 әдәди (1) тәнлијинин көкүдүр.

Демәли, $\{x_n\}$ ардычыллығы јығылан олдугда n-ин бөјүк гијмәтләриндә x_n-и (1) тәнлијинин тәгриби һәлли һесаб етмәк олар.

Гурулан $\{x_n\}$ ардычыллығы дағылан да ола биләр. Бу һалда истифадә олунан итерасија үсулу (1) тәнлијинин тәгриби һәлли үчүн һеч бир нәтичә вермәз.

Гурулан итерасија үсулунун јығылмасы һаггында ашағыдакы теореми исбат едәк:

Т е о р е м. ***Тутаг ки, $\varphi(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин көкүнү тәкләјән $[a, b]$ парчасында диференсиалланандыр вә онун төрәмәси һәмин парчанын бүтүн нөгтәләриндә***

$$|\varphi'(x)|\leqslant\lambda<1 \qquad (2)$$

бәрабәрсизлијини өдәјир. Бу һалда, әкәр $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$ шәрти өдәнилирсә, онда итерасија просеси јығыландыр вә сыфырынчы јахынлашма олараг $[a, b]$ парчасынын истәнилән x_0 нөгтәсини көтүрмәк олар.

И с б а т ы. (1) тәнлијинин $[a, b]$ парчасында јерләшән јеканә көкү ξ_0 олдугда n-чи јахынлашма үчүн Лагранж теореминә әсасән

$$x_n-\xi_0=\varphi(x_{n-1})-\varphi(\xi_0)=\varphi'(t)(x_{n-1}-\xi_0), \quad t\in(x_{n-1}, \xi_0)$$

мүнасибәти доғру олар. Бурадан, (2) бәрабәрсизлијинә әсасән

$$|x_n-\xi_0|\leqslant\lambda|x_{n-1}-\xi_0| \qquad (3)$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Бу бәрабәрсизлији ардычыл олараг тәтбиг етсәк:

$$\begin{aligned} &|x_1-\xi_0|\leqslant\lambda|x_0-\xi_0|, \\ &|x_2-\xi_0|\leqslant\lambda|x_1-\xi_0|\leqslant\lambda^2|x_0-\xi_0|, \\ &|x_3-\xi_0|\leqslant\lambda|x_2-\xi_0|\leqslant\lambda^3|x_0-\xi_0|, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &|x_n-\xi_0|\leqslant\lambda^n|x_0-\xi_0|. \end{aligned}$$

$0<\lambda<1$ олдуғундан $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n=0$ вә буна көрә дә $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n-\xi_0|=0$. Демәли, $\{x_n\}$ ардычыллығы ξ_0 нөгтәсинә (тәнлијин көкүнә) јығыландыр.

Гејд едәк ки, $f(x)=0$ тәнлијини

$$x=x-\frac{f(x)(b-x)}{f(b)-f(x)}$$

шәклиндә јазсаг вә сыфырынчы јахынлашма олараг $x_0=a$ әдәдини көтүрсәк, онда итерасија үсулундан вәтәрләр үсулу, тәнлији

$$x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

шәклиндә јаздыгда исә итерасија үсулундан тохунанлар үсулу алынар.

Мисал. $x^3-x-1=0$ тәнлијинин $[1, 2]$ парчасы илә тәкләнмиш ξ_0 көкүнүн итерасија үсулу илә тәгриби гијмәтини тапмалы.

Верилмиш тәнлији

$$x=\sqrt[3]{x+1}$$

шәклиндә јазаг. $\varphi(x)=\sqrt[3]{x+1}$ функсијасы үчүн исбат етдијимиз теоремин шәртләри өдәнилир:

$$0<\varphi'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}<1 \qquad (1\leqslant x\leqslant 2).$$

Буна көрә дә итерасија просесини гурмаг олар. Сыфырынчы јахынлашма $x_0=1$ олсун. Онда сонракы јахынлашмалары ашағыдакы кими тапарыг:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{x_0+1}=1{,}2599, \\ x_2 &= \sqrt[3]{x_1+1}=1{,}3123, \\ x_3 &= \sqrt[3]{x_2+1}=1{,}3224, \end{aligned}$$

$$x_4 = \sqrt[3]{x_3 + 1} = 1{,}3243,$$
$$x_5 = \sqrt[3]{x_4 + 1} = 1{,}3246,$$
$$x_6 = \sqrt[3]{x_5 + 1} = 1{,}3247,$$
$$x_7 = \sqrt[3]{x_6 + 1} = 1{,}3247.$$

Бурадан ајдындыр ки,

$$\xi_0 \approx 1{,}3247$$

кими көтүрсәк, онда бу тәгриби бәрабәрлијин мүтләг хәтасы $\Delta = 0{,}00005$ олар.

§ 17. КИЧИК ПАРАМЕТР ҮСУЛУ

Кичик параметр үсулу ријазијјатда ән чох ишләнән универсал үсуллардан биридир. Бу үсулун тәтбиголунма схеми беләдир: тутаг ки, һәлли тәләб олунан ријази мәсәлә ахтарылан дәјишәнләрдән башга бир α параметриндән дә асылыдыр. Бу мәсәләнин $\alpha=0$ олдугда һәллини (буна һәјәчанланмамыш һәлл дејилир) һәр һансы јолла тапмаг мүмкүн олдугда, онун α-нын сыфыра јахын кичик гијмәтләриндә һәллини (буна мәсәләнин һәјәчанланмыш һәлли дејилир) бә'зән α-нын гүввәтләринә көрә ајрылмыш шәкилдә (әлбәттә, мүәјјән дәгигликлә) тапмаг мүмкүн олур. Бу һәллин α иштирак етмәјән биринчи һәдди мәсәләнин $\alpha=0$ олдугдакы һәлли (һәјәчанланмамыш һәлли) олмалыдыр.

Мәсәләнин α-нын гүввәтләринә көрә ајрылмыш һәллини чох вахт гејри-мүәјјән әмсаллар үсулу илә тапырлар. Бу мәгсәдлә һәлл, әввәлчә α-нын гүввәтләринә көрә гејри-мүәјјән әмсалларла (һәрфләрлә) јазылыр. Сонра исә мәсәләнин шәртиндән истифадә едәрәк, α-нын мүхтәлиф гүввәтләри иштирак едән мүәјјән бәрабәрлик алыныр. Бу бәрабәрликдән, α-нын ејни дәрәчәли гүввәтләринин әмсалларыны мүгајисә едәрәк, гејри-мүәјјән әмсаллар тапылыр. Дедикләримизи бир тәнлијин һәлли үзәриндә изаһ едәк.

Мисал. $x^3 + \alpha x - 1 = 0$ тәнлијинин $|\alpha|$-нын кичик гијмәтләриндә һәллини кичик параметр үсулу илә тапмалы.

Әввәлчә тәнлијин $\alpha=0$ олдугда һәллини тапаг. Бу заман тәнлик $x^3 - 1 = 0$ шәклинә дүшүр ки, онун да һәлли $x=1$-дир.

Инди верилмиш тәнлијин һәллини

$$x = 1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \dots$$

вә ја садәчә олараг

$$x = 1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3$$

шәклиндә ахтараг. x-ин бу гијмәтләрини тәнликдә јеринә јазсаг вә α^3-дан јүксәк дәрәчәли һәдләри атсаг:

$$(1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3)^3 - \alpha(1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3) - 1 = 0,$$
$$(1+3a\alpha+3b\alpha^2+3a^2\alpha^2+3c\alpha^3+a^3\alpha^3) - \alpha - a\alpha^2 - b\alpha^3 - 1 = 0,$$
$$(3a-1)\alpha + (3b+3a^2-a)\alpha^2 + (a^3+3c-b)\alpha^3 = 0.$$

Бурадан a, b, c әмсалларыны тапмаг үчүн

$$3a - 1 = 0,$$
$$3b + 3a^2 - a = 0,$$
$$3c + a^3 - b = 0$$

тәнликләр системини аларыг. Бу системи һәлл етсәк:

$$a = \frac{1}{3}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{1}{81}.$$

Беләликлә, $|\alpha|$-нын кичик гијмәтләриндә тәнлијин һәлли

$$x = 1 + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{81}\alpha^3 \qquad (1)$$

олачагдыр.

Бурада бир чәһәти гејд етмәк лазымдыр. Мәсәләнин кичик параметр үсулу илә тапылмыш һәлли $|\alpha|$-нын кифајәт гәдәр кичик гијмәтләриндә дүзкүн нәтичә верир (кичик параметр үсулунун ады да бурадан әмәлә кәлмишдир). α-нын бөјүк гијмәтләриндә исә тапылмыш һәлл дүзкүн нәтичә вермәјә дә биләр. Чүнки атылмыш јүксәк дәрәчәли һәдләр, ола биләр ки, α-нын бөјүк гијмәтләриндә галан һәдләрә нисбәтән даһа бөјүк олсун.

Кичик параметр үсулуна бә'зән *һәјәчанлар үсулу* да дејилир. Кичик параметр үсулунун әввәлки параграфда шәрһ етдијимиз итерасија үсулу илә дә сых әлагәси вардыр.

XIX ФӘСИЛ

ИНТЕРПОЛЈАСИЈА ВӘ ФУНКСИЈАЛАРЫН ЈАХЫНЛАШМАСЫ

§ 1. ФУНКСИЈАЛАРЫН ЈАХЫНЛАШМА МӘСӘЛӘСИ

Бир чох нәзәри вә практики мәсәләләрдә мүрәккәб аналитик ифадәси олан вә ја гијмәтләри чәтин һесабланан функсијалары даһа садә функсијаларла әвәз етмәк лазым олур. Белә мәсәләләрлә функсијаларын јахынлашма вә ја конструктив нәзәријјәсиндә мәшғул олурлар.

Функсијаларын јахынлашма нәзәријјәсинин әсас мәсәләсини үмуми шәкилдә ашағыдакы кими сөјләмәк олар: верилмиш $X=\{x\}$ чохлуғунда тә'јин олунмуш (нисбәтән мүрәккәб) $f(x)$ функсијаларынын кениш $E=\{f(x)\}$ чохлуғу вә нисбәтән садә

олан $P(x)$ функсијаларынын дар $F=\{P(x)\}$ чохлуғу верилир. F чохлуғундан елә $P(x)$ функсијасы сечмәк (ајырмаг) тәләб олунур ки, о, E чохлуғунун верилмиш $f(x)$ функсијасындан һәр һансы мә'нада (һәр бир конкрет һалда бу мә'на көстәрилмәлидир) ән аз фәргләнсин. Адәтән, E чохлуғу олараг верилмиш $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән функсијалар чохлуғу, $[a, b]$ парчасында мәһдуд функсијалар чохлуғу вә с. көтүрүлүр. F чохлуғу олараг дәрәчәси верилмиш m әдәдиндән бөјүк олмајан чәбри чохһәдлиләр чохлуғу, әмсаллары там әдәдләр олан чәбри чохһәдлиләр чохлуғу вә с. көтүрүлүр.

Верилмиш $f(x)$ вә $P(x)$ функсијаларынын бир-бириндән фәргини (мејлини) мүхтәлиф үсулла «өлчмәк» олар. Бу өлчмә үсулундан асылы олараг функсијаларын мүхтәлиф јахынлашма мәсәләләри: функсијаларын интерполјасијасы, мүнтәзәм јахынлашмасы вә орта јахынлашмасы кими мәсәләләр алыныр.

Функсијаларын интерполјасија нәзәријјәсинин әсасыны белә бир принсип тәшкил едир: сечилән $P(x)$ чохһәдлиси верилмиш $f(x)$ функсијасы илә сонлу сајда (көстәрилмиш) $x_0, x_1, ..., x_m$ нөгтәләриндә үст-үстә дүшмәлидир, јә'ни һәмин нөгтәләрдә

$$P(x_к) - f(x_к) = 0 \quad (к=0, 1, ..., m) \qquad (1)$$

бәрабәрликләри өдәнилмәлидир. Белә бир мәсәлә илә биз әввәлки фәсилдә (XVIII, § 7) мәшғул олдуг. Орада верилмиш $x_0, x_1, ..., x_n$ нөгтәләриндә ујғун олараг $y_0, y_1, ..., y_n$ гијмәтләрини алан n-дәрәчәли чохһәдли гурмаг мәсәләси һәлл едилмишдир.

Бир чох елми вә техники мәсәләләрин һәлли функсијаларын интерполјасијасы мәсәләсинә кәтирилир. Мәсәлән, тутаг ки, x вә y кәмијјәтләри арасындакы функсионал асылылыг һәр һансы һадисәни кәмијјәтчә характеризә едир. y-ин x-дән асылылығы, јә'ни $y = f(x)$ функсијасы мә'лум дејилдир, лакин мүәјјән тәчрүбә нәтичәсиндә аргументин $x_к$ $(к=0, 1, ..., n)$ гијмәтләриндә функсијанын $y_к$ $(к=0, 1, ..., n)$ гијмәтләри алмасыны тә'јин етмәк мүмкүн олмушдур. Бу һалда мә'лум олмајан $y= f(x)$ функсијасыны интерполјасија үсулу илә тапмаг (әлбәттә, чох заман тәгриби) лазым кәлир.

Функсијаларын интерполјасијасы мәсәләсинә кәтирилән практики мәсәләләр чох сөјләмәк олар.

Функсијаларын мүнтәзәм јахынлашма нәзәријјәсинин әсасыны исә белә бир принсип тәшкил едир: сечилмиш $P(x)$ чохһәдлиси илә верилмиш $f(x)$ функсијасы фәргинин мүтләг гијмәтинин глобал максимуму, јә'ни

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |f(x)-P(x)|$$

кәмијјәти мүмкүн гәдәр ән кичик (сыфра јахын) олмалыдыр.

Биз әввәлләр e^x, $\sin x$, $\cos x$ вә с. функсијаларынын гијмәтләрини һесабламаг үчүн әслиндә һәмин функсијаларын чәбри чохһәдлиләрә јахынлашмасындан истифадә етмишдик (XV, § 9).

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|e^x-\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}\right)\right|,$$

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\sin-\left(x-\frac{x^3}{3!}+....+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}\right)\right|,$$

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2!}+...+(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!}\right)\right|$$

вә с. кәмијјәтләри чох кичик әдәдләр олдуғундан

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+..,+\frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!},$$

(n тәк әдәддир)

$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!}$$

(n чүт әдәддир)

вә с. тәгриби бәрабәрликләриндән истифадә етмәк олар.

Мәсәлән,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4}}\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}\right)\right|<0{,}2\cdot 10^{-8},$$

јә'ни $\sin x$ функсијасынын гијмәтләри

$$P(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$$

чохһәдлисинин ујғун гијмәтләриндән чох кичик олан $0{,}2\cdot 10^{-8}$ әдәди гәдәр фәргләнә биләр. Бу исә бөјүк дәгигликдир.

§ 2. ЛАГРАНЖЫН ИНТЕРПОЛЈАСИЈА ЧОХҺӘДЛИСИ

Фәрз едәк ки, $y = f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмушдур, $x_0, x_1, ..., x_n$ исә һәмин парчада јерләшән ихтијари нөгтәләрдир:

$$a\leqslant x_0<x_1< ... <x_n \leqslant b. \qquad (1)$$

Бу нөгтәләрдә $f(x)$ функсијасы илә ејни гијмәтләр алан

$$f(x_к) = P(x_к) \quad (к=0, 1, ..., n) \qquad (2)$$

вә дәрәчәси n-дән бөјүк олмајан $P(x)$ чохһәдлисини гураг. Бу

һалда $P(x)$ чоxһәдлисинә *интерполјасија чоxһәдлиси,* (1) нөгтәләринә исә *интерполјасија дүјүнләри* дејилир.

Интерполјасија чоxһәдлисини гурмаг үчүн һәр биринин дәрәчәси n-дән бөјүк олмајан вә

$$P_к(x_i) = \begin{cases} 1, & к=i \text{ олдугда,} \\ 0, & к\neq i \text{ олдугда} \end{cases} \tag{3}$$

шәртләрини өдәјән

$$P_к(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{к-1})(x-x_{к+1})\dots(x-x_n)}{(x_к-x_0)\dots(x_к-x_{к-1})(x_к-x_{к+1})\dots(x_к-x_n)} \tag{4}$$

чоxһәдлиләриндән (XVIII, § 7) истифадә едәк. Бу һалда (2) шәртләрини өдәјән $P(x)$ чоxһәдлисини

$$P(x) = \sum_{к=0}^{n} f(x_к)\, P_к(x) \tag{5}$$

шәклиндә гурмаг олар. (5) чоxһәдлисинә *Лагранжын интерполјасија чоxһәдлиси* дејилир.

Верилмиш (2) шәртләрини өдәјән $P(x)$ интерполјасија чоxһәдлиси јеканәдир. Доғрудан да, (2) шәртләрини өдәјән вә дәрәчәси n-дән бөјүк олмајан башга бир $Q(x)$ чоxһәдлиси дә оларса, онда $R(x)=P(x)-Q(x)$ чоxһәдлиси $(n+1)$ сајда (1) нөгтәләриндә сыфыра бәрабәр олар:

$$R(x_к)=P(x_к)-Q(x_к)=0 \quad (к=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

Бу көстәрир ки, $R(x)\equiv 0$, јә'ни $P(x)\equiv Q(x)$ олмалыдыр (XVIII, § 7).

Лагранжын (5) интерполјасија чоxһәдлисини башга шәкилдә дә јазмаг олар. Бу мәгсәдлә $(n+1)$-дәрәчәли

$$\psi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \tag{6}$$

чоxһәдлисини көтүрәк.

$$\psi'(x_к)=(x_к-x_0)(x_к-x_1)\dots(x_к-x_{к-1})(x_к-x_{к+1})\dots(x_к-x_n)$$

олдуғундан (4) чоxһәдлисини

$$P_к(x)=\frac{\psi(x)}{(x-x_к)\psi'(x_к)}$$

шәклиндә көстәрмәк олар. Бу гијмәти (5) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг, Лагранжын интерполјасија чоxһәдлисини

$$P(x)=\sum_{к=0}^{n} f(x_к)\ \frac{\psi(x)}{(x-x_к)\psi'(x_к)} \tag{7}$$

шәклиндә аларыг.

§ 3. ЛАГРАНЖ ИНТЕРПОЛЈАСИЈА ЧОXҺӘДЛИСИНИН ГАЛЫГ ҺӘДДИНИН ГИЈМӘТЛӘНДИРИЛМӘСИ

$[a,\ b]$ парчасында тә'јин олунмуш $f(x)$ функсијасы илә

$$x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n \tag{1}$$

интерполјасија дүјүнләриндә үст-үстә дүшән вә дәрәчәси n-дән бөјүк олмајан

$$P(x)=\sum_{к=0} f(x_к)\, P_к(x) \tag{2}$$

Лагранж интерполјасија чоxһәдлиси $x\neq x_к$ нөгтәләриндә, үмумијјәтлә, $f(x)$ функсијасындан фәргләнир. Буна көрә дә $f(x)$ функсијасыны (2) чоxһәдлиси илә әвәз етдикдә мүәјјән xәта алыныр. Бу xәтаны гијмәтләндирмәк үчүн Лагранж интерполјасија чоxһәдлисинин галыг һədди адланан

$$R_n(x)=f(x)-P(x) \tag{3}$$

ифадәсини тәдгиг едәк.

Фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасы $[a,\ b]$ парчасында $(n+1)$ дәфә диференсиалланандыр. Онда (3) бәрабәрлији илә тә'јин олунан $R_n(x)$ галығы да $[a,\ b]$ парчасында $(n+1)$ дәфә диференсиалланандыр вә $P^{(n+1)}(x)\equiv 0$ олдуғундан:

$$R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x) \qquad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{4}$$

Инди дә $x\in[a,\ b]$ нөгтәсини гејд едәрәк, көмәкчи

$$\varphi(t)=R_n(t)-\frac{R_n(x)}{\psi(x)}\,\psi(t),\quad a\leqslant t\leqslant b$$

функсијасыны дүзәлдәк; бурада:

$$\psi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Ајдындыр ки, $\varphi(t)$ функсијасы $x,\ x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n$ нөгтәләриндә сыфра чеврилир:

$$\varphi(x)=0,\ \varphi(x_к)=0 \quad (к=0,\ 1,\ \dots,\ n)$$

вә $[a,\ b]$ парчасында $(n+1)$ дәфә диференсиалланандыр. $\varphi(t)$ функсијасы көстәрилән $(n+2)$ сајда нөгтәдә сыфра чеврилдијиндән, Ролл теореминә көрә онун $\varphi'(t)$ төрәмәси ән азы $(n+1)$ сајда нөгтәдә, икинчи $\varphi''(t)$ төрәмәси исә ән азы n сајда нөгтәдә вә с. сыфра чеврилəр. Онда $\varphi(t)$ функсијасынын $(n+1)$-тәртибли

$$\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-\frac{R_n(x)}{\psi(x)}\,(n+1)!$$

төрәмәси $[a, b]$ парчасынын ән азы бир $a<\xi<b$ нөгтәсиндә сыфра чеврилир:

$$f^{(n+1)}(\xi)-\frac{R_n(x)}{\psi(x)}(n+1)!=0.$$

Бурадан, галыг һәдди үчүн

$$R_n(x)=\frac{\psi(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

вә јахуд

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \quad (5)$$

$$(a\leqslant x\leqslant b,\quad a<\xi<b)$$

ифадәсини аларыг.

Беләликлә, (3) бәрабәрлијинә көрә:

$$f(x)=P(x)+R_n(x)$$

вә ја

$$f(x)=P(x)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi). \quad (6)$$

Әкәр $M_{n+1}=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{(n+1)}(x)|$ гәбул етсәк, онда галыг һәдд үчүн

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|$$

бәрабәрсизлијини аларыг. Хүсуси һалда, x_0 нөгтәсиндә $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x_0)=0$ олдугда интерполјасија чохһәдлиләри ардычыллығы һәмин нөгтәдә $f(x)$ функсијасына јығылар:

$$\lim_{n\to\infty}P(x_0)=f(x_0). \quad (7)$$

Гејд етмәк лазымдыр ки, «ән јахшы» функсијалар, мәсәлән, $[a, b]$ парчасында истәнилән тәртибдән төрәмәси олан бә'зи функсијалар үчүн (7) бәрабәрлији өдәнилмәјә дә биләр, јә'ни галыг һәддин лимити сыфыр олмаз.

§ 4. СОНЛУ ФӘРГЛӘР ВӘ ОНЛАРЫН ТӨРӘМӘ ИЛӘ ӘЛАГӘСИ

Тутаг ки, $f(x)$ функсијасы верилмишдир. $h>0$ һәр һансы әдәд оларса, $f(x+h)-f(x)$ фәргинә $f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндә *биртәртибли (h аддымлы) сонлу фәрги* дејилир вә

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=\Delta_h f(x) \quad (1)$$

шәклиндә ишарә олунур. $f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндә *икитәртибли сонлу фәрги*

$$\Delta^2 f(x)=\Delta(\Delta f(x))=\Delta_h(\Delta_h f(x))$$

ифадәсинә вә јахуд

$$\Delta^2 f(x)=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x) \quad (2)$$

ифадәсинә дејилир. Бу гајда илә давам едәрәк, функсијанын истәнилән тәртибли сонлу фәргинә тә'риф вермәк олар.

$f(x)$ функсијасынын x нөгтәсиндә n-тәртибли (h аддымлы) сонлу фәрги

$$\Delta^n f(x)=\Delta(\Delta^{n-1}f(x))$$

вә јахуд

$$\Delta^n f(x)=\sum_{\kappa=0}^{n}(-1)^{n-\kappa}C_n^\kappa f(x+\kappa h) \quad (3)$$

шәклиндә тә'јин олунан ифадәјә дејилир.

(1)—(3) ифадәләриндән ајдындыр ки, $f(x)$ функсијасынын сонлу фәргләри онун $x_\kappa=x+\kappa h$ ($\kappa=0, 1, \dots, n$) нөгтәләриндәки гијмәтләри илә тә'јин олунур. Һәмин бәрабәрликләрә әсасән функсијанын көстәрилән нөгтәләрдәки гијмәтләрини дә онун сонлу фәргләри илә ифадә етмәк олар. Доғрудан да, (1) вә (2) бәрабәрликләриндән ујғун олараг ашағыдакылары тапарыг:

$$f(x+h)=f(x)+\Delta f(x)$$

вә

$$\begin{aligned}f(x+2h)&=\Delta^2 f(x)+2f(x+h)-f(x)=\Delta^2 f(x)+f(x+h)+\\&+[f(x+h)-f(x)]=\Delta^2 f(x)+f(x)+\Delta f(x)+\Delta f(x)=\\&=f(x)+2\Delta f(x)+\Delta^2 f(x)\end{aligned}$$

Бу мүһакимәни ардычыл тәтбиг етмәклә истәнилән n үчүн:

$$f(x+nh)=\sum_{\kappa=0}^{n}C_n^\kappa\Delta^\kappa f(x). \quad (4)$$

Төрәмәнин тә'рифинә көрә:

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Ејни гајда илә n дәфә диференсиалланан $f(x)$ функсијасы үчүн

$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}=f''(x),$$
$$\dots\dots\dots \quad (5)$$
$$\lim_{h\to0}\frac{\Delta^n f(x)}{h^n}=f^{(n)}(x)$$

бәрабәрликләринин доғрулуғуну да исбат етмәк олар.

§ 5. ФАКТОРИАЛ ЧОХҺӘДЛИЛӘР ВӘ ОНЛАРЫН СОНЛУ ФӘРГЛӘРИ

Әдәди силсилә әмәлә кәтирән $x_к = x_0 + кh$ $(к=0, 1, ..., n)$ нөгтәләрини көтүрүб ашағыдакы кими чохһәдлиләр дүзәлдәк:

$$Q_0(x) \equiv 1,$$
$$Q_1(x) = \frac{1}{h}(x-x_0),$$
$$Q_2(x) = \frac{1}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$Q_n(x) = \frac{1}{n!\,h^n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \qquad (1)$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Бу чохһәдлиләрә *факториал чохһәдлиләр* дејилир. Факториал чохһәдлиләрин сонлу фәргләрини һесаблајаг:

$$\Delta Q_0(x) = Q_0(x+h) - Q_0(h) = 1-1=0,$$
$$\Delta Q_1(x) = Q_1(x+h) - Q_1(x) = \frac{1}{h}(x+h-x_0) - \frac{1}{h}(x-x_0) = 1 = Q_0(x),$$
$$\Delta Q_2(x) = Q_2(x+h) - Q_2(x) = \frac{1}{2h^2}(x+h-x_0)(x+h-x_1) - \frac{1}{2h^2}(x-x_0)(x-x_1) = \frac{1}{h}(x-x_0) = Q_1(x),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\Delta Q_n(x) = Q_n(x+h) - Q_n(x) = \frac{1}{n!\,h^n}(x+h-x_0)(x-x_0)\dots$$
$$\dots(x-x_{n-2}) - \frac{1}{n!\,h^n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) =$$
$$= \frac{1}{n!\,h^n}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2})\cdot(x+h-x_0-x+x_0+$$
$$+(n-1)h) = \frac{1}{(n-1)!\,h^{n-1}}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-2}) =$$
$$= Q_{n-1}(x),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Демәли, факториал чохһәдлиләрин сонлу фәрги

$$\Delta Q_0(x) = 0,$$
$$\Delta Q_к(x) = Q_{к-1}(x) \quad (к=1, 2, ..., n) \qquad (2)$$

бәрабәрликләри илә тә'јин олунур.

§ 6. НЈУТОНУН ИНТЕРПОЛЈАСИЈА ДҮСТУРУ

Тутаг ки, $y=f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында тә'јин олунмушдур; $x_к = x_0+кh$ $(к=0, 1, ..., n)$ исә һәмин парчада јерләшән вә әдәди силсилә әмәлә кәтирән интерполјасија дүјүнләридир. Онда дәрәчәси n-дән бөјүк олмајан елә $P(x)$ интерполјасија чохһәдлиси (мәсәлән, Лагранж интерполјасија чохһәдлиси) вар ки,

$$P(x_0+кh) = f(x_0+кh) \quad (к=0, 1, ..., n) \qquad (1)$$

бәрабәрликләри өдәнилир; бу бәрабәрликләрә вә 4-чү параграфдакы (3) дүстуруна көрә

$$\Delta^m P(x_0) = \Delta^m f(x_0) \quad (m=0, 1, ..., n) \qquad (2)$$

мүнасибәтләринин доғрулуғу ајдындыр.

Инди елә $c_0, c_1, ..., c_n$ әмсаллары тапаг ки, $P(x)$ интерполјасија чохһәдлисинин әввәлки параграфда тә'јин етдијимиз (1) факториал чохһәдлиләри үзрә

$$P(x) = c_0Q_0(x) + c_1Q_1(x) + \dots + c_nQ_n(x) \qquad (3)$$

ајрылышы доғру олсун. Әмсаллары тә'јин етмәк үчүн (3) бәрабәрлијинин һәр ики тәрәфинин ардычыл олараг n-тәртибә гәдәр сонлу фәргләрини һесаблајаг:

$$\begin{aligned}
P(x) &= c_0Q_0(x) + c_1Q_1(x) + c_2Q_2(x) + \dots + c_nQ_n(x),\\
\Delta P(x) &= \ \ 0 \ + \ c_1 \ + c_2Q_1(x) + \dots + c_nQ_{n-1}(x),\\
\Delta^2 P(x) &= \ \ 0 \ + \ 0 \ + c_2 \ + \dots + c_nQ_{n-2}(x),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\Delta^n P(x) &= \ \ 0 \ + \ 0 \ + 0 \ + \dots + c_n.
\end{aligned}$$

Бу бәрабәрликләрдә $x=x_0$ гәбул етсәк вә $Q_к(x_0)=0$ $(к=1, 2, ..., n)$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$c_0 = P(x_0),\ c_1 = \Delta P(x_0),\ c_2 = \Delta^2 P(x_0),\ \dots,\ c_n = \Delta^n P(x_0).$$

Бурадан (2) бәрабәрликләринә әсасән:

$$c_0 = f(x_0),\ c_1 = \Delta f(x_0),\ c_2 = \Delta^2 f(x_0),\ \dots,\ c_n = \Delta^n f(x_0).$$

Бу гијмәтләри (3) бәрабәрлијиндә јеринә јазсаг:

$$P(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2} \times$$
$$\times \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} + \dots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{h^n}\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{n!}$$

вә јахуд

$$P(x) = f(x_0) + \sum_{к=1}^{n} \frac{\Delta^к f(x_0)}{h^к}\cdot\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{к-1})}{к!}. \qquad (4)$$

Алдығымыз (4) чохһәдлисинә бәрабәраддымлы (h аддымлы) интерполјасија дүјүнләри үчүн *Нјутонун интерполјасија чохһәдлиси* дејилир. $s = \frac{x-x_0}{h}$ вә

$$\binom{s}{\kappa} = \frac{s(s-1)(s-2)\dots[s-(\kappa-1)]}{\kappa!}$$

ишарәләрини гәбул етсәк (4) дүстуруну

$$P(x) = f(x_0) + \binom{s}{1}\Delta f(x_0) + \binom{s}{2}\Delta^2 f(x_0) + \dots + \binom{s}{n}\Delta^n f(x_0) \qquad (5)$$

шәклиндә јазмаг олар.

Верилмиш $(n+1)$ сајда интерполјасија дүјүнләри үчүн гурулмуш n-дәрәчәли интерполјасија чохһәдлиси јеканә олдуғундан (§ 2) Нјутонун (4) вә ја (5) интерполјасија чохһәдлиси Лагранжын интерполјасија чохһәдлисиндән (§ 2) анҹаг һәдләрин дүзүлүшүнә көрә фәргләнир. Лагранж интерполјасија чохһәдлисинин һәр бир һәдди n-дәрәҹәли чохһәдли олдуғу һалда, Нјутонун (4) чохһәдлиси дәрәҹәси кетдикҹә артан чохһәдлиләрдән тәшкил олунмушдур. Бәрабәраддымлы интерполјасија дүјүнләри сырасына јени нөгтә әлавә олундугда Лагранж интерполјасија чохһәдлисинин бүтүн һәдләрини јенидән һесабламаг тәләб олунур. Нјутонун интерполјасија чохһәдлисиндә исә анҹаг бир һәдд (ахырынҹы һәдди) әлавә етмәк лазым кәлир.

Буна көрә дә интерполјасија дүјүнләри әдәди силсилә әмәлә кәтирән әдәдләр (јә'ни, бәрабәраддымлы дүјүнләр) олдугда Нјутонун интерполјасија чохһәдлисиндән истифадә етмәк даһа әлверишлидир.

§ 7. ГАЛЫГ҆ ҺӘДДИН ГИЈМӘТЛӘНДИРИЛМӘСИ

Верилмиш $f(x)$ функсијасы илә онун $P(x)$ интерполјасија чохһәдлисинин фәрги 3-чү параграфда гијмәтләндирилмишдир:

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \qquad (1)$$

$$(a \leqslant x \leqslant b,\ a < \xi < b)$$

Әкәр x_κ интерполјасија дүјүнләри бәрабәраддымлы, јә'ни $x_\kappa = x_0 + \kappa h$ ($\kappa = 0, 1, \dots, n$) шәклиндә оларса, онда (1) бәрабәрлијиндән:

$$f(x) - P(x) = h^{n+1} Q_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi), \qquad (2)$$

бурада

$$Q_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!\, h^{n+1}} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

факториал чохһәдлидир (§ 5).

Нәһајәт, $M_{n+1} = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|$ кәмијјәти васитәсилә (2) бәрабәрлијиндән

$$|f(x) - P(x)| \leqslant M_{n+1} \cdot h^{n+1} |Q_{n+1}(x)| \qquad (3)$$

вә јахуд $s = \frac{x-x_0}{h}$ гәбул етсәк (§ 6)

$$|f(x) - P(x)| \leqslant M_{n+1} h^{n+1} \left|\binom{s}{n+1}\right| \qquad (4)$$

бәрабәрсизлијини алмаг олар.

Инди бир нечә хүсуси һала бахаг.

Интерполјасија дүјүнләри x_0, $x_0 + h$ кими ики нөгтәдән ибарәт олдугда алынан хәтти интерполјасија чохһәдлиси

$$P_1^*(x) = f(x_0) + \Delta f(x_0) \frac{x-x_0}{h}$$

шәклиндә олар. Бу һалда (4) бәрабәрсизлијиндән истәнилән $x_0 < x < x_0 + h$ вә $M_2 = \max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h} |f''(x)|$ үчүн

$$|f(x) - P_1^*(x)| \leqslant M_2 h^2 \left|\binom{s}{2}\right| \qquad (5)$$

мүнасибәтини аларыг. Бурада

$$\left|\binom{s}{2}\right| = \left|\frac{s(s-1)}{2}\right| \qquad (0 < s < 1)$$

вә

$$\left|\frac{s(s-1)}{2}\right| = \frac{s(1-s)}{2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{8}$$

олдуғундан (5) бәрабәрсизлији

$$|f(x) - P_1^*(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{8} \qquad (6)$$

шәклиндә јазылар.

Интерполјасија дүјүнләри x_0, x_0+h, x_0+2h кими үч нөгтәдән ибарәт оларса, онда квадратик интерполјасија аларыг. Бу һалда гурулан $P_2^*(x)$ интерполјасија чохһәдлиси илә $f(x)$-ин фәргини, истәнилән $x_0 < x < x_0 + 2h$ үчүн

$$|f(x) - P_2^*(x)| \leqslant \frac{M_3 h^3}{12},\quad M_3 = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0+2h} |f'''(x)| \qquad (7)$$

кими гијмәтләндирмәк олар.

§ 8. ФУНКСИЈА ТӨРӘМӘСИНИН ТӘГРИБИ ҺЕСАБЛАНМАСЫ

Бир чох практики мәсәләләрин һәлли үчүн бә'зән чәдвәл шәклиндә верилмиш (XI, § 6) функсијанын мүхтәлиф тәртибли төрәмәләрини тапмаг (тәгриби диференсиалламаг) лазым кәлир. Мәсәлән, һәрәкәт едән чисмин һәрәкәт ганунунун аналитик ифадәси мә'лум дејилсә, лакин замандан асылы олараг кедилән мәсафә тәчрүби олараг өлчүлмүшдүрсә, онда һәрәкәтин сүр'әтини вә тә'чилини тәгриби диференсиаллама илә тапмаг олар.

Чәдвәл шәклиндә верилмиш $f(x)$ функсијасынын тәгриби диференсиаллама үсулларындан бири, бахылан $[a, b]$ парчасында $f(x)$ функсијасынын онун $P(x)$ интерполјасија чохһәдлиси илә әвәз олунмасына әсасланыр:

$$f(x) \approx P(x). \tag{1}$$

Бурадан

$$f^{(\kappa)}(x) \approx P^{(\kappa)}(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b,\ \kappa = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

тәгриби бәрабәрликләрини аларыг. Әкәр интерполјасија чохһәдлисинин галыг һәддини

$$R_n(x) = f(x) - P(x)$$

илә ишарә етсәк, онда (2) бәрабәрлијинин хәтасы

$$R_n^{(\kappa)}(x) = f^{(\kappa)}(x) - P^{(\kappa)}(x)$$

олачагдыр. Гејд етмәк лазымдыр ки, (2) тәгриби бәрабәрлијинин хәтасы, үмумијјәтлә, (1) бәрабәрлијинин хәтасындан кичик дејилдир.

Тәгриби диференсиаллама дүстурларыны чыхармаг үчүн Нјутонун

$$P(x) = f(x_0) + \binom{s}{1}\Delta f(x_0) + \binom{s}{2}\Delta^2 f(x_0) + \ldots + \binom{s}{n}\Delta^n f(x_0),$$
$$\left(s = \frac{x - x_0}{h}\right)$$

вә јахуд

$$P(x) = f(x_0) + \frac{s}{1}\Delta f(x_0) + \frac{s(s-1)}{2!}\Delta^2 f(x_0) +$$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)}{3!}\Delta^3 f(x_0) + \ldots + \frac{s(s-1)\ldots[s-(n-1)]}{n!}\Delta^n f(x_0) \tag{3}$$

интерполјасија дүстурундан истифадә едәк. Бу дүстуру башга лазым олан шәклә салмаг үчүн икинчи һәдләри мүхтәлиф олан икиһәдлиләрин һасили дүстуруну јада салаг:

$$s(s-1)(s-2)\ldots(s-m) = s^{m+1} - A_m^{(1)} s^m + A_m^{(2)} s^{m-1} +$$
$$+ \ldots + (-1)^m A_m^{(m)} s. \tag{4}$$

Бурада $A_m^{(\kappa)}$ илә 1-дән m-ә гәдәр олан натурал әдәдләрдән мүхтәлиф κ сајдасыны көтүрмәклә дүзәлдилә билән бүтүн мүмкүн олан һасилләрин чәми ишарә олунмушдур. Хүсуси һалда,

$$A_2^{(1)} = 1+2, \qquad A_2^{(2)} = 1\cdot 2;$$
$$A_3^{(1)} = 1+2+3, \qquad A_3^{(2)} = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3, \qquad A_3^{(3)} = 1\cdot 2\cdot 3$$

вә с. олар, бу да

$$s(s-1)(s-2) = s^3 - (1+2)s^2 + (1\cdot 2)s = s^3 - A_2^{(1)} s^2 + A_2^{(2)} s,$$
$$s(s-1)(s-2)(s-3) = s^4 - (1+2+3)s^3 + (1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3)s^2 -$$
$$-(1\cdot 2\cdot 3)s = s^4 - A_3^{(1)} s^3 + A_3^{(2)} s^2 - A_3^{(3)} s$$

дүстурлары илә әлагәдардыр.

(4) дүстурундан истифадә едәрәк, (3) интерполјасија чохһәдлисини

$$P(x) = f(x_0) + s\Delta f(x_0) + \frac{s^2 - s}{2!}\Delta^2 f(x_0) + \frac{s^3 - 3s^2 + 2s}{3!}\Delta^3 f(x_0) +$$
$$+ \frac{s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s}{4!}\Delta^4 f(x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{s^n - A_{n-1}^{(1)} s^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-1} A_{n-1}^{(n-1)} s}{n!}\Delta^n f(x_0) \tag{5}$$

шәклиндә јазмаг олар. Бу бәрабәрликдән x-ә нәзәрән ардычыл төрәмәләр алмаг үчүн $s = \dfrac{x - x_0}{h}$ олдуғуну нәзәрә алмаг лазымдыр. Онда мүрәккәб функсијадан төрәмәалма гајдасына көрә:

$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{dP(x)}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h}\,\frac{dP(x)}{ds},$$
$$\frac{d^2P(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dP(x)}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h}\,\frac{dP(x)}{ds}\right) =$$
$$= \frac{1}{h}\cdot\frac{d^2P(x)}{ds^2}\cdot\frac{ds}{dx} = \frac{1}{h^2}\,\frac{d^2P(x)}{ds^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^mP(x)}{dx^m} = \frac{1}{h^m}\,\frac{d^mP(x)}{ds^m}$$

Бу бәрабәрликләри нәзәрә алсаг (5) бәрабәрлијиндән (2) дүстуруна әсасән $f^{(\kappa)}(x)$ төрәмәләрини тәгриби тапа биләрик:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta f(x_0) + \frac{2s-1}{2}\Delta^2 f(x_0) + \frac{3s^2 - 6s + 2}{6}\Delta^3 f(x_0) + \right.$$

$$+\frac{2s^3-9s^2+11s-3}{12}\Delta^4 f(x_0)+\ldots+$$

$$+\frac{ns^{n-1}-(n-1)A^{(1)}_{n-1}s^{n-2}+\ldots+(-1)^{n-1}A^{(n-1)}_{n-1}}{n!}\Delta^n f(x_0)],$$

$$f''(x)\approx\frac{1}{h^2}[\Delta^2 f(x_0)+(s-1)\Delta^3 f(x_0)+\frac{6s^2-18s+11}{12}\Delta^4 f(x_0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n(n-1)s^{n-2}-(n-1)(n-2)A^{(1)}_{n-1}s^{n-3}+\ldots+(-1)^n 2A^{(n-2)}_{n-1}}{n!}\Delta^n f(x_0)]$$

вә с. Алынан тәгриби бәрабәрликләрдә $x=x_0$ гәбул етсәк, функсија төрәмәләринин x_0 нөгтәсиндә тәгриби гијмәтләрини тапарыг:

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{h}[\Delta f(x_0)-\frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0)+\frac{1}{3}\Delta^3 f(x_0)+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n f(x_0)],$$

$$f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}[\Delta^2 f(x_0)-\Delta^3 f(x_0)+\frac{11}{12}\Delta^4 f(x_0)+\ldots+$$

$$+(-1)^n\frac{2A^{(n-2)}_{n-1}}{n!}\Delta^n f(x_0)]$$

вә с. Бу бәрабәрликләрин сағ тәрәфиндә анҹаг ики һәдд көтүрсәк, функсија төрәмәләрини тәгриби һесабламаг үчүн даһа садә

$$f'(x_0)\approx\frac{1}{h}[\Delta f(x_0)-\frac{1}{2}\Delta^2 f(x_0)],$$

$$f''(x_0)\approx\frac{1}{h^2}[\Delta^2 f(x_0)-\Delta^3 f(x_0)],$$

вә с. дүстурларыны аларыг. $f(x)$ функсијасынын башга x_1, x_2, ... вә с. нөгтәләриндә дә төрәмәсинин тәгриби гијмәтләрини ујғун шәкилдә һесабламаг олар.

§ 9. КӘСИЛМӘЈӘН ФУНКСИЈАЛАРЫН ЧОХҺӘДЛИЛӘРЛӘ ЈАХЫНЛАШМАСЫ

Функсијаларын чохһәдлиләрлә јахынлашмасынын әсас мәсәләриндән бири беләдир: верилмиш $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән $f(x)$ функсијасыны габагҹадан верилмиш истәнилән дәгигликлә чохһәдли илә әвәз етмәк олармы?

Бу мәсәләни 1885-чи илдә К. Вејерштрасс һәлл етмишдир.

Т е о р е м 1 (Вејерштрасс теореми). ***Әкәр $f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјәндирсә, онда истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә чәбри $P(x)$ чохһәдлиси вар ки, x-ин $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә***

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon \tag{1}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Вејерштрасс теореминин мүхтәлиф исбатлары вардыр. Бу исбатлары јахынлашма нәзәријјәсинә һәср олунмуш әсас китабларда тапмаг олар. Вејерштрасс теореминин ән садә исбатларындан бирини көркәмли совет ријазијјатчысы С. Н. Бернштејн (1880—1968) вермишдир. Бу исбат Бернштејн чохһәдлиси адланан

$$B_n(x)=\sum_{\kappa=0}^{n}\varphi\left(\frac{\kappa}{n}\right)C^{\kappa}_{n}x^{\kappa}(1-x)^{n-\kappa}$$

ифадәсинин $[0, 1]$ парчасында $\varphi(x)$ функсијасына јығылмасына әсасланыр (C_n^{κ} биномиал әмсалдыр).

С. Н. Б е р н ш т е ј н т е о р е м и. ***Әкәр $\varphi(t)$ функсијасы $[0, 1]$ парчасында кәсилмәјәндирсә, онда истәнилән $\varepsilon>0$ әдәди үчүн елә n_0 әдәди вар ки, $n\geqslant n_0$ олдугда t-нин $[0, 1]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә***

$$|\varphi(t)-B_n(t)|<\varepsilon \tag{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

$f(x)$ функсијасы $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән олдугда

$$t=\frac{x-a}{b-a} \tag{3}$$

әвәзләмәси илә ону $[0, 1]$ парчасында кәсилмәјән

$$\varphi(t)=f[a+t(b-a)]$$

функсијасына кәтирмәк олар. $\varphi(t)$ функсијасы үчүн доғру олан (2) бәрабәрсизлијиндән (3) әвәзләмәси илә x-ин $[a, b]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә доғру олан

$$\left|f(x)-B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon \tag{4}$$

бәрабәрсизлијини аларыг. $B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ ифадәси x-ә нәзәрән n-дәрәчәли чәбри чохһәдли

$$P(x)=B_n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

олдуғундан (4) мүнасибәтиндән Вејерштрасс теореминин доғрулуғу ајдындыр.

С. Н. Бернштејн теореминин Вејерштрасс теореминдән үстүнлүјү ондадыр ки, бурада верилмиш функсијаја јахынлашан $P(x)$ чохһәдлисинин јалныз варлығы көстәрилмир, һәм дә һәмин чохһәдлинин конкрет гурулма үсулу вә чохһәдлинин өзү көстәрилир.

Вејерштрассын, дөври функсијаларын тригонометрик чохһәдлиләр адланан

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\kappa=1}^{n} (a_\kappa \cos \kappa x + b_\kappa \sin \kappa x)$$

ифадәләрилә јахынлашмасы һаггында икинчи теореми дә вардыр.

Теорем 2 (**Вејерштрасс теореми**). ***Әкәр $f(x)$ функсијасы $[-\pi, \pi]$ парчасында кәсилмәјән вә $f(-\pi) = f(\pi)$ шәртини өдәјән функсијадырса, онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә $T(x)$ тригонометрик чохһәдлиси вар ки, x-ин $[-\pi, \pi]$ парчасындакы бүтүн гијмәтләриндә***

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Гејд едәк ки, функсијаларын јахынлашма нәзәријјәси мүасир ријазијјатын ән мүкәммәл нәзәријјәләриндән биридир. Онун чох кениш вә дәрин мәзмуну вардыр. Бу нәзәријјәнин садә елементләри илә јери кәлдикчә таныш олачағыг.

XX ФӘСИЛ

ҺӘГИГИ ДӘЈИШӘНЛИ ВЕКТОР ФУНКСИЈАЛАР

§ 1. СКАЛЈАР АРГУМЕНТЛИ ВЕКТОР ФУНКСИЈА

Координатлары һәгиги (скалјар) гијмәтләр алан t аргументиндән асылы $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ функсијалары олан

$$\overline{f(t)} = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\} \qquad (1)$$

векторуна *скалјар аргументли вектор функсија* дејилир. $n=3$ олдугда вектор функсија $\overline{r(t)}$, онун координатлары исә $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ илә ишарә олунур:

$$\overline{r(t)} = \{x(t), y(t), z(t)\} \qquad (2)$$

вә ја

$$\overline{r(t)} = x(t)\cdot\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}; \qquad (3)$$

бурада $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ векторлары дүзбучаглы координат системиндә ваһид векторлардыр.

Верилмиш ики

$$\overline{f(t)} = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$$

вә

$$\overline{\varphi(t)} = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)\}$$

вектор функсијасынын чәми вә фәрги

$$\overline{f(t)} \pm \overline{\varphi(t)} = \{f_1(t) \pm \varphi_1(t),\ f_2(t) \pm \varphi_2(t),\ \dots,\ f_n(t) \pm \varphi_n(t)\}$$

кими тә'јин олунур. (1) вектор функсијасынын c әдәдинә һасили

$$c\overline{f(t)} = \{cf_1(t), cf_2(t), \dots, cf_n(t)\}$$

вектор функсијасына дејилир.

Вектор функсијасынын лимити. (1) вектор функсијасынын $t \to t_0$ шәртиндә лимити елә сабит $\overline{f^{(0)}} = \{f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_n^{(0)}\}$ векторуна дејилир ки,

$$\lim_{t \to t_0} |\overline{f(t)} - \overline{f^{(0)}}| = 0$$

вә јахуд

$$\lim_{t \to t_0} \sqrt{[f_1(t) - f_1^{(0)}]^2 + [f_2(t) - f_2^{(0)}]^2 + \dots + [f_n(t) - f_n^{(0)}]^2} = 0 \qquad (4)$$

бәрабәрлији өдәнилсин. Ајдындыр ки, (4) бәрабәрлији n сајда

$$\lim_{t \to t_0} f_1(t) = f_1^{(0)},\ \lim_{t \to t_0} f_2(t) = f_2^{(0)},\ \dots,\ \lim_{t \to t_0} f_n(t) = f_n^{(0)} \qquad (5)$$

бәрабәрлијинә еквивалентдир: (4) бәрабәрлијинин доғру олмасындан (5) бәрабәрликләринин доғрулуғу вә тәрсинә, (5) бәрабәрликләринин доғру олмасындан (4) бәрабәрлијинин доғрулугу алыныр.

(1) вектор функсијасы лимитинин $\overline{f^{(0)}}$ олмасыны

$$\lim_{t \to t_0} \overline{f(t)} = \overline{f^{(0)}}$$

кими јазырлар.

Вектор функсијанын кәсилмәзлији. $\overline{f(t)}$ вектор функсијасынын $t \to t_0$ шәртиндә лимити варса вә

$$\lim_{t \to t_0} \overline{f(t)} = \overline{f^{(t_0)}}$$

мүнасибәти өдәнилирсә, она t_0 нөгтәсиндә *кәсилмәјән вектор функсија* дејилир. Көстәрмәк олар ки, $\overline{f(t)}$ вектор функсијасынын t_0 нөгтәсиндә кәсилмәјән олмасы үчүн онун координатлары олан $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ функсијаларынын һәмин нөгтәдә кәсилмәјән олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

§ 2. ВЕКТОР ФУНКСИЈАНЫН ТӨРӘМӘСИ

Верилмиш

$$\overline{f(t)} = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\} \qquad (1)$$

вектор функсијасынын t нөгтәсиндә төрәмәси

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{f(t+\Delta t)} - \overline{f(t)}}{\Delta t} = \frac{d\overline{f(t)}}{dt} = [\overline{f(t)}]'$$

лимитинә (әлбәттә, варса вә сонлудурса) дејилир. Јүксәк тәртибли төрәмәләр ардычыл олараг

$$\frac{d^m\overline{f(t)}}{dt^m}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{m-1}\overline{f(t)}}{dt^{m-1}}\right)\qquad (m=2,\ 3,\ \dots)$$

кими тә'јин олунур. Ајдындыр ки,

$$\frac{d^m\overline{f(t)}}{dt^m}=\{f_1^{(m)}(t),\ f_2^{(m)}(t),\ \dots,\ f_n^{(m)}(t)\},\qquad (2)$$

$$(m=1,\ 2,\ \dots)$$

башга сөзлә, $\overline{f(t)}$ вектор функсијасынын m-тәртибли төрәмәси варса, онда онун координатларынын да һәмин тәртибли төрәмәси вар вә тәрсинә, вектор функсија координатларынын m-тәртибли төрәмәси варса, онда һәмин вектор функсијанын өзүнүн дә m-тәртибли төрәмәси олар.

Функсијаларын диференсиалланмасы һаггындакы әсас гајдалар вектор функсијалар үчүн дә өз күчүндә галыр. Хүсуси һалда, $\overline{f(t)}$ вә $\overline{\varphi(t)}$ вектор функсијаларынын чәми, фәрги, скалјар вә векториал һасилләринин төрәмәси

$$\frac{d[\overline{f(t)}\pm\overline{\varphi(t)}]}{dt}=\frac{d\overline{f(t)}}{dt}\pm\frac{d\overline{\varphi(t)}}{dt},\qquad (3)$$

$$\frac{d[\overline{f(t)}\cdot\overline{\varphi(t)}]}{dt}=\frac{d\overline{f(t)}}{dt}\cdot\overline{\varphi(t)}+\overline{f(t)}\cdot\frac{d\overline{\varphi(t)}}{dt},\qquad (4)$$

$$\frac{d[\overline{f(t)}\times\overline{\varphi(t)}]}{dt}=\frac{d\overline{f(t)}}{dt}\times\overline{\varphi(t)}+\overline{f(t)}\times\frac{d\overline{\varphi(t)}}{dt}\qquad (5)$$

кими һесабланыр. Бу мүнасибәтләрин биринчисини исбат едәк.

$$\overline{\varphi(t)}=\{\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \dots,\ \varphi_n(t)\}$$

олдугда (1) вә (2) мүнасибәтинә көрә:

$$\frac{d[\overline{f(t)}\pm\overline{\varphi(t)}]}{dt}=\{[f_1(t)\pm\varphi_1(t)]',\ [f_2(t)\pm\varphi_2(t)]',\ \dots$$

$$\dots,\ [f_n(t)\pm\varphi_n(t)]'\}=\{f_1'(t),\ f_2'(t),\ \dots,\ f_n'(t)\}\pm$$

$$\pm\{\varphi_1'(t),\ \varphi_2'(t),\ \dots,\ \varphi_n'(t)\}=\frac{d\overline{f(t)}}{dt}\pm\frac{d\overline{\varphi(t)}}{dt}.$$

(4) мүнасибәтиндән ашағыдакы нәтичәләр алыныр:

Нәтичә 1. Узунлуғу сабит әдәд, јә'ни $|\overline{a(t)}|=q=const$ олан $\overline{a(t)}$ векторунун $\frac{d\overline{a(t)}}{dt}$ төрәмәси өзүнә перпендикулјар олан вектордур. Хүсуси һалда, $|\overline{e(t)}|=1$ олдугда $\overline{e(t)}\,\frac{d\overline{e(t)}}{dt}=0$.

Доғрудан да, $\overline{a(t)}\cdot\overline{a(t)}=|\overline{a(t)}|^2=q^2=\text{const}$ бәрабәрлијиндән төрәмә алсаг:

$$\frac{d\overline{a(t)}}{dt}\cdot\overline{a(t)}+\overline{a(t)}\cdot\frac{d\overline{a(t)}}{dt}=0$$

вә јахуд

$$2\overline{a(t)}\cdot\frac{d\overline{a(t)}}{dt}=0.$$

Демәли,

$$\overline{a(t)}\cdot\frac{d\overline{a(t)}}{dt}=0$$

олар, бу да $\overline{a(t)}$ векторунун $\frac{d\overline{a(t)}}{dt}$ векторуна перпендикулјар олдуғуну көстәрир.

Нәтичә 2. Сабит C вуруғуну төрәмә ишарәси харичинә чыхармаг олар:

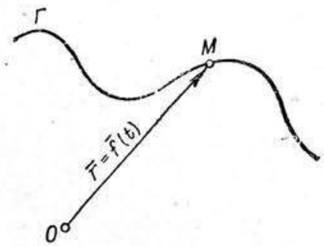
$$\frac{d[C\overline{f(t)}]}{dt}=C\,\frac{d\overline{f(t)}}{dt}.$$

§ 3. ӘЈРИ ВӘ ОНУН ПАРАМЕТРИК ТӘНЛИЈИ

$\overline{f(t)}=\{x(t),\ y(t),\ z(t)\}$ векторунун координатларыны (координат охлары үзәринә проjексијаларыны) фәзанын бир M нөгтәсинин координатлары һесаб етсәк: $M[x(t),\ y(t),\ z(t)]$, онда һәмин нөгтәнин вәзијјәти t-дән асылы олар. Бу һалда координат башланғычы илә M нөгтәсини бирләшдирән вектору, јә'ни M нөгтәсинин радиус-векторуну $\bar r$ илә ишарә етсәк, онда

$$\bar r=\overline{f(t)}\quad (a\leqslant t\leqslant b)\qquad (1)$$

аларыг. Ајдындыр ки, t-нин һәр бир $t_0\in[a,\ b]$ гијмәтинә фәзада бир $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нөгтәси ујғун олар: $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$. t параметри дәјишдикчә (кәсилмәз олараг артдыгча вә ја азалдыгча) алынан M нөгтәләринин (вә ја $\bar r$ векторунун сон уч нөгтәләринин) һәндәси јери бир Γ хәтти әмәлә кәтирәр (183-чү шәкил). Бу хәттә *(1) векторунун годографы* дејилир.



Шәкил 183

$$\bar r=\overline{f(t)}\quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

тәнлији Γ әјрисинин (годографын) *параметрик көстәрилиши* адланыр. Бир әјринин бир нечә параметрик көстәрилиши ола биләр. $\bar{r}=\{x, y, z\}$ оларса, онда Γ әјрисинин (1) тәнлијини

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t),\\ z&=z(t) \end{aligned}\right\}(a\leqslant t\leqslant b) \tag{2}$$

системи шәклиндә јазмаг олар.

Верилмиш $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән вә сыфра чеврилмәјән кәсилмәз төрәмәси олан $\overline{f(t)}$ функсијасына $[a, b]$ парчасында һамар вектор функсија дејилир. Бу о демәкдир ки, һамар $\overline{f(t)}$ функсијасынын $x(t)$, $y(t)$ вә $z(t)$ координатларынын $[a, b]$ парчасында кәсилмәјән төрәмәләри вар вә бу төрәмәләр һәмин парчанын һеч бир нөгтәсиндә ејни заманда сыфра чеврилмир. Ајдындыр ки, ахырынчы шәрт

$$\left|\frac{d\overline{f(t)}}{dt}\right|^2=[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2>0, \quad t\in[a, b]$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси илә еквивалентдир. Һамар вектор функсија васитәсилә көстәрилә билән әјријә *һамар әјри* дејилир. Демәли, $\overline{f}(t)$ һамар функсија олдугда (1) тәнлији илә тә'јин олунан Γ әјриси һамар әјри олар.

Гејд. Әјри гөвсүнүн узунлуғу кәләчәкдә интеграл васитәсилә һесабланаркән исбат едиләчәкдир ки, һамар әјриләр сонлу узунлуглу әјриләрдир. Белә әјриләрин узунлуғундан данышмаг олар.

Сонлу сајда һамар һиссәләрдән ибарәт олан әјријә *һиссә-һиссә һамар әјри* дејилир.

Кәсилмәз $\bar{r}=\overline{f(t)}$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ вектор функсија васитәсилә верилән әјријә бә'зән *Жордан*[1] *әјриси* дејилир. Бу заман $\overline{f(a)}=\overline{f(b)}$ олдугда һәмин әјри *гапалы Жордан әјриси* адланыр.

Мүстәви үзәриндә јерләшән хәттин параметрик тәнлији

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t) \end{aligned}\right\}(a\leqslant t\leqslant b) \tag{3}$$

шәклиндә олар. Бә'зән бу тәнликдән $y=f(x)$ шәклиндә тәнлијә кечмәк мүмкүн олур. Доғрудан да, (3) функсијаларынын биринчиси олан $x=\varphi(t)$ функсијасынын $t=\varphi_1(x)$ тәрс функсијасы оларса, онда әјринин тәнлијини

$$y=\psi[\varphi_1(x)]=f(x)$$

шәклиндә аларыг. Әјринин $y=f(x)$ тәнлијини исә һәмишә

$$\left.\begin{aligned} x&=x,\\ y&=f(x) \end{aligned}\right\}$$

[1] Жордан (1838—1922) франсыз ријазијјатчысыдыр.

кими параметрик шәкилдә јазмаг олар. Бу һалда параметр олараг x дәјишәни көтүрүлүр.

Әјринин тәнлији полјар координатларла $\rho=f(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ шәклиндә верилдикдә, јенә дә һәмин әјринин тәнлијини

$$\left.\begin{aligned} x&=f(\theta)\cos\theta,\\ y&=f(\theta)\sin\theta \end{aligned}\right\}(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

параметрик шәкилдә јазмаг олар вә бу һалда θ полјар бучағы параметр олур.

Һәр бир әјри үзәриндә ики гаршылыглы тәрс истигамәт тә'јин олунур; бу истигамәтләрин бири мүсбәт, о бири исә мәнфи һесаб олунур. Мәсәлән, әјри параметрик шәкилдә верилдикдә параметрин артмасына әјринин ујғун олан истигамәти *мүсбәт*, параметрин азалмасына ујғун олан истигамәт исә *мәнфи* һесаб олунур.

Мисал 1. Мәркәзи координат башланғычында вә јарымохлары a вә b олан еллипсин параметрик тәнлији ашағыдакы кими олачагдыр:

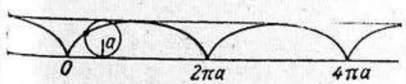
$$\left.\begin{aligned} x&=a\cos t,\\ y&=b\sin t. \end{aligned}\right\}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

Мисал 2. Мүстәви үзәриндә

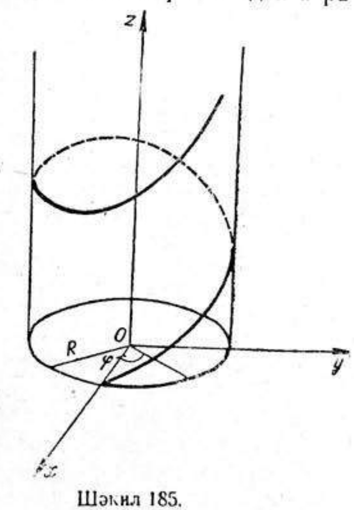
$$\left.\begin{aligned} x&=a(t-\sin t),\\ y&=a(1-\cos t) \end{aligned}\right\}(0\leqslant t\leqslant 2\pi) \tag{3}$$

параметрик тәнликләри илә тә'јин олунан әјријә *тсиглоид әјриси* дејилир. Бир дүз хәтт үзәриндә сүрүшмәдән һәрәкәт едән a радиуслу чеврә үзәриндәки нөгтә (3) тсиглоид әјрисини чызыр (184-чи шәкил).

Мисал 3. Фәрз едәк ки, һәр һансы нөгтә сабит v сүр'әти илә Oz охуна паралел олараг јухарыја һәрәкәт едир вә ејни заманда сабит ω бучаг сүр'әти илә һәмин ох әтрафында фырланыр (185-чи шәкил). Бу һалда нөгтәнин чыздығы хәттә *Винт хәтти* дејилир вә онун параметрик тәнлији



Шәкил 184.



Шәкил 185.

$$\left.\begin{aligned} x&=R\cos\omega t,\\ y&=R\sin\omega t,\\ z&=vt\end{aligned}\right\},$$

векториал шәкилдә тәнлији исә

$$\bar r=R\cos\omega t\cdot\bar i+R\sin\omega t\cdot\bar j+vt\cdot\bar k$$

кими олачагдыр.

§ 4. ВЕКТОР ФУНКСИЈА ТӨРӘМӘСИНИН ҺӘНДӘСИ ВӘ МЕХАНИКИ МӘ'НАСЫ

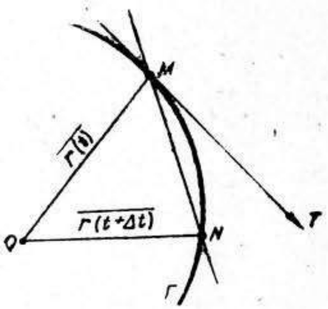
Бу мәсәләни тәдгиг етмәк үчүн $[a, b]$ парчасында диференсиалланан

$$\overline{r(t)}=\{x(t),\, y(t),\, z(t)\}\quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

вә јахуд

$$\overline{r(t)}=x(t)\cdot\bar i+y(t)\cdot\bar j+z(t)\cdot\bar k \qquad (1)$$

вектор функсијасыны көтүрәк. (1) тәнлији фәзада бир Γ әјрисини тә'јин едир (186-чы шәкил). Бу Γ әјриси үзәриндә параметрин t вә $t+\Delta t$ гијмәтләринә ујғун олан нөгтәләр M вә N олсун. Ајдындыр ки, M вә N нөгтәләри ујғун олараг $r(t)$ вә $\overline{r(t+\Delta t)}$ векторларынын учларыдыр.



Шәкил 186

$\overline{MN}=\Delta\overline{r(t)}$ векторуну

$$\Delta\overline{r(t)}=r\overline{(t+\Delta t)}-\overline{r(t)}$$

шәклиндә тапмаг олар.

Мә'лумдур ки, $\Delta t\to 0$ шәртиндә N нөгтәси Γ әјриси үзрә M нөгтәсинә вә MN кәсәни Γ әјрисинин M нөгтәсиндә тохунаны адланан MT лимит дүз хәтти вәзијјәтинә јахынлашыр. Бу һалда

$$\frac{d\overline{r(t)}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{r(t)}}{\Delta t}=\{x'(t),\, y'(t),\, z'(t)\} \qquad (2)$$

вектору да Γ әјрисинин M нөгтәсиндәки һәмин тохунаны үзәриндә јерләшәр.

Демәли, (1) векторунун төрәмәси олан (2) вектору Γ әјрисинин M нөгтәсиндәки MT тохунаны истигамәтиндә јөнәлмишдир.

Вектор функсија төрәмәсинин механики мә'насыны изаһ етмәк үчүн фәрз едәк ки, нөгтә Γ әјриси үзрә параметрин артма

истигамәтиндә (MN истигамәтиндә) һәрәкәт едир вә t параметри заманы көстәрир. Онда нөгтәнин t анындакы (M нөгтәсиндәки) $\bar v=\overline{v(t)}$ сүр'әтинин истигамәти әјријә M нөгтәсиндә чәкилмиш MT тохунанынын, јә'ни $\frac{d\overline{r(t)}}{dt}$ векторунун истигамәтинин ејни олар. Көстәрәк ки, $\overline{v(t)}$ (сүр'әт вектору) вә $\frac{d\overline{r(t)}}{dt}$ (вектор функсијанын төрәмәси) векторларынын узунлуглары да бәрабәрдир. Бу мәгсәдлә, нөгтәнин Δt гәдәр вахтда Γ әјриси үзрә кетдији $\breve{MN}$ јолунун узунлуғуну Δs илә ишарә едәк. Онда:

$$\left|\frac{\Delta\overline{r(t)}}{\Delta t}\right|=\left|\frac{\Delta\overline{r(t)}}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|=\frac{|\Delta\overline{r(t)}|}{\Delta s}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Кәләчәкдә әјри гөвсү узунлуғуну интеграл васитәсилә һесабладыгда көстәрәчәјик ки, әјри гөвсүнүн узунлуғунун бу гөвсү кәрән вәтәрин узунлуғуна нисбәти, вәтәр сыфра јахынлашдыгда ваһидә јахынлашыр:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\breve{MN}}{|\overline{MN}|}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{|\Delta\overline{r(t)}|}=1. \qquad (4)$$

Беләликлә, (3) бәрабәрлијиндән

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\overline{r(t)}}{\Delta t}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\overline{r(t)}|}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}$$

мүнасибәтини вә јахуд (2) бәрабәрлијинә әсасән

$$\left|\frac{d\overline{r(t)}}{dt}\right|=\frac{ds}{dt} \qquad (5)$$

мүнасибәтини алырыг. Кедилән мәсафәнин замана көрә төрәмәси һәрәкәт сүр'әтинин скалјар гијмәтинә бәрабәр олдуғундан:

$$|\overline{v(t)}|=\frac{ds}{dt}=\left|\frac{d\overline{r(t)}}{dt}\right|.$$

Демәли, $\overline{v(t)}$ вә $\frac{d\overline{r(t)}}{dt}$ векторларынын истигамәтләри вә узунлуглары ејнидир, јә'ни һәмин векторлар бәрабәрдир:

$$\frac{d\overline{r(t)}}{dt}=\overline{v(t)}. \qquad (6)$$

Бурадан вектор функсија төрәмәсинин механики мә'насы алыныр: *вектор функсијанын* $\frac{d\overline{r(t)}}{dt}$ *төрәмәси һәрәкәт едән нөгтәнин* t *анындакы* $v(t)$ *сүр'әтинә бәрабәрдир.*

Әкәр Γ әјрисинин тохунаны үзәриндә јерләшән вә истигамәти t параметринин артма истигамәтинин ејни олан ваһид вектору $\bar{\tau}$ илә ишарә етсәк, онда (5) вә (6) бәрабәрликләриндән

$$\frac{d\overline{r(t)}}{dt} = \frac{ds}{dt}\cdot\bar{\tau} \qquad (7)$$

вә

$$\overline{v(t)} = \frac{ds}{dt}\cdot\bar{\tau} \qquad (8)$$

мүнасибәтләрини аларыг. Γ әјриси ($\bar{r}$ векторунун годографы) гөвсүнүн башланғыч һесаб едилән һәр һансы нөгтәдән һесабланан s узунлуғуну $\bar{r}$ вектор функсијасынын аргументи, јә'ни $\bar{r} = \overline{r(s)}$ гәбул етсәк, онда (7) бәрабәрлијиндән

$$\frac{d\overline{r(s)}}{ds} = \bar{\tau} \qquad (9)$$

мүнасибәтини алмаг олар. Бу о демәкдир ки, вектор функсијанын годограф гөвсүнүн узунлуғуна көрә төрәмәси, годограф тохунанынын ваһид векторуна бәрабәрдир.

Инди вектор функсијанын икинчи төрәмәсинин механики мә'насыны муәјјән едәк.

(6) бәрабәрлијиндән t-јә нәзәрән төрәмә алаг:

$$\frac{d^2\overline{r(t)}}{dt^2} = \frac{d\overline{v(t)}}{dt}. \qquad (10)$$

Сүр'әтин замана көрә төрәмәси һәрәкәтин тә'чилинә бәрабәрдир. Онда (10) бәрабәрлијинә әсасән демәк олар ки, *вектор функсијанын икинчи төрәмәси мадди нөгтә һәрәкәтинин t анындакы тә'чилинә бәрабәрдир.*

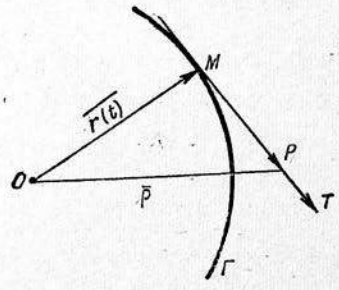
§ 5. ФӘЗА ӘЈРИСИНӘ ТОХУНАНЫН ВӘ НОРМАЛ МҮСТӘВИНИН ТӘНЛИЈИ

Инди дә һамар

$$\overline{r(t)} = \{x(t),\ y(t),\ z(t)\} \qquad (1)$$

вектор функсијасынын годографы олан Γ әјрисинә истәнилән M нөгтәсиндә чәкилмиш MT тохунанынын тәнлијини тапаг (187-чи шәкил). Бу мәгсәдлә MT тохунанынын ихтијари $P(X, Y, Z)$ нөгтәсинин радиус-векторуну $\bar{\rho}\ (X, Y, Z)$ илә ишарә едәк. Онда:

$$\bar{\rho} = \overline{r(t)} + \overline{MP}.$$



Шәкил 187.

$\overline{MP}$ вә $\overline{r'(t)}$ векторлары коллинеар (һәр икиси MT тохунаны үзәриндә јерләшир) олдуғундан:

$$\overline{MP} = \lambda\frac{d\overline{r(t)}}{dt}$$

(λ һәгиги гијмәтләр алан ихтијари параметрдир). Бурадан MT тохунанынын

$$\bar{\rho} = \overline{r(t)} + \lambda\frac{d\overline{r(t)}}{dt} \qquad (2)$$

вектор шәклиндә тәнлијини аларыг. (2) тәнлијини дүзбучаглы координатларла јазсаг:

$$X = x+\lambda x'(t),\quad Y = y+\lambda y'(t),\quad Z = z+\lambda z'(t)$$

вә ја

$$\frac{X-x}{x'(t)} = \frac{Y-y}{y'(t)} = \frac{Z-z}{z'(t)}. \qquad (3)$$

(3) тәнлији Γ әјрисинин $M(x, y, z)$ нөгтәсиндә тохунанын дүзбучаглы координатларла јазылмыш тәнлијидир.

Γ әјрисинин M нөгтәсиндә тохунанына перпендикулјар олан дүз хәттә онун һәмин нөгтәдә *нормалы* дејилир. Бу нөгтәдә һәмин әјријә истәнилән сајда нормал чәкмәк олар. Бу нормалларын һәндәси јери бир мүстәви верәр. Тохунан дүз хәттә перпендикулјар олан бу мүстәвијә Γ әјрисинин M нөгтәсиндә *нормал мүстәвиси* дејилир.

Нормал мүстәвинин (3) тохунан дүз хәттинә перпендикулјар олмасы шәртиндән һәмин мүстәвинин тәнлији алыныр:

$$x'(t)(X-x)+y'(t)(Y-y)+z'(t)(Z-z)=0. \qquad (4)$$

Γ әјрисинин тәнлији $\bar{r}=\overline{r(t)}$ оларса, онда $\frac{d\overline{r(t)}}{dt}=0$ бәрабәрлијинин өдәнилдији нөгтәјә һәмин әјринин *мәхсуси нөгтәси* дејилир. $\left|\frac{d\overline{r(t)}}{dt}\right| = \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}$ олмасындан ајдындыр ки, Γ әјрисинин мәхсуси нөгтәсиндә

$$x'(t)=y'(t)=z'(t)=0$$

бәрабәрликләри өдәнилир.

Әјринин мәхсуси олмајан нөгтәләринә, јә'ни $\frac{d\overline{r(t)}}{dt}\neq 0$ олан нөгтәләринә, онун *гејри-мәхсуси нөгтәләри* дејилир. Һамар әјринин бүтүн нөгтәләри гејри-мәхсуси нөгтәләрдир.

Јухарыда апарылан мүһакимәдән ајдындыр ки, $\bar{r}=\overline{r(t)}$ вектор функсијасы диференсиалланандырса, онун годографы олан Γ әјрисинин һәр бир гејри-мәхсуси нөгтәсиндә тохунаны вар.

Хүсуси һалда, һамар Γ әјрисинин һәр бир нөгтәсиндә тохунаны вардыр.

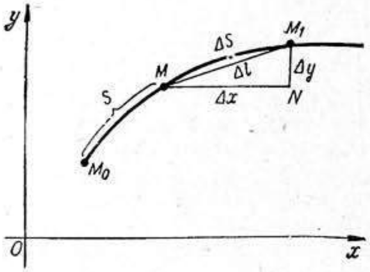
Әјринин мәхсуси нөгтәләриндә тохунанын варлығы һаггында әввәлчәдән һеч нә демәк олмаз. Һәр бир мәхсуси нөгтәдә тохунанын варлығы мәсәләси хүсуси тәдгиг олунмалыдыр.

§ 6. ӘЈРИ ГӨВСҮНҮН ДИФЕРЕНСИАЛЫ

Параметрик тәнлији

$$\left.\begin{matrix} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{matrix}\right\} (a\leqslant t\leqslant b) \qquad (1)$$

олан һамар Γ мүстәви әјрисинә бахаг. Бу әјринин гејд олунмуш нөгтәсини $M_0(x_0, y_0)$ илә, ихтијари нөгтәсини исә $M(x, y)$ илә ишарә едәк. Әјринин M_0M гөвсүнүн узунлуғу s олсун (188-чи шәкил). Ајдындыр ки, әјри үзәриндәки ихтијари $M(x, y)$ нөгтәсинин вәзијјәти t-дән асылыдыр, t параметри дәјишдикчә x вә y кәмијјәтләри дәјишир ((1) бәрабәрликләриндә көстәрилән кими), бунлардан да асылы олараг $M(x, y)$ нөгтәси мүәјјән вәзијјәт алыр. Бурадан көрүнүр ки, M_0M гөвсүнүн узунлуғу t-дән асылыдыр, јә'ни $s=s(t)$.



Шәкил 188.

Тутаг ки, Γ әјриси үзәриндә параметрин t гијмәтинә ујғун олан нөгтә $M(x, y)$, $t+\Delta t$ гијмәтинә ујғун олан нөгтә исә $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$-дир. Онда әјринин $\overset{\frown}{MM_1}$ гөвсүнүн узунлуғу

$$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$$

олар. Әјри гөвсүнүн ујғун $\overline{MM_1}$ вәтәринин узунлуғуну Δl илә ишарә етсәк, ики нөгтә арасындакы мәсафә дүстуруна көрә:

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2. \qquad (2)$$

4-чү параграфда көстәрилән мүлаһизәләрә вә (4) бәрабәрлијинә көрә

$$\lim_{\Delta l\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta l} = 1 \qquad (3)$$

бәрабәрлији доғрудур. Онда (2) вә (3) бәрабәрликләринә әсасән $s(t)$ гөвсүнүн t параметринә көрә төрәмәси үчүн

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta l} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} =$$

вә јахуд

$$= \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}, \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \qquad (4)$$

мүнасибәтини аларыг. Бурадан гөвсүн диференсиалы үчүн

$$ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt \qquad (5)$$

ифадәси алыныр.

Мүстәви үзәриндә әјри $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ тәнлији илә верилдикдә, ону

$$\left.\begin{matrix} x=x, \\ y=f(x) \end{matrix}\right\} (a\leqslant x\leqslant b)$$

параметрик шәкилдә верилмиш гәбул етмәк олар (§ 3). Бу һалда, әјри гөвсүнүн диференсиалы үчүн

$$ds = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx \qquad (6)$$

ифадәсини аларыг.

Мүстәви әјриси полјар координатларла $\rho=f(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ шәклиндә тәнликлә верилдикдә, онун тәнлијини

$$\left.\begin{matrix} x=f(\theta)\cos\theta, \\ y=f(\theta)\sin\theta \end{matrix}\right\} (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

параметрик шәкилдә (§ 3) јазмаг олар. Бу һалда

$$x_\theta'=f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \text{ вә } y_\theta'=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$$

вә (5) бәрабәрлијиндән әјри гөвсүнүн диференсиалы үчүн

$$ds = \sqrt{[f'(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\, d\theta \qquad (7)$$

вә ја

$$ds = \sqrt{(\rho_\theta')^2 + \rho^2}\, d\theta \qquad (8)$$

ифадәси алыныр.

Ејни мүһакимә илә

$$\left.\begin{matrix} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t) \end{matrix}\right\} (a\leqslant t\leqslant b)$$

параметрик шәкилдә верилмиш һамар Γ фәза әјрисинин диференсиалы үчүн

$$ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2} \qquad (9)$$

ифадәсини алмаг олар.

Мисал. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ параметрик тәнликләри илә тә'јин олунан (§ 3) тсиглоид әјриси гөвсүнүн диференсиалы:

$$ds=\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

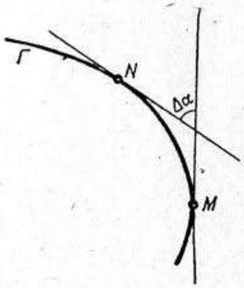
олар.

§ 7. МҮСТӘВИ ӘЈРИСИНИН ӘЈРИЛИЈИ

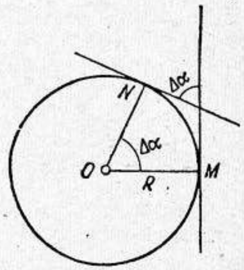
Тутаг ки, мүстәви үзәриндә һамар Γ әјриси верилмишдир. Бу әјринин бүтүн нөгтәләриндә тохунаны вардыр вә әјри үзрә һәрәкәт етдикдә тохунанлар өз вәзијјәтини кәсилмәдән дәјишир. Бу һалда, әјри үзәриндәки M нөгтәсиндән N нөгтәсинә гәдәр һәрәкәт етдикдә M нөгтәсиндәки тохунан өз истигамәтини $\Delta\alpha$ бучағы гәдәр дәјишәрәк N нөгтәсиндәки тохунан вәзијјәтини алыр (189-чу шәкил). Бу $\Delta\alpha$ бучағына MN гөвсүнүн *дөнмә бучағы* дејилир. Гөвсүн дөнмә бучағы онун чох вә ја аз әјилдијини характеризә едир. Јалныз дөнмә бучағы илә әјринин әјрилијини тә'јин етмәк олмаз. Әјри гөвсүнүн мүхтәлиф һиссәләриндә әјилмәси (вә ја әјрилији) мүхтәлиф ола биләр.

Т ә' р и ф 1. *$\breve{MN}$ гөвсүнүн $\Delta\alpha$ дөнмә бучағынын гөвсүн $\Delta s =$ үз. $\breve{MN}$ узунлуғуна нисбәтинә һәмин гөвсүн орта әјрилији дејилир:*

$$K_{\text{ор.}}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}. \qquad (1)$$



Шәкил 189.



Шәкил 190.

Орта әјрилик бүтүн әјри гөвсү үзрә олан әјрилији характеризә едир. Әјринин мүхтәлиф нөгтәләринин јахын әтрафында исә әјилмә (вә ја әјрилик) дәрәчәләри мүхтәлиф ола биләр. Буна көрә дә нөгтәдә хәттин әјрилији анлајышы верилир.

Т ә' р и ф 2. *N нөгтәси M нөгтәсинә јахынлашдыгда онун $\breve{MN}$ гөвсүнүн орта әјрилијинин лимитинә әјринин M нөгтәсиндә әјрилији дејилир вә*

$$K=K_M=\lim_{N\to M}K_{\text{ор.}}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \qquad (2)$$

вә ја

$$K_M=\frac{d\alpha}{ds} \qquad (3)$$

шәклиндә ишарә олунур.

Мисал. R радиуслу чеврәнин бүтүн нөгтәләриндә әјрилији сабит олуб $\frac{1}{R}$ әдәдинә бәрабәрдир.

Доғрудан да, чеврәнин (190-чы шәкил) ихтијари MN гөвсүнүн Δs узунлуғу онун $\Delta\alpha$ дөнмә бучағы васитәсилә

$$\Delta s=R\cdot\Delta\alpha$$

шәклиндә дүстурла ифадә олунур. Бу һалда:

$$K_{\text{ор.}}=\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{\Delta\alpha}{R\Delta\alpha}=\frac{1}{R}$$

вә

$$K_M=\lim_{\Delta s\to 0}K_{\text{ор}}=\frac{1}{R}.$$

Т ә' р и ф 3. *Әјринин M нөгтәсиндә K_M әјрилијинин тәрс гијмәтинә әјринин M нөгтәсиндә әјрилик радиусу дејилир:*

$$R_M=\frac{1}{K_M} \qquad (4)$$

$$\left(\frac{1}{\infty}=0,\quad \frac{1}{0}=\infty\right).$$

Гејд. Бә'зән хәттин әјрилији мүсбәт көтүрүлүр. Бу һалда әјрилијин (3) дүстуруну

$$K_M=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right| \qquad (5)$$

кими, әјрилик радиусунун (4) дүстуруну исә

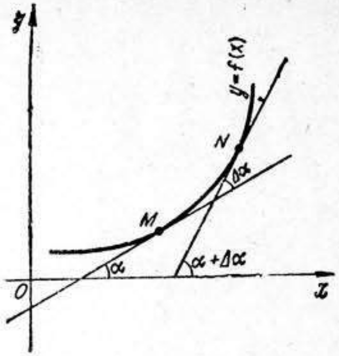
$$R_M=\frac{1}{|K_M|} \qquad (6)$$

кими көтүрмәк лазымдыр.

Инди $y=f(x)$ тәнлији илә верилмиш әјринин әјрилијини һесаблајаг. Фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасынын икитәртибли төрәмәси вардыр.

Төрәмәнин һәндәси мә'насына көрә

$$\operatorname{tg}\alpha=y' \quad \text{вә} \quad \alpha=\operatorname{arc\,tg}y'$$



олдуғундан (191-чи шәкил):

$$d\alpha = \frac{y''}{1+(y')^2}\,dx.$$

Гөвсүн диференсиалынын ифадәси исә

$$ds = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

кими олдуғундан (§ 6) (3) дүстуруна әсасән.

$$K_M = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

вә јахуд

$$K_M = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}. \qquad (7)$$

Онда хәттин M нөгтәсиндә әјрилик радиусу

$$R_M = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''} \qquad (8)$$

дүстуру илә һесабланар.

Нәтичә. Әјринин дөнмә нөгтәсиндә $y''=0$ олдуғда әјрилији сыфра бәрабәр олар. Еләчә дә, $y=ax+b$ дүз хәтти үчүн $y''=0$ олдуғундан бүтүн нөгтәләрдә онун әјрилији сыфра бәрабәрдир.

Мисал 1. $y=x^4$ әјрисинин $x=1$ нөгтәсиндә әјрилијини һесабламалы.

$y'=4x^3$ вә $y''=12x^2$ олдуғундан (7) дүстуруна көрә

$$K = \frac{12}{(1+16)^{3/2}} = \frac{12}{17\sqrt{17}}.$$

Мүстәви әјри

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t),\\ y&=\psi(t)\end{aligned}\right\} (a\leqslant t\leqslant b)$$

параметрик шәклиндә верилдикдә (XIV, § 10):

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ вә } y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

Онда (7) дүстурундан әјрилик үчүн

$$K = \frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2]^{3/2}} \qquad (9)$$

ифадәсини аларыг.

Мисал 2. Јарымохлары a вә b олан

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t$$

еллипсинин истәнилән нөгтәсиндә әјрилијини вә әјрилик радиусуну тапмалы.

$$x'(t) = -a\sin t,\ x''(t) = -a\cos t,$$
$$y'(t) = b\cos t,\ y''(t) = -b\sin t$$

олдуғундан (9) дүстуруна көрә:

$$K = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}$$

вә

$$R = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}.$$

Мүстәви әјриси полјар координатларла $\rho=f(\theta)$ $(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ шәклиндә верилдикдә, онун тәнлијини

$$\left.\begin{aligned} x&=f(\theta)\cos\theta,\\ y&=f(\theta)\sin\theta\end{aligned}\right\} (\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$$

параметрик шәкилдә јазараг, (9) дүстуруна әсасән әјрилик үчүн

$$K = \frac{[f(\theta)]^2+2[f'(\theta)]^2-f(\theta)f''(\theta)}{[(f(\theta))^2+(f'(\theta))^2]^{3/2}} \qquad (10)$$

дүстуруну аларыг.

Мисал 3. $\rho=a\theta$ $(a>0)$ Архимед спиралынын истәнилән нөгтәсиндә әјрилијини һесабламалы.

$\rho_\theta' = a$ вә $\rho_\theta'' = 0$ олдуғундан (10) дүстуруна әсасән:

$$K = \frac{a^2\theta^2+2a^2}{(a^2\theta^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\theta^2+2}{(\theta^2+1)^{3/2}}.$$

§ 8. МҮСТӘВИ ӘЈРИСИНИН ЕВОЛЈУТУ ВӘ ЕВОЛВЕНТИ

Мүстәви үзәриндә һамар Γ әјриси көтүрәк вә онун истәнилән M нөгтәсиндә нормалыны чәкәк (192-чи шәкил). Бу нормал үзәриндә, әјринин чөкүк олдуғу тәрәфдә, әјринин M нөгтәсиндәки R_M әјрилик радиусуна бәрабәр MA парчасы ајыраг. Бу һалда алынан $A(\xi, \eta)$ нөгтәсинә әјринин M нөгтәсиндә *әјрилик мәркәзи* дејилир. Мәркәзи A нөгтәсиндә олан R_M радиуслу даирә һәмин әјринин M нөгтәсиндә *әјрилик даирәси* адланыр.

Γ әјрисинин $y=f(x)$ тәнлији мә'лум олдуғда онун истәнилән $M(x, y)$ нөгтәсинин $A(\xi, \eta)$ әјрилик мәркәзинин координатларыны тапмаг олар. Доғрудан да,

$$x-\xi = R_M\sin\alpha,\ \eta-y=R_M\cos\alpha$$

вә ја

$$\xi = x-R_M\sin\alpha,\ \eta= y+R_M\cos\alpha. \qquad (1)$$

$\operatorname{tg}\alpha = y'$ олдуғундан (төрәмәнин һәндәси мә'насы):

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

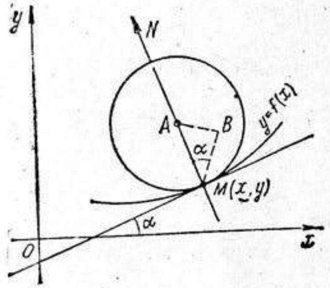
Бу гиjмәтләри вә әjрилик радиусу үчүн әввәлки параграфда алдығымыз

$$R_{\text{M}} = \frac{[1+(y')^2]^{3/2}}{y''}$$

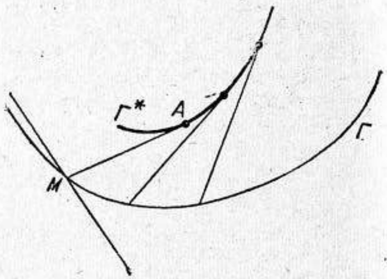
гиjмәтини (1) бәрабәрликләриндә jеринә jазсаг:

$$\xi = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+(y')^2}{y''}. \qquad (2)$$

Беләликлә, верилмиш әjринин әjрилиjи сыфырдан фәргли олан һәр бир $M(x, y)$ нөгтәсинә координатлары (2) дүстурлары илә һесабланан бир $A(\xi, \eta)$ әjрилик мәркәзи уjғун олур. Бу $M(x, y)$ нөгтәси әjри үзрә һәрәкәт етдикдә она уjғун олан $A(\xi, \eta)$ әjрилик мәркәзи дә, үмумиjjәтлә өз jерини дәjишәрәк бир хәтт чызыр ки, она верилмиш әjринин еволjуту деjилир.



Шәкил 192.



Шәкил 193.

Демәли, Γ әjрисинин әjрилик мәркәзләринин һәндәси jери олан Γ^* әjрисинә онун *еволjуту* деjилир. Бу һалда Γ әjриси өз Γ^* еволjутунун *еволвенти* (ачылышы) адланыр.

Верилмиш әjринин әjрилик мәркәзинин координатларыны тә'jин едән (2) дүстурларыны еволjутун параметрик тәнлиjи һесаб етмәк олар. Бу һалда Γ әjриси нөгтәләринин x абсиси параметр һесаб олунур.

Еволjутун (2) параметрик тәнлиjиндән истифадә едәрәк, онун ашағыдакы ики хассәсинин доғрулуғуну исбат етмәк олар:

I. Γ әjрисинин M нөгтәсиндә әjрилик мәркәзи A нөгтәсидирсә, онда AM дүз хәтти (Γ әjрисинин нормалы) һәмин әjринин Γ^* еволjутунун тохунаныдыр (193-чү шәкил).

II. Γ әjрисинин әjрилик радиусунун артымы еволjутун гөвсүнүн (уjғун әjрилик мәркәзләринин арасындакы гөвсүн) узунлуғуна бәрабәрдир (194-чү шәкил).

Геjд едәк ки, бир еволjутун истәнилән саjда мүхтәлиф еволвентләри ола биләр.

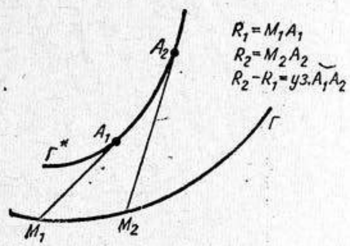
Мисал. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ еллипсинин еволjутуну тапмалы.

$$y' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} \quad \text{вә} \quad y'' = \frac{ab}{(-a\sin t)^3}$$

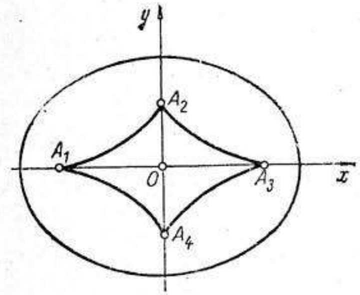
олдуғуну нәзәрә алсаг (2) дүстурларына көрә:

$$\xi = a\cos t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}\cdot b\cos t = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = b\sin t - \frac{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}{ab}\cdot a\sin t = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$



Шәкил 194.



Шәкил 195.

Беләликлә, еллипсин еволjуту

$$\xi = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,$$

$$\eta = \frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$$

параметрик тәнликләри илә тә'jин олунан $A_1A_2A_3A_4$ хәттидир (195-чи шәкил). Буна *астроида әjриси* деjилир.

§ 9. ФӘЗА ӘJРИСИНИН ӘJРИЛИJИ

Фәзада jерләшән һамар Γ әjриси вә онун үзәриндә ихтиjари M нөгтәси көтүрәк. Γ әjрисинин параметрик тәнлиjи $\bar{r} = r(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ вә jа

$$\left.\begin{array}{l} x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{array}\right\}(a\leqslant t\leqslant b)$$

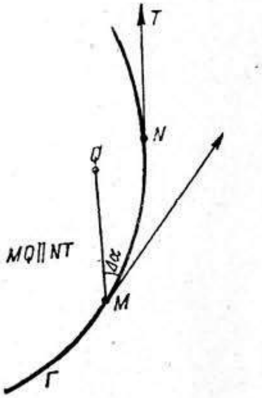
олсун. Γ әјрисинин M вә N нөгтәләринә чәкилмиш тохунанларын ејни истигамәтләринин әмәлә кәтирдији бучаг ($\breve{MN}$ гөвсүнүн дөнмә бучағы) $\Delta\alpha$ оларса (196-чы шәкил), онда Γ әјрисинин M нөгтәсиндә әјрилији, мүстәви әјриләрдә олдуғу кими, ашағыдакы бәрабәрликлә тә'јин олунур:

$$K_{\text{M}}=\lim_{N\to M}\frac{\Delta\alpha}{\text{уз.}\,\breve{MN}}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}\qquad(1)$$

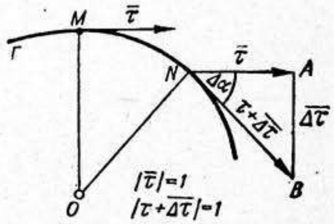
$$(\Delta s=\text{узунлуг }\breve{MN}).$$

Бу һалда да, әјринин M нөгтәсиндә әјрилијинин $R_{\text{M}}=\frac{1}{K_{\text{M}}}$ тәрс гијмәти һәмин нөгтәдә *әјрилик радиусу* адланыр.

Әкәр Γ әјрисинин тохунаны үзәриндә јерләшән (истигамәти t параметринин артма истигамәтинин ејни олан) ваһид вектору $\bar{\tau}$ илә ишарә етсәк, онда



Шәкил 196.



Шәкил 197.

$$\frac{d\overline{r(t)}}{dt}=\frac{ds}{dt}\cdot\bar{\tau}$$

вә

$$\frac{d\overline{r(s)}}{ds}=\bar{\tau}$$

олдуғуну 4-чү параграфда ((7) вә (9) дүстурлары) исбат етмишик. Инди исбат едәк ки,

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right|=\frac{d\alpha}{ds}\qquad(2)$$

бәрабәрлији доғрудур. Әкәр Γ әјрисинә M нөгтәсиндә ($\overline{r(t)}$ векторунун сон уч нөгтәсиндә) чәкилән тохунан үзәриндә јерләшән ваһид вектору $\bar{\tau}$ илә ишарә етсәк, онда параметрин $t+\Delta t$ гијмәтинә әјри үзәриндә ујғун олан N нөгтәсиндә ($\overline{r(t+\Delta t)}$ векторунун уч нөгтәсиндә) әјријә чәкилән тохунан үзәриндә јерләшән ваһид вектор $\bar{\tau}+\Delta\bar{\tau}$ олар (197-чи шәкил). Бәрабәрјанлы BNA үчбучағындан:

$$NB=|\bar{\tau}+\Delta\bar{\tau}|=|\bar{\tau}|=NA=1,$$
$$\Delta\bar{\tau}=2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}.\qquad(3)$$

Онда:

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta s}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\Delta\bar{\tau}|}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta s}=$$

$$=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta\alpha}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}=\frac{d\alpha}{ds}.$$

јә'ни (2) бәрабәрлији доғрудур.

(1) вә (2) бәрабәрликләринә әсасән Γ әјрисинин ихтијари M нөгтәсиндә әјрилијини һесабламаг үчүн

$$K=K_{\text{M}}=\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right|\qquad(4)$$

дүстуруну аларыг. Бу көстәрир ки, тохунанын ваһид векторунун гөвс узунлуғуна нәзәрән төрәмәсинин узунлуғу әјринин ујғун нөгтәдә әјрилијинә бәрабәрдир.

$|\bar{\tau}|=1$ олдуғундан $\bar{\tau}\frac{d\bar{\tau}}{ds}=0$, јә'ни $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ вектору $\bar{\tau}$ векторуна (тохунана) перпендикулјардыр. Демәли, $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ векторунун узунлуғу Γ әјрисинин әјрилијинә бәрабәрдир, истигамәти исә әјринин тохунанына перпендикулјардыр.

$\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ вектору истигамәтиндә олан ваһид вектору $\bar{\nu}$ илә ишарә етсәк, (4) бәрабәрлијиндән

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=K\bar{\nu}\qquad(5)$$

аларыг. Бу вектора *фәза әјрисинин әјрилик вектору* дејилир.

Тә'риф. *Әјринин әјрилик вектору* $\left(\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right.$ *вектору*$\left.\right)$ *истигамә-*

тиндә олан вә онун ујғун M нөгтәсиндән кечән дүз хәттә һәмин әјринин M нөгтәсиндә баш нормалы дејилир. Баш нормал истигамәтиндә олан ваһид вектор ν олар.

Верилмиш әјринин *M* нөгтәсиндә $\overline{\tau}$ вә $\overline{\nu}$ векторларынын векториал һасилинә бәрабәр олан $\beta=\tau\times\nu$ векторуну гураг. Ајдындыр ки, $\overline{\beta}$ вектору (вә һәм дә $\overline{\nu}$ вектору) әјринин *M* нөгтәсиндәки нормал мүстәвиси үзәриндә јерләшир. β векторунун тә'јин етдији истигамәтә әјринин *бинормалынын («икинчи» нормалынын) истигамәти* дејилир.

Беләликлә, тә'јин олунан $\overline{\tau}$, $\overline{\nu}$ вә $\overline{\beta}$ ваһид векторлары әјринин *M* нөгтәсиндән кечән вә гаршылыглы перпендикулјар олан векторлардыр. Бу үч ваһид вектор ики-ики олмагла үч мүстәвини тә'јин едир.

ν вә $\overline{\beta}$ векторларынын тә'јин етдији мүстәви (вә ја һәмин векторлардан кечән мүстәви) әјринин *M* нөгтәсиндә нормал мүстәвидир.

$\overline{\tau}$ вә $\overline{\nu}$ векторларынын тә'јин етдији мүстәвијә *M* нөгтәсиндә әјријә *чохтохунан мүстәви* дејилир. Ајдындыр ки, әјринин *M* нөгтәсиндә бинормалы һәмин нөгтәдә чохтохунан мүстәвијә перпендикулјар олан дүз хәтдир. Мүстәви әјриләрин чохтохунан мүстәвиси онларын (үзәриндә) јерләшдикләри мүстәвидир.

$\overline{\tau}$ вә $\overline{\beta}$ векторларынын тә'јин етдији мүстәвијә әјринин *дүзләнәбилән мүстәвиси* дејилир.

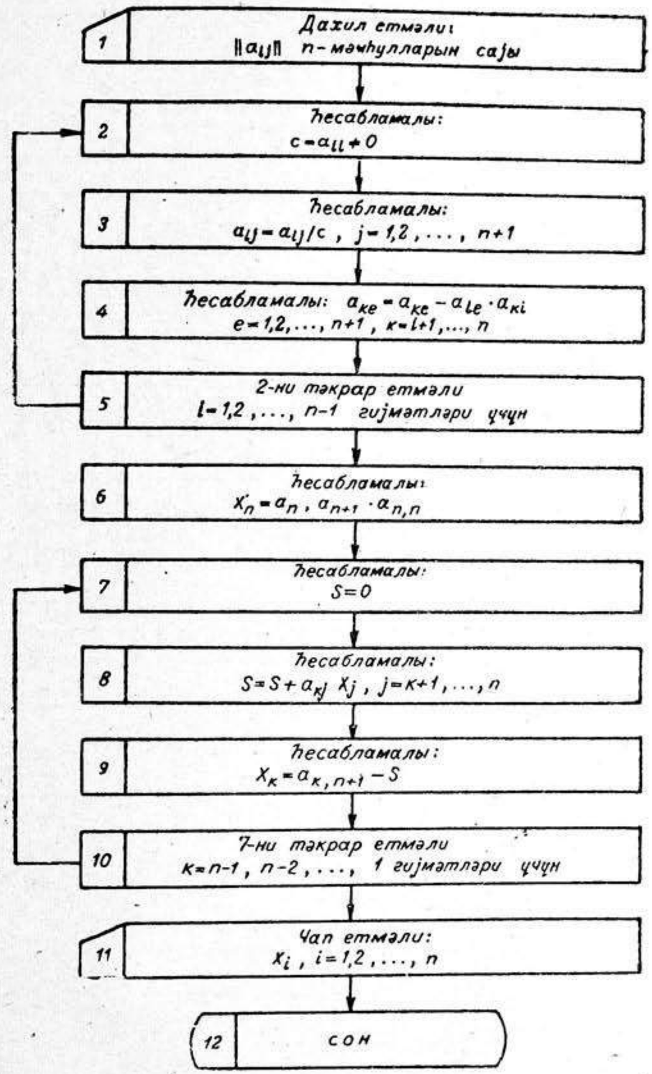
Гејд едәк ки, $\overline{\tau}$, $\overline{\nu}$ вә β векторларынын оријентасијасы координат охлары үзәриндә јерләшән $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ ваһид векторларынын оријентасијасы кимидир. τ, ν вә $\overline{\beta}$ ваһид векторлары бир үчүзлү әмәлә кәтирир. Бу үчүзлүјә *фәза әјрисинин Френе*[1] *(вә јахуд мүшајиәтедән) үчүзлүсү* дејилир. Әјринин *M* нөгтәсиндәки нормал, чохтохунан вә дүзләнәбилән мүстәвиләри онун Френе үчүзлүсүнүн үзләрини тәшкил едир.

---

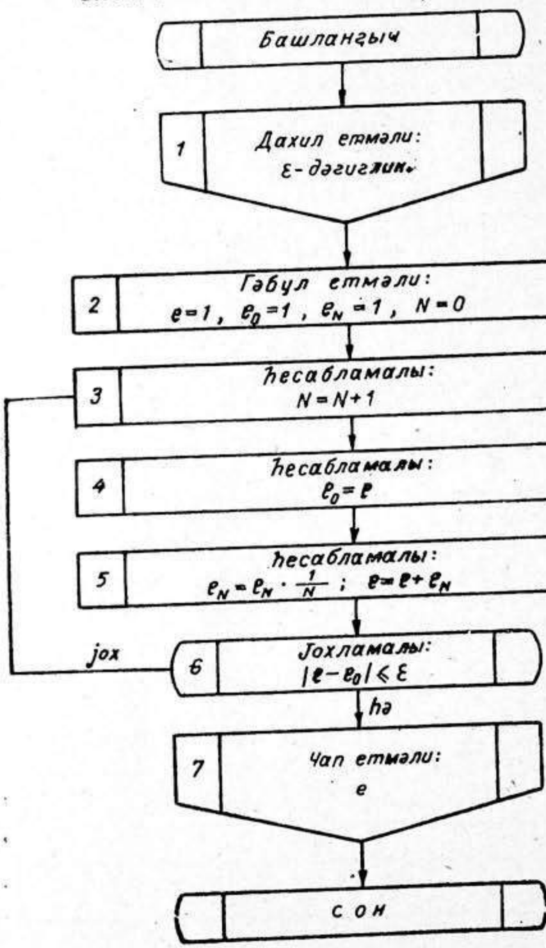
[1] Ж. Френе (1801—1880) Франсыз ријазијјатчысыдыр.

ӘЛАВӘЛӘР

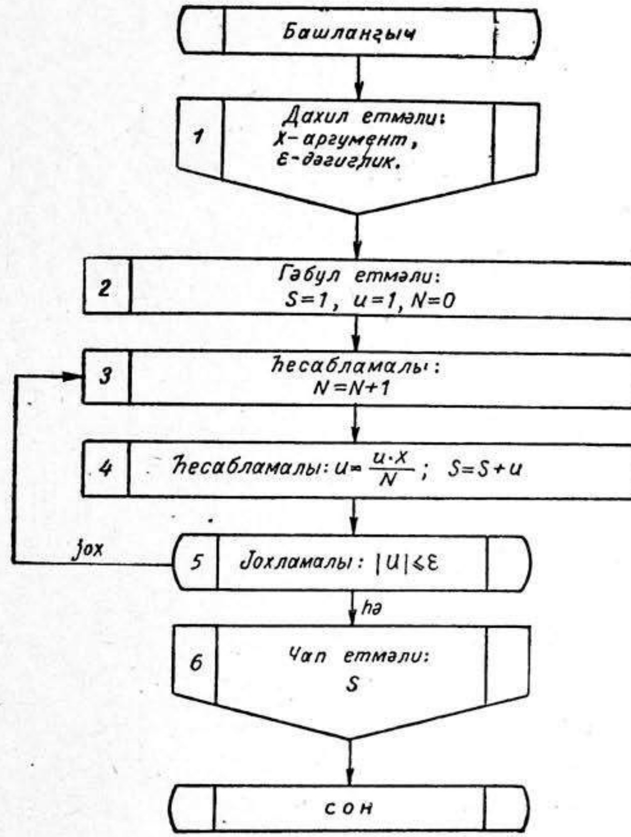
ЕЛЕКТРОН РӘГӘМ ҺЕСАБЛАМА МАШЫНЫНДА (ЕРҺМ) ГАУСС ҮСУЛУ ИЛӘ ХӘТТИ ТӘНЛИКЛӘР СИСТЕМИНИН ҺӘЛЛ ЕДИЛМӘСИНИН БЛОК-СХЕМИ



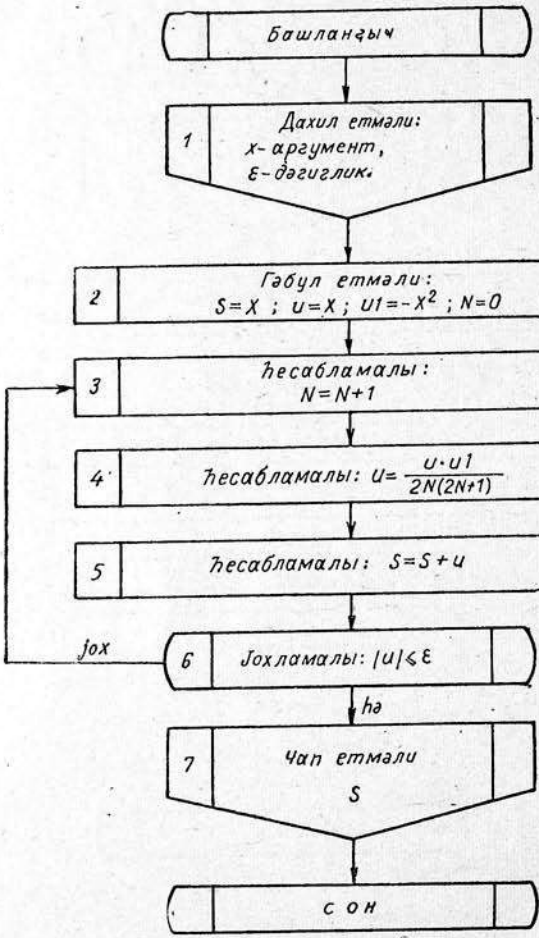
e ӘДӘДИНИН ЕРҺМ-дә ҺЕСАБЛАНМАСЫНЫН БЛОК-СХЕМИ



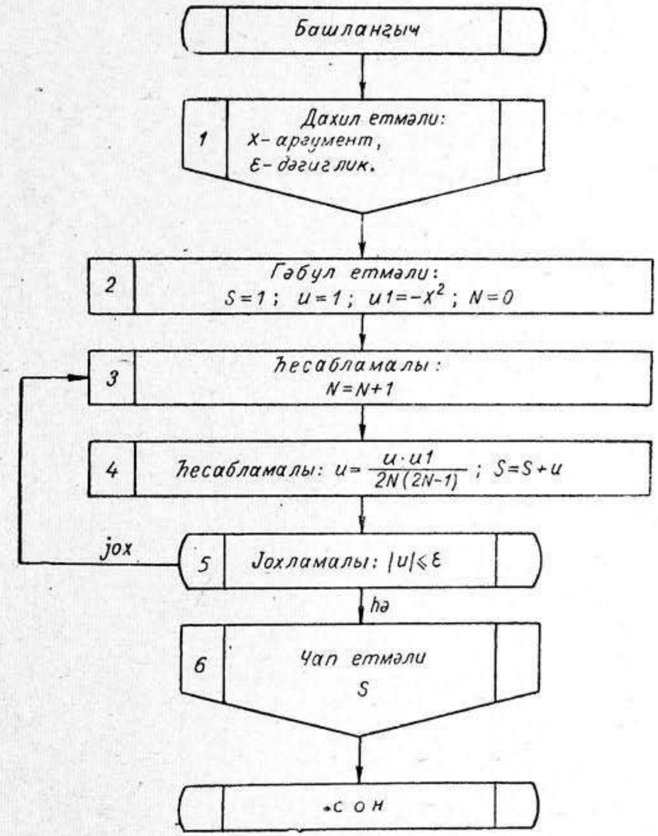
e^x ФУНКСИЈАСЫНЫН ЕРҺМ-дә ҺЕСАБЛАНМАСЫНЫН БЛОК-СХЕМИ



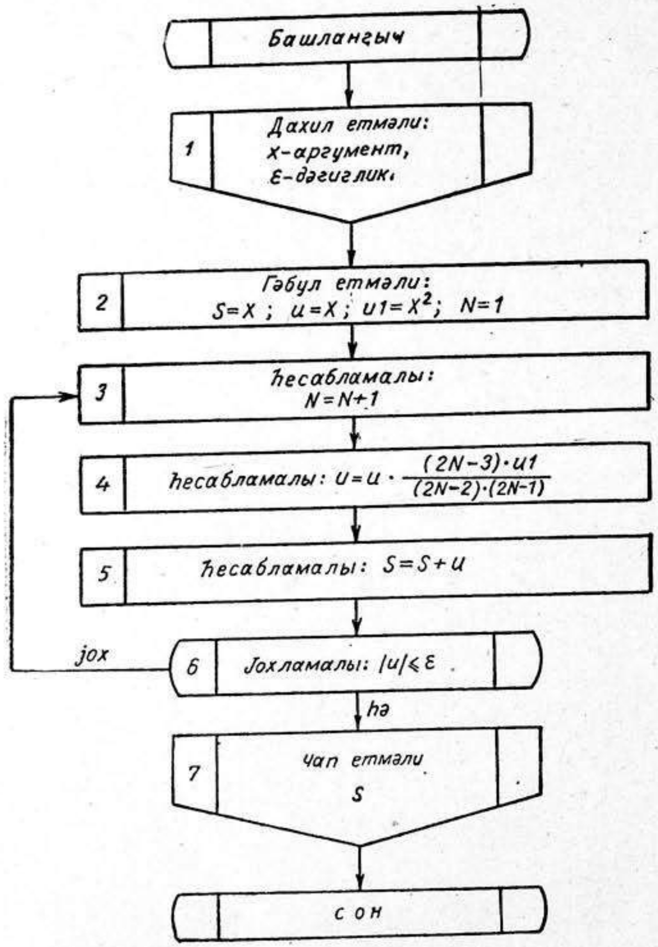
sin x ФУНКСИЈАСЫНЫН ЕРҺМ-дә ҺЕСАБЛАНМАСЫНЫН БЛОК-СХЕМИ



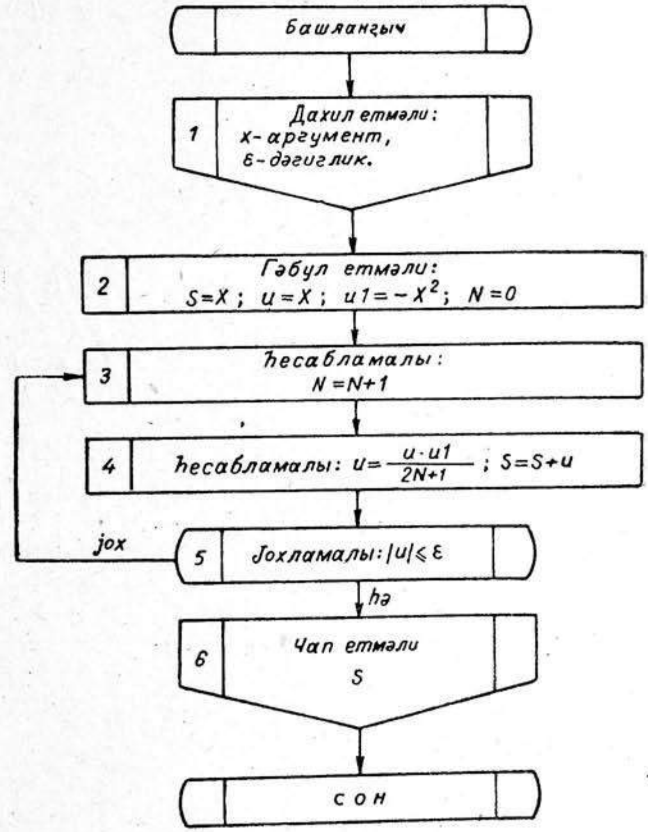
cos x ФУНКСИЈАСЫНЫН ЕРҺМ-дә ҺЕСАБЛАНМАСЫНЫН БЛОК-СХЕМИ



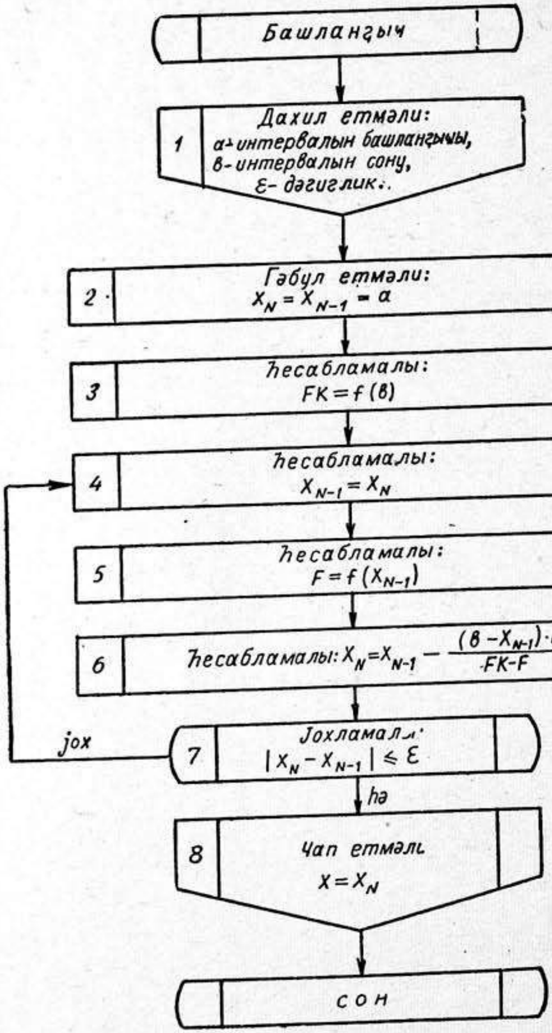
arc sin x ФУНКСИЈАСЫНЫН ЕРҺМ-дә ҺЕСАБЛАНМАСЫНЫН БЛОК-СХЕМИ



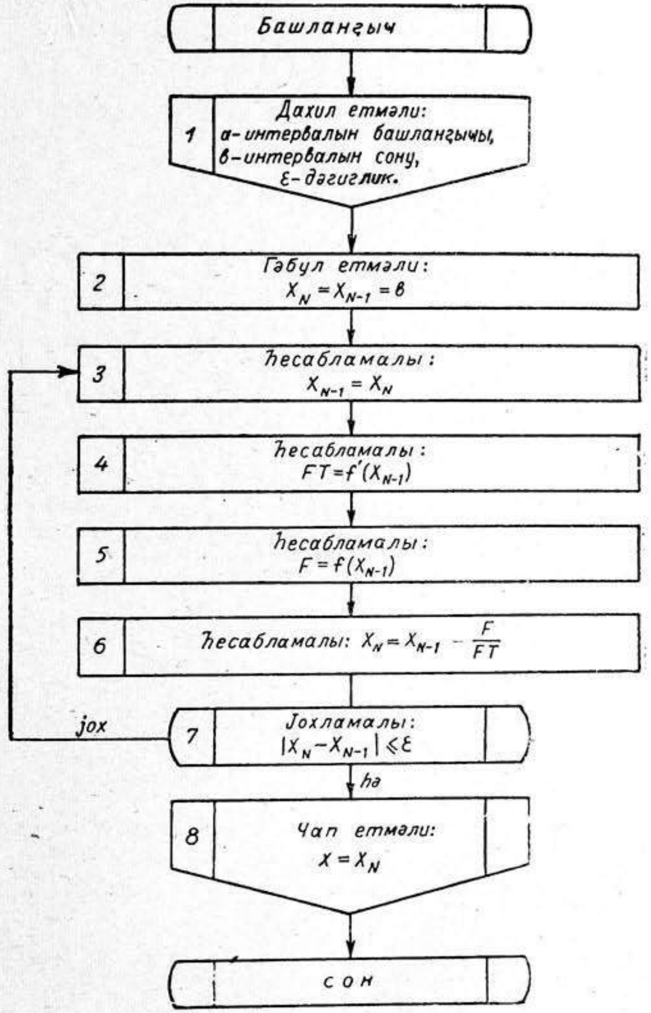
arc tg x ФУНКСИЈАСЫНЫН ЕРҺМ-дә ҺЕСАБЛАНМАСЫНЫН БЛОК-СХЕМИ



ВӘТӘРЛӘР ҮСУЛУНУН БЛОК-СХЕМИ



ТОХУНАНЛАР ҮСУЛУНУН БЛОК-СХЕМИ



МҮНДӘРИЧАТ

I ҺИССӘ

ХӘТТИ ЧӘБРИН ЕЛЕМЕНТЛӘРИ ВӘ АНАЛИТИК ҺӘНДӘСӘ

I фәсил. Матрисләр вә детерминантлар

II фәсил. Хәтти тәнликләр системи

III фәсил. Векторлар чәбри

IV фәсил. Хәтти фәзалар

V фәсил. Хәтти чевирмәләр

VI фәсил. Мүстәви үзәриндә дүз хәтт

VII фәсил. Фәзада дүз хәтт вә мүстәвиләр

VIII фәсил. Икитәртибли әјриләр вә сәтһләр

II ҺИССӘ

БИРДӘЈИШӘНЛИ ФУНКСИЈАЛАРЫН ДИФЕРЕНСИАЛ ҺЕСАБЫ

XVI фәсил. **Диференсиал һесабынын әсас теоремләри**

XVII фәсил. **Функсијаларын төрәмә васитәсилә тәдгиги вә графикләринин гурулмасы**

XVIII фәсил. **Комплекс әдәдләр вә тәнликләрин һәлли**

XIX фәсил. **Интерполјасија вә функсијаларын јахынлашмасы**

XX фәсил. **Һәгиги дәјишәнли вектор функсијалар**

Рәшид Гамид оглы Мамедов

Доктор физико-математических наук, профессор

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

I том

Учебник

(на азербайджанском языке)

Елми редактору *К. Чәфәрли* — физика-ријазијјат елмләри намизәди, досент.
Нәшријјат редактору *З. Гулијева.*
Чилдин рәссамы *В. Садыхјан.*
Бәдии редактору *А. Әләкбәров.*
Техники редактору *Ә. Ағајев.*
Корректорлары *Л. Һачыјева, К. Садыхова.*

ИБ—855

Јығылмаға верилмиш 23/IX-1976-чы ил. Чапа имзаланмыш 21/XI-1977-чи ил. Кағыз форматы 60×90¹/₁₆. Кағыз № 3. Физики вә шәрти ч. в. 31. Учот нәшр. вәрәги 25,5. Сифариш № 1349. Тиражы 15 000. Чилддә гијмәти 1 ман. 25 гәп.

Азәрбајчан ССР Назирләр Совети Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тиҹарәти Ишләри Комитәсинин «Маариф» Нәшријјаты. Бакы, Ә. Тағызадә күчәси, № 4.

Азәрбајчан ССР Назирләр Совети Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тиҹарәти Ишләри Комитәсинин 26 Бакы комиссары адына мәтбәәси. Бакы, Әли Бајрамов күчәси, № 3.

ДҮЗӘЛИШ

Сәһ.	Сәтир	Чап олунмушдур	Охунмалыдыр
13	јух. 10	$+a_{12}(-1)^{1+3}a_{21}=\dots+a_{12}A_{21}$	$+a_{12}(-1)^{1+2}a_{21}=\dots+a_{12}A_{12}$
41	аш. 6	уч	сон уч
42	јух. 1	AB	$\overline{AB}$
45	» 17	$+\mu_n\bar{a}_{n-1}$,	$+\mu_{n-1}\bar{a}_{n-1}$,
51	» 4	гијмәти $\overline{N_1N_2}$	гијмәти N_1N_2
68	» 6	$(a\times b)\times c\dots a\times(b\times c)$	$(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}\dots\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$
»	» 7	$a\times b\times c$	$\bar{a}\times\bar{b}\times\bar{c}$
70	» 11	a, b, c	$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$
115	» 2	$=\begin{Vmatrix} c_{21} & c_{22} \\ c_{11} & c_{12} \end{Vmatrix}$	$=\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}$
119	» 2	$, y=\sqrt{3i}$	$, y=\sqrt{3}\cdot i$
135	» 5	$-\frac{z-z_0}{p_1}$	$=\frac{z-z_0}{p_1}$
»	» 7	$-\frac{z-z_1}{p_2}$	$=\frac{z-z_1}{p_2}$
172	аш. 7	$X_к\in$	$X_к=$
173	јух. 17	$=\{x/x\,\bar{\in}\,X,$	$=\{x/x\in X,$
184	аш. 9	$[a, +\infty]$	$[a, +\infty)$
185	» 5	$\{x$ әкәр	$\{-x$ әкәр
242	» 11	Онда	Онда тәрс
248	јух. 11	$x+\sqrt{2x^3}$	$x+\sqrt{2}\cdot x^3$
266	» 14	бәрабәрсизлијиндә	бәрабәрлијиндә
277	аш. 11	артыг.	артыр.
289	јух. 4	$\overline{N}$	$\frac{\varepsilon}{N}$
301	» 11	$A(x-a)^m=$	$A(x-a)^m\approx$
321	» 20	$\varepsilon>0$	$\delta>0$
338	аш. 11 вә 12	$\sqrt{2x^2+1}$	$\sqrt{3x^2+1}$
350	јух. 15	$f'(\Delta x)$	$f'(x)$
360	аш. 14	Δx_0	$\Delta\ x_0$
364	» 14	(a, e)	(a, b)
414	» 13	$\tilde{z}$	$\bar{z}$
436	јух. 4	$=\frac{b-c}{\ }$	$=\frac{b-a}{\ }$
479	» 9	$\Delta\bar{\tau}=$	$\lvert\Delta\bar{\tau}\rvert=$

Сифариш 1349

M.25r.

1948
69